DS6 (version B)

Exercice (`ESSEC I 2010`)

Dans tout ce problème, on note n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées possédant n lignes et n colonnes dont les coefficients sont réels.
On note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient les propriétés suivantes :

(Δ_1) les coefficients diagonaux $m_{1,1}$, ..., $m_{n,n}$ de la matrice M sont des valeurs propres de M ;

(Δ_2) la matrice M n'a pas d'autres valeurs propres que les nombres $m_{1,1}$, ..., $m_{n,n}$.

Partie I. Généralités et exemples

1. Montrer que toutes les matrices triangulaires supérieures et toutes les matrices triangulaires inférieures de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ appartiennent à $\mathcal{D}_n$.

Démonstration.

- Soit T une matrice triangulaire supérieure de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \alpha_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} \lambda \text{ est valeur propre de } T & \Leftrightarrow & T - \lambda \cdot I_n \text{ n'est pas inversible} \\ & \Leftrightarrow & \mathrm{rg}(T - \lambda \cdot I_n) < n \end{array}$$

Or :

$$\mathrm{rg}(T - \lambda \cdot I_n) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} \alpha_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \alpha_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} \alpha_1 - \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & \alpha_2 - \lambda & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n - \lambda \end{pmatrix} \right)$$

Comme $T - \lambda \cdot I_n$ est triangulaire, alors :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{rg}(T - \lambda \cdot I_n) < n & \Leftrightarrow & \text{l'un (au moins) des coefficients diagonaux de } T - \lambda \cdot I_n \text{ est nul} \\ & \Leftrightarrow & \text{il existe } i \in [\![1, n]\!] \text{ tel que : } \alpha_i - \lambda = 0 \end{array}$$

On en déduit : $\mathrm{Sp}(T) = \{\alpha_i \mid i \in [\![1, n]\!]\}$.
Autrement dit, les valeurs propres de A sont ses coefficients diagonaux (propriété (Δ_1)) et seulement ses coefficients diagonaux (propriété (Δ_2)).

- On réalise la même démonstration dans le cas où la matrice T est triangulaire inférieure.

$$\boxed{\text{Les matrices triangulaires de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ appartiennent à } \mathcal{D}_n.}$$

Commentaire

- Dans le programme officiel, on peut lire « Valeurs propres d'une matrice triangulaire ». L'énoncé commence donc par une démonstration de cours.
- Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{rg}({}^tM) = \text{rg}(M)$.
  Et, par linéarité de la transposition : ${}^t(M - \lambda I_n) = {}^tM - {}^t(\lambda I_n) = {}^tM - \lambda I_n$.
  En combinant ces deux propriétés, on obtient que :

$$\begin{array}{rcl} M - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible} & \Leftrightarrow & \text{rg}(M - \lambda I_n) < n \\ & \Leftrightarrow & \text{rg}({}^t(M - \lambda I_n)) < n \\ & \Leftrightarrow & \text{rg}({}^tM - \lambda I_n) < n \\ & \Leftrightarrow & {}^tM - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible} \end{array}$$

  Ainsi, pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $\text{Sp}(M) = \text{Sp}({}^tM)$.
  Cette remarque permet d'expliciter la deuxième partie de la démonstration : une matrice triangulaire inférieure a même spectre que sa transposée (qui est triangulaire supérieure).
- Au passage, on peut démontrer que toute matrice M est semblable à sa transposée (un peu technique avec le programme de ECE). Ce qui permet d'affirmer que :

$$M \text{ est diagonalisable } \Leftrightarrow {}^tM \text{ est diagonalisable}$$

  mais on s'écarte du sujet initial.

□

2. Si M est une matrice de $\mathcal{D}_n$, établir que pour tout α réel, la matrice $M + \alpha\, I_n$ est encore un élément de $\mathcal{D}_n$.

Démonstration.
Soit $M \in \mathcal{D}_n$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
Soit $\beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcll} \beta \text{ est valeur propre de } M + \alpha\, I_n & \Leftrightarrow & (M + \alpha\, I_n) - \beta\, I_n = M - (\beta - \alpha)\, I_n \text{ n'est pas inversible} & \\ & \Leftrightarrow & \beta - \alpha \text{ est une valeur propre de } M & \\ & \Leftrightarrow & \beta - \alpha \text{ est un coefficient diagonal de } M & \textit{(car } M \in \mathcal{D}_n\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \text{il existe } i \in [\![1, n]\!] \text{ tel que } \beta - \alpha = m_{i,i} & \\ & \Leftrightarrow & \text{il existe } i \in [\![1, n]\!] \text{ tel que } \beta = m_{i,i} + \alpha & \\ & \Leftrightarrow & \beta \text{ est un coefficient diagonal de } M + \alpha \cdot I_3 & \end{array}$$

Ainsi, les valeurs propres de $M + \alpha\, I_n$ sont exactement ses coefficients diagonaux.

$$\boxed{\text{Si } M \in \mathcal{D}_n \text{ alors } M + \alpha\, I_n \in \mathcal{D}_n.}$$

□

3. On note K_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

a) Montrer que la matrice K_n n'appartient pas à $\mathcal{D}_n$.

Démonstration.

- La matrice K_n n'est pas inversible. En effet :

$$\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \vdots \\ L_n \leftarrow L_n - L_1}}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right) = 1 < n$$

(on rappelle : $n \geqslant 2$)

- Ainsi, 0 est valeur propre de K_n et la propriété (Δ_2) n'est pas vérifiée par K_n.

$$\boxed{\text{On en déduit : } K_n \notin \mathcal{D}_n.}$$

Commentaire

- Ici, on démontre que K_n n'est pas inversible par un calcul de rang. On aurait aussi pu invoquer le fait que K_n possède 2 colonnes (ou 2 lignes) égales (ou simplement colinéaires). Un tel argument sera accepté au concours.
- On pouvait aussi remarquer :

$$K_n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, n $(\neq 1)$ est valeur propre de K_n et n'est pas un coefficient diagonale de K_n.

□

b) L'ensemble $\mathcal{D}_n$ est-il un sous espace-vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

Démonstration.

- Étudions le cas $n = 2$.
  On pose : $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
  - × Comme ces deux matrices sont triangulaires, d'après la question ***1.*** : $A_2 \in \mathcal{D}_2$ et $B_2 \in \mathcal{D}_2$.
  - × Or : $A_2 + B_2 = K_2$. Ainsi, d'après ***3.a)*** : $A_2 + B_2 \notin \mathcal{D}_2$.
    On en déduit que $\mathcal{D}_2$ n'est pas stable par la loi $+$.
    Ainsi $\mathcal{D}_2$ n'est pas un espace vectoriel.
- Généralisons cette propriété au cas où n est quelconque.
  On pose :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

× Comme ces deux matrices sont triangulaires, d'après la question ***1.*** : $A_n \in \mathcal{D}_n$ et $B_n \in \mathcal{D}_n$.

× Or : $A_n + B_n = K_n$. Ainsi, d'après ***3.a)*** : $A_n + B_n \notin \mathcal{D}_n$.

On en déduit que $\mathcal{D}_n$ n'est pas stable par la loi $+$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathcal{D}_n \text{ n'est pas un espace vectoriel.}}$$

Commentaire

Lorsqu'un résultat à démontrer est formulé sous forme d'interrogation (et pas d'affirmation comme c'est le cas en général), on pensera, dans une majorité de cas à répondre par la négative. À titre d'illustration, lorsqu'on recontre les questions :

× « L'ensemble F est-il un sous-espace vectoriel de E ? »

× « Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ? »

× « La v.a.r. X admet une variance ? »

× « La matrice A est-elle diagonalisable ? »

× « La suite (u_n) est-elle majorée ? »

la réponse est, généralement, « non » (à justifier évidemment).

□

4. a) Soit (x, y, z) un élément de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si les nombres x et y sont non nuls.

Démonstration.
La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ est carrée d'ordre 2.
Elle est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Or :

$$\det(M) = \det\left(\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix}\right) = 0 \times z - y \times x = xy$$

$$\boxed{M \text{ est inversible si et seulement si } xy \neq 0 \textit{ i.e. } \text{si } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0.}$$

□

b) En déduire que l'ensemble $\mathcal{D}_2$ ne contient pas d'autre élément que les matrices triangulaires de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Démonstration.
Soit $N = \begin{pmatrix} s & x \\ y & t \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_2$.

- Alors $N - s\, I_2 = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & t-s \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_2$ d'après la question ***2.***.
- Comme $N_2 - s\, I_2 \in \mathcal{D}_2$, en particulier, $N - s\, I_2$ vérifie (Δ_1). On en déduit que 0 est valeur propre de $N - s\, I_2$. D'où $N - s\, I_2$ n'est pas inversible.
- D'après la question précédente, on en déduit que $x = 0$ ou que $y = 0$.

  × Si $x = 0$, alors $N = \begin{pmatrix} s & 0 \\ y & t \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure.

  × Si $y = 0$, alors $N = \begin{pmatrix} s & x \\ 0 & t \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure.

  Dans tous les cas, N est bien triangulaire.

$$\boxed{\text{On en conclut que toute matrice de } \mathcal{D}_2 \text{ est triangulaire.}}$$

□

5. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{D}_3$.

Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Démonstration.
Il s'agit de démontrer que $\mathrm{Sp}(A) = \{3, 2, 4\}$.

- Démontrons que 3 est valeur propre de A.

$$\mathrm{rg}(A - 3\, I_3) \;=\; \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

La réduite possède deux colonnes égales : C_2 et C_3. Elle n'est donc pas inversible.

$$\boxed{\text{3 est valeur propre de } A.}$$

Commentaire

Il faut s'habituer à déterminer les ensembles $E_\lambda(A)$ (ou des vecteurs propres de A associés à la valeur propre λ) par lecture de la matrice $A - \lambda\, I_3$. Ici on a $\lambda = 3$. On cherche donc les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $E_3(A)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que : $(A - 3\, I_3)\, X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$. Or :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= x \cdot C_1 + y \cdot C_2 + z \cdot C_3 \\ &= x \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ à l'aide de cette combinaison linéaire, et qu'on choisit $x = 0$, il suffit de prendre $y = -z$ pour obtenir le vecteur nul.
En prenant (par exemple) $z = 1$, on obtient : $y = -1$.

On obtient ainsi : $E_3(A) \supset \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

- Démontrons que 2 est valeur propre de A.

$$\mathrm{rg}(A - 2\, I_3) \;=\; \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right)$$

La réduite possède deux colonnes égales : C_1 et C_2. Elle n'est donc pas inversible.

$$\boxed{\text{2 est valeur propre de } A.}$$

Commentaire

Comme dans la remarque précédente, on peut déterminer des vecteurs propres de A associés à la valeur propre 2 par lecture de la matrice $A - 2\, I_3$. On cherche donc les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $E_2(A)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que : $(A - 2\, I_3)\, X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$. Or :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= x \cdot C_1 + y \cdot C_2 + z \cdot C_3 \\ &= x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ à l'aide de cette combinaison linéaire, il suffit de prendre (par exemple) : $x = -1$, $y = 1$ et $z = 0$. On obtient ainsi : $E_2(A) \supset \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

- Démontrons que 4 est valeur propre de A.

$$\begin{aligned} \text{rg}(A - 4\, I_3) &= \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

La réduite possède deux lignes proportionnelles : $L_2 = -L_3$. La matrice $A - 4\, I_3$ n'est donc pas inversible.

$$\boxed{\text{4 est bien valeur propre de } A.}$$

Commentaire

Comme dans la remarque précédente, on peut déterminer des vecteurs propres de A associés à la valeur propre 4 par lecture de la matrice $A - 4\, I_3$. On cherche donc les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $E_4(A)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que : $(A - 4\, I_3)\, X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$. Or :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= x \cdot C_1 + y \cdot C_2 + z \cdot C_3 \\ &= x \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ à l'aide de cette combinaison linéaire, il suffit de prendre (par exemple) : $x = 1$, $y = -1$ et $z = 2$. On obtient ainsi : $E_4(A) \supset \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.

- On a démontré : $\{3,2,4\} \subset \mathrm{Sp}(A)$.
  Comme de plus, la matrice A est carrée d'ordre 3, elle ne peut avoir plus de 3 valeurs propres.
  On en déduit : $\mathrm{Sp}(A) = \{3,2,4\}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } A \in \mathcal{D}_3.}$$

- On obtient :
  × A possède 3 valeurs propres **distinctes**,
  × $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est diagonalisable.}}$$

Commentaire

- Les valeurs propres « possibles » de la matrice A peuvent se déduire de l'énoncé. C'est un cas fréquent. Il apparaît notamment lorsque l'on dispose d'un polynôme annulateur P : les racines de P sont les seules valeurs propres « possibles » de A. Cela signifie :

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{\text{racines de } P\}$$

  mais il reste à vérifier quelles racines de P sont vraiment des valeurs propres de A.
- Dans ce cas de figure, au lieu de chercher les valeurs λ pour lesquelles $A - \lambda\, I$ n'est pas inversible, il est préférable de déterminer si $A - \lambda\, I$ est inversible pour les valeurs de λ fournies (3, 2 et 4).
- On rappelle que la recherche des valeurs propres λ de A grâce à l'étude de $\mathrm{rg}(A - \lambda\, I)$ (dans le cas général où $\lambda \in \mathbb{R}$) est à réserver à la résolution d'exercices où l'on ne possède aucune information sur les valeurs propres de A et où l'on demande de déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres associés.
- Dans la question, il n'est pas demandé de déterminer $E_3(A)$, $E_2(A)$ et $E_4(A)$.
  On peut cependant affirmer, après les études effectuées dans les remarques précédentes :

$$E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \qquad E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \qquad E_4(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

  En effet :
  × l'espace propre associé à une valeur propre λ est de dimension 1 au minimum. Comme de plus A est une matrice (carrée) d'ordre 3, la somme des dimensions des espaces propres est d'au plus 3. On en déduit :

$$\dim(E_3(A)) = \dim(E_2(A)) = \dim(E_4(A)) = 1$$

  × Ainsi :

$$E_3(A) \supset \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad \dim\big(E_3(A)\big) = \dim\left(\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right)$$

  D'où : $E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. On raisonne de même pour les autres sous-espaces propres.

□

6. Pour tout t réel, on considère la matrice $M(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1+t \\ 0 & 2 & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t \end{pmatrix}$.

a) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de la matrice $M(t)$ selon la valeur de t.
En déduire les valeurs de t pour lesquelles la matrice $M(t)$ appartient à $\mathcal{D}_3$.

Démonstration.
Soit $t \in \mathbb{R}$.

- Déterminons le spectre de $M(t)$.
  Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} \lambda \text{ valeur propre de } M(t) & \Leftrightarrow & M(t) - \lambda\, I_3 \text{ non inversible} \\ & \Leftrightarrow & \mathrm{rg}\left(M(t) - \lambda\, I_3\right) < 3 \end{array}$$

  Or :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{rg}\left(M(t) - \lambda\, I_3\right) & = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1+t \\ 0 & 2-\lambda & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t-\lambda \end{pmatrix}\right) \\ & \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4+2t-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -1-t \\ 3-\lambda & 1 & 1+t \end{pmatrix}\right) \\ & \overset{L_3 \leftarrow L_3 - (3-\lambda)\, L_1}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4+2t-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -1-t \\ 0 & -2+\lambda & 1+t-(3-\lambda)\,(4+2t-\lambda) \end{pmatrix}\right) \\ & \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4+2t-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -1-t \\ 0 & 0 & -(3-\lambda)\,(4+2t-\lambda) \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

  La réduite obtenue est triangulaire (supérieure).
  Elle est donc inversible si et seulement si l'un de ses coefficients diagonaux est nul. On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{rg}\left(M(t) - \lambda\, I_3\right) & \Leftrightarrow & 2-\lambda = 0 \ \texttt{OU} \ -(3-\lambda)\,(4+2t-\lambda) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \lambda = 2 \ \texttt{OU} \ \lambda = 3 \ \texttt{OU} \ \lambda = 4+2t \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Sp}\left(M(t)\right) = \{2, 3, 4+2\,t\}.}$$

- Or, les coefficients diagonaux de $M(t)$ sont exactement les valeurs 2, 3, $4+2t$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall t \in \mathbb{R},\ M(t) \in \mathcal{D}_3.}$$

Commentaire

- Il est `INTERDIT` de réaliser l'opération $L_3 \leftarrow (3-\lambda)\, L_3$ ou $L_3 \leftarrow (3-\lambda)\, L_3 - L_1$ en début de calcul. En effet, si $\lambda = 3$, réaliser de telles opérations ($L_3 \leftarrow 0$ ou $L_3 \leftarrow -L_1$) reviennent à supprimer l'information contenue dans la ligne L_3.
  De telles opérations ne sont valides qu'à la condition $\lambda \neq 3$. Il faudrait alors rédiger par disjonction de cas ce qui s'avère inutilement compliqué.
- Par contre, l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - (3-\lambda)\, L_1$ est tout à fait légitime. Si $\lambda = 3$, elle consiste simplement à effectuer $L_3 \leftarrow L_3$ et ne provoque donc pas de perte d'information.

$\square$

b) Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la matrice $M(t)$ est diagonalisable.

Démonstration.
On procède par disjonction de cas.

- Si $4+2t \neq 2$ (*i.e.* $t \neq -1$) **et** $4+2t \neq 3$ (*i.e.* $t \neq -\frac{1}{2}$), alors :
  × $M(t)$ admet trois valeurs propres **distinctes**,
  × $M(t) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
  La matrice $M(t)$ est donc diagonalisable.

$$\boxed{\text{Pour tout } t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, \frac{1}{2}\}, \text{ la matrice } M(t) \text{ est diagonalisable.}}$$

- Si $4+2t = 2$ (*i.e.* $t = -1$) **ou** $4+2t = 3$ (*i.e.* $t = -\frac{1}{2}$) :
  (c'est le cas contraire)

× Si $t = -1$: alors $\mathrm{Sp}\big(M(-1)\big) = \{2, 3\}$.

- Déterminons $E_2\big(M(-1)\big) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid \big(M(-1) - 2\, I_3\big)\, X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$.
  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_2\big(M(-1)\big) & \Leftrightarrow & \big(M(-1) - 2\, I_3\big)\, X = 0 \\[2mm]
& \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[2mm]
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & & & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ x & + & y & & & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & & & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -y \end{array} \right.
\end{array}$$

On obtient :

$$\begin{array}{rcl}
E_2(M(-1)) & = & \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -y\} \\[2mm]
& = & \{\begin{pmatrix} -y \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \\[2mm]
& = & \{y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\[2mm]
& = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)
\end{array}$$

La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est donc :

- × génératrice de $E_2\big(M(-1)\big)$,
- × libre, car composée uniquement de deux matrices non proportionnelles.

La famille $\mathcal{F}$ est donc une base $E_2\big(M(-1)\big)$. Ainsi :

$$\dim\Big(E_2\big(M(-1)\big)\Big) \ = \ \mathrm{Card}(\mathcal{F}) \ = \ 2$$

- On note : $E_3\big(M(-1)\big) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid \big(M(-1) - 3\, I_3\big)\, X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$.
Comme 3 est valeur propre de $M(-1)$, on en déduit :

$$\dim\Big(E_3\big(M(-1)\big)\Big) \geqslant 1$$

Et ainsi :

$$\dim\Big(E_2\big(M(-1)\big)\Big) + \dim\Big(E_3\big(M(-1)\big)\Big) \geqslant 3$$

Comme la matrice $M(-1)$ est (carrée) d'ordre 3, on en conclut :

$$\dim\Big(E_2\big(M(-1)\big)\Big) + \dim\Big(E_3\big(M(-1)\big)\Big) = 3$$

$$\boxed{\text{Ainsi } M(-1) \text{ est diagonalisable.}}$$

× Si $t = -\frac{1}{2}$, alors : $\mathrm{Sp}\left(M(-\frac{1}{2})\right) = \{2, 3\}$.

- Déterminons $E_2\big(M(-\frac{1}{2})\big) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid \big(M(-\frac{1}{2}) - 2\, I_3\big)\, X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_2\big(M(-\frac{1}{2})\big) & \Leftrightarrow & (M(-\frac{1}{2}) - 2\, I_3)\, X = 0 \\[2mm]
& \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[2mm]
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & \frac{1}{2}\, z & = & 0 \\ & & & & -\frac{1}{2}\, z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \underset{\substack{L_1 \leftarrow 2\, L_1 \\ L_2 \leftarrow -2\, L_2}}{=} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2\, x & + & 2\, y & + & z & = & 0 \\ & & & & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \underset{L_3 \leftarrow 2\, L_3 - L_1}{=} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2\, x & + & 2\, y & + & z & = & 0 \\ & & & & z & = & 0 \\ & & & & z & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3}}{=} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2\, x & + & 2\, y & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \\ & & z & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

On obtient :

$$X \in E_2\big(M(-\tfrac{1}{2})\big) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & & & = & 0 \\ & & & & z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & -y \\ z & = & 0 \end{array} \right.$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} E_2\Big(M\big(-\tfrac{1}{2}\big)\Big) & = & \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -y \texttt{ ET } z = 0\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\} \ = \ \{y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\} \\ & = & \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

La famille $\mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est donc :

- $\times$ génératrice de $E_2\big(M(-\frac{1}{2})\big)$,
- $\times$ libre, car composée uniquement d'une matrice non nulle.

La famille $\mathcal{F}_2$ est donc une base $E_2\big(M(-\frac{1}{2})\big)$. Ainsi :

$$\dim\Big(E_2\big(M(-\tfrac{1}{2})\big)\Big) \ = \ \operatorname{Card}(\mathcal{F}_2) \ = \ 1$$

- Déterminons $E_3(M(-\frac{1}{2})) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid \big(M(-\frac{1}{2}) - 3\,I_3\big)\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} X \in E_3\big(M(-\tfrac{1}{2})\big) & \Leftrightarrow & \big(M(-\tfrac{1}{2}) - 3\,I_3\big)\,X = 0 \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & y & + & \frac{1}{2}\,z & = & 0 \\ & & -\ y & & -\frac{1}{2}\,z & = & 0 \\ x & + & y & & & = & 0 \end{array} \right. \\ & \underset{L_2 \leftarrow -2\,L_2}{\overset{L_1 \leftarrow 2\,L_1}{=}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & 2\,y & + & z & = & 0 \\ & & 2\,y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & & & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

On obtient :

$$X \in E_3\big(M(-\tfrac{1}{2})\big) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & & & = & 0 \\ & & 2\,y & + & z & = & 0 \\ & & 2\,y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & & & = & 0 \\ & & 2\,y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 0 \\ & & 2\,y & = & -z \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow 2\,L_1 - L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcr} 2\,x & & & = & z \\ & & 2\,y & = & -z \end{array}\right.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} E_3\Big(M\big(-\tfrac{1}{2}\big)\Big) &= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = \tfrac{z}{2} \texttt{ ET } y = -\tfrac{z}{2}\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} \frac{z}{2} \\ -\frac{z}{2} \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\right\} = \left\{z \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{F}_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ est donc :

- × génératrice de $E_3\big(M(-\frac{1}{2})\big)$,
- × libre, car composée uniquement d'une matrice non nulle.

La famille $\mathcal{F}_3$ est donc une base $E_3\big(M(-\frac{1}{2})\big)$. Ainsi :

$$\dim\Big(E_3\big(M(-\tfrac{1}{2})\big)\Big) = \mathrm{Card}(\mathcal{F}_3) = 1$$

On en déduit :

$$\dim\Big(E_2\big(M(-\tfrac{1}{2})\big)\Big) + \dim\Big(E_3\big(M(-\frac{1}{2})\big)\Big) = 2 \neq 3$$

$$\boxed{\text{La matrice } M(-\tfrac{1}{2}) \text{ n'est donc pas diagonalisable.}}$$

□

Partie II. Matrices nilpotentes

Une matrice M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est *nilpotente* si, et seulement si, il existe un entier naturel p non nul tel que la matrice M^p soit la matrice nulle.

7. Soit M une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Montrer que 0 est une valeur propre de M et que c'est la seule valeur propre de M.

Démonstration.

- Raisonnons par l'absurde.
  Supposons que 0 n'est pas valeur propre de M. Alors la matrice M est inversible.
  Or le produit de deux matrices inversibles est inversible. Ainsi, par récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, M^n est inversible.
  Or, comme M est nilpotente, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que : $M^p = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
  Absurde !

  $$\boxed{\text{0 est valeur propre de } M.}$$

- Comme la matrice M est nilpotente, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que : $M^p = 0$.
  On en déduit que le polynôme $Q(X) = X^p$ est un polynôme annulateur de M. Ainsi : $\text{Sp}(M) \subset \{\text{racines de } Q\} = \{0\}$.

  $$\boxed{\text{La seule valeur propre } \underline{\text{possible}} \text{ de } M \text{ est donc } 0.}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \text{Sp}(M) = \{0\}.}$$

Commentaire

- Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possède `TOUJOURS` un polynôme annulateur non nul Q.
  On peut même démontrer (ce n'est pas au programme en ECE) qu'il existe toujours un tel polynôme de degré (au plus) n.
- Si Q est un polynôme annulateur de A alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le polynôme $\alpha\, Q$ est toujours un polynôme annulateur de A puisque :

  $$(\alpha\, Q)(A) \ = \ \alpha\, Q(A) \ = \ 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$

  Cela suffit à démontrer que A possède une infinité de polynômes annulateurs.
  On peut en obtenir d'autres. Par exemple $R(X) = (X-5)\, Q(X)$ est un polynôme annulateur de A puisque :

  $$R(A) \ = \ (A - 5\, I)\, Q(A) \ = \ 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$

  Il faut donc parler `D'UN` polynôme annulateur d'une matrice.
- Les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas forcément toutes valeurs propres de A. Si c'était le cas, A aurait une infinité de valeurs propres (elle en possède au plus n). Par exemple, comme $R(X) = (X-5)\, Q(X)$ est un polynôme annulateur, un tel raisonnement permettrait de démontrer que 5 est aussi valeur propre.

□

8. Soit M une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On va prouver par l'absurde que M^3 est la matrice nulle.
Pour cela, on suppose que M^3 n'est pas la matrice nulle.
Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice M dans la base $\mathcal{B}$.

a) Montrer les inclusions $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2)$ et $\text{Ker}(u^2) \subset \text{Ker}(u^3)$.

Démonstration.

- Démontrons : $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2)$.

  Soit $x \in \text{Ker}(u)$.
  Alors : $u(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$. On en déduit :

  $$u^2(x) \;=\; u\big(u(x)\big) \;=\; u(0_{\mathbb{R}^3}) \;=\; 0_{\mathbb{R}^3}$$

  (où la dernière égalité est obtenue par linéarité de u).
  D'où : $x \in \text{Ker}(u^2)$.

  $$\boxed{\text{Ainsi : Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2)}$$

- Démontrons que $\text{Ker}(u^2) \subset \text{Ker}(u^3)$.

  Soit $x \in \text{Ker}(u^2)$.
  Alors : $u^2(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$. On en déduit :

  $$u^3(x) \;=\; u(u^2(x)) \;=\; u(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

  D'où $x \in \text{Ker}(u^3)$.

  $$\boxed{\text{Ainsi : Ker}(u^2) \subset \text{Ker}(u^3)}$$

Commentaire

- Insistons sur la facilité de cette démonstration. Il s'agit essentiellement de mettre en place la structure de démonstration et de dérouler les définitions.
- Précisons la manière d'agir.

1 `Soit` $x \in \text{Ker}()$`.`
2 `Alors` $u(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$`. On en déduit :`
3 $\qquad u^2(x) = \dots$
4 $\qquad\qquad = \dots$
5 $\qquad\qquad = 0_{\mathbb{R}^3}$
6 `Ainsi,` $x \in \text{Ker}(u^2)$`.`

  × Les lignes 1 et 6 correspondent à la mise en place de la structure de démonstration : il s'agit de démontrer une inclusion. On choisit donc un élément dans $\text{Ker}(u)$ et on démontre qu'il est dans $\text{Ker}(u^2)$.

  × La ligne 2 correspond au déroulé de la définition du noyau d'une application.
  Dire : $x \in \text{Ker}(f)$ c'est exactement dire : $u(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

  × La ligne 3 correspond aussi au déroulé de la définition du noyau d'une application linéaire. Dire : $x \in \text{Ker}(u^2)$ c'est exactement dire : $u^2(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Cela permet d'écrire le début de la ligne 3 ainsi que le résultat en ligne 5.

  C'est seulement à ce moment que l'on rentre dans la phase de démonstration à proprement parler et que l'on s'intéresse aux hypothèses (ici, le fait que u est linéaire).

- Le message est clair : sur les 6 lignes de rédaction, 4 proviennent de la présentation et seules 2 correspondent à la démonstration. Il n'est donc pas acceptable de ne pas savoir **commencer** ce type de questions, car cela démontre un défaut de connaissance du cours (définitions du chapitre et / ou structures de démonstration).

□

b) Montrer que les noyaux $\mathrm{Ker}(u^2)$ et $\mathrm{Ker}(u^3)$ ne peuvent pas être égaux. Pour cela, montrer que dans le cas contraire, le noyau de u^2 est égal à celui de u^i pour tout entier i supérieur ou égal à 2, et en tirer une contradiction.

Démonstration.
Raisonnons par l'absurde.
Supposons : $\mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Ker}(u^3)$.

- Démontrons par récurrence : $\forall i \geqslant 2,\ \mathcal{P}(i)$ où $\mathcal{P}(i) : \mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Ker}(u^i)$.
  - **Initialisation** :
    $\mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Ker}(u^2)$.
    D'où $\mathcal{P}(2)$.
  - **Hérédité** : soit $i \geqslant 2$.
    Supposons $\mathcal{P}(i)$ et démontrons $\mathcal{P}(i+1)$ (*i.e.* $\mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Ker}(u^{i+1})$).
    Procédons par double inclusion.

  ($\subset$) Démontrons : $\mathrm{Ker}(u^2) \subset \mathrm{Ker}(u^{i+1})$.
  Par hypothèse de récurrence, $\mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Ker}(u^i)$.
  Avec le même raisonnement qu'en question précédente, on a de plus : $\mathrm{Ker}(u^i) \subset \mathrm{Ker}(u^{i+1})$.

  ($\supset$) Démontrons que $\mathrm{Ker}(u^{i+1}) \subset \mathrm{Ker}(u^2)$.
  Par hypothèse de récurrence, $\mathrm{Ker}(u^i) = \mathrm{Ker}(u^2)$.
  Il suffit alors de démontrer : $\mathrm{Ker}(u^{i+1}) \subset \mathrm{Ker}(u^i)$.
  Soit $x \in \mathrm{Ker}(u^{i+1})$.

$$\begin{array}{lcl}
\text{Alors} & u^{i+1}(x) = 0 & \\
\text{donc} & u^3(u^{i-2}(x)) = 0 & \\
\text{d'où} & u^{i-2}(x) \in \mathrm{Ker}(u^3) & \\
\text{ainsi} & u^2(u^{i-2}(x)) = 0 & \textit{(car } \mathrm{Ker}(u^3) = \mathrm{Ker}(u^2)\textit{)} \\
\text{et enfin} & u^i(x) = 0 &
\end{array}$$

  On en déduit : $x \in \mathrm{Ker}(u^i)$.
  Ainsi $\mathrm{Ker}(u^{i+1}) \subset \mathrm{Ker}(u^i) = \mathrm{Ker}(u^2)$.

  D'où $\mathcal{P}(i+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall i \geqslant 2,\ \mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Ker}(u^i).}$$

- Par hypothèse, M est nilpotente. Il existe donc $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
  On en déduit : $u^p = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$, c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ u^p(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Ainsi : $\mathrm{Ker}(u^p) = \mathbb{R}^3$.
  Deux cas se présentent alors :
  × si $p = 1$ alors : $\mathrm{Ker}(u) = \mathbb{R}^3$.
    Autrement dit : $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ u(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$. On en déduit que u est l'endomorphisme nul, c'est-à-dire : $u = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$.
    Par isomorphisme de représentation : $M = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Et donc : $M^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
    Absurde !

× Si $p \geq 1$ alors, d'après le point précédent : $\text{Ker}(u^2) = \text{Ker}(u^p) = \mathbb{R}^3$.
Comme $\text{Ker}(u^2) = \text{Ker}(u^3)$, on en déduit : $\text{Ker}(u^3) = \mathbb{R}^3$.
Ainsi : $u^3 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$. Et donc, par isomorphisme de représentation : $M^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
Absurde !

$$\boxed{\text{On en déduit : } \text{Ker}(u^2) \neq \text{Ker}(u^3).}$$

Commentaire

De manière générale, si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ alors : $\text{Ker}(u) = E \;\Leftrightarrow\; u = 0_{\mathscr{L}(E)}$. En effet :

$$\text{Ker}(u) = E \quad\Leftrightarrow\quad \forall x \in E,\ u(x) = 0_E \quad\Leftrightarrow\quad u = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

□

c) Montrer que les noyaux $\text{Ker}(u)$ et $\text{Ker}(u^2)$ ne peuvent pas être égaux non plus.

Démonstration.
Raisonnons par l'absurde.
Supposons : $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$.

- Alors, par une récurrence similaire à celle de la question précédente : $\forall i \geqslant 1,\ \text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^i)$.
  En particulier : $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^p)$.
- Or : $M^p = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. D'où : $u^p = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$. Et donc : $\text{Ker}(u^p) = \mathbb{R}^3$.
  D'après le point précédent, on en déduit : $\text{Ker}(u) = \mathbb{R}^3$. D'où : $u = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$.
  Ainsi $M = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ et donc $M^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

Absurde !

$$\boxed{\text{On en déduit : } \text{Ker}(u) \neq \text{Ker}(u^2).}$$

□

d) Conclure en considérant la dimension des noyaux mentionnés ci-dessus.

Démonstration.

- D'après les questions précédentes : $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2) \subset \text{Ker}(u^3)$ et ces inclusions sont strictes.
  On en déduit que :
  $$\dim(\text{Ker}(u)) \;<\; \dim(\text{Ker}(u^2)) \;<\; \dim(\text{Ker}(u^3)) \qquad (*)$$
- Démontrons : $\text{Ker}(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
  Raisonnons par l'absurde.
  Supposons : $\text{Ker}(u) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
  × Alors u est injectif. Or u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, espace vectoriel de **dimension finie**.
  Il est donc bijectif. Ainsi M est inversible.
  × De plus, M est nilpotente. Ainsi, d'après la question ***1.***, 0 est valeur propre de M.
  La matrice M n'est donc pas inversible.

  Absurde !
- On en déduit : $\dim(\text{Ker}(u)) \geqslant 1$. Comme de plus : $\text{Ker}(u^3) \subset \mathbb{R}^3$, on obtient d'après $(*)$:
  $$1 \;\leqslant\; \dim(\text{Ker}(u)) \;<\; \dim(\text{Ker}(u^2)) \;<\; \dim(\text{Ker}(u^3)) \;\leqslant\; 3$$
  D'où :
  $$\dim(\text{Ker}(u)) = 1, \quad \dim(\text{Ker}(u^2)) = 2 \quad \text{et} \quad \dim(\text{Ker}(u^3)) = 3$$

- On obtient :
  $\times$ $\ker(u^3) \subset \mathbb{R}^3$
  $\times$ $\dim\big(\ker(u^3)\big) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$
  On en déduit : $\ker(u^3) = \mathbb{R}^3$. D'où : $u^3 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } M^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}.}$$

□

9. Soit (a,b,c,d,e,f) un élément de $\mathbb{R}^6$. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

On définit les réels $\gamma(M) = ac + df + be$ et $\delta(M) = bcf + ade$.

a) Établir l'égalité $M^3 = \gamma(M)M + \delta(M)I_3$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac+be & bf & ad \\ de & ac+df & bc \\ cf & ae & be+df \end{pmatrix}$$

- Enfin :
  $\times$ d'une part :

$$\begin{aligned} M^3 &= M \times M^2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ac+be & bf & ad \\ de & ac+df & bc \\ cf & ae & be+df \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ade+bcf & a^2c+adf+abe & abc+b^2e+bdf \\ ac^2+bce+cdf & bcf+ade & acd+bde+d^2f \\ ace+be^2+def & bef+acf+df^2 & ade+bcf \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  $\times$ d'autre part :

$$\begin{aligned} & \gamma(M)\ M + \delta(M)\ I_3 \\ = \ & (ac+be+df) \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix} + (ade+bcf)\, I_3 \\ = \ & \begin{pmatrix} 0 & a^2c+adf+abe & abc+b^2e+bdf \\ ac^2+bce+cdf & 0 & acd+bde+d^2f \\ ace+be^2+def & bef+acf+df^2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ade+bcf & 0 & 0 \\ 0 & ade+bcf & 0 \\ 0 & 0 & ade+bcf \end{pmatrix} \\ = \ & \begin{pmatrix} ade+bcf & a^2c+adf+abe & abc+b^2e+bdf \\ ac^2+bce+cdf & bcf+ade & acd+bde+d^2f \\ ace+be^2+def & bef+acf+df^2 & ade+bcf \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{M^3 = \gamma(M)\ M + \delta(M)\ I_3}$$

□

b) Montrer que la matrice M est nilpotente si et seulement si $\gamma(M)$ et $\delta(M)$ sont nuls.

Démonstration.
On raisonne par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons M nilpotente.
Alors, d'après la question ***8.b)*** : $M^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
Ainsi, d'après la question précédente :

$$\gamma(M)\ M + \delta(M)\ I_3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$

Or la famille (I_3, M) est composée uniquement de deux matrices non proportionnelles. C'est donc une famille libre de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Ainsi, la seule relation de dépendance linéaire pouvant lier ces vecteurs est la relation triviale. D'où : $\delta(M) = \gamma(M) = 0$.

($\Leftarrow$) Supposons $\delta(M) = \gamma(M) = 0$.
Alors, d'après la question précédente : $M^3 = \gamma(M)\ M + \delta(M)\ I_3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
Ainsi, M est nilpotente.

$$\boxed{M \text{ est nilpotente } \Leftrightarrow \delta(M) = \gamma(M) = 0}$$

□

c) On suppose que a, b et d sont égaux à 1.
Justifier qu'il existe une infinité de choix pour le triplet (c, e, f) de $\mathbb{R}^3$ pour lesquels la matrice M est nilpotente.

Démonstration.
D'après la question précédente :

$$M \text{ nilpotente} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} e+c+f &=& 0 \\ e+cf &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} c+f &=& -e \\ cf &=& -e \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} c+f &=& cf \\ cf &=& -e \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} c\,(1-f)+f &=& 0 \\ e &=& -fc \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} c\,(1-f) &=& -f \\ e &=& -fc \end{array}\right.$$

Deux cas se présentent alors.

- Si $f \neq 1$, alors :

$$M \text{ nilpotente} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} c &=& -\dfrac{f}{1-f} \\ e &=& -\dfrac{f^2}{1-f} \end{array}\right.$$

- Si $f = 1$, alors le système initial se réécrit : $\left\{\begin{array}{rcl} e+c &=& -1 \\ e+c &=& 0 \end{array}\right.$.
Ce système n'ayant pas de solution, M n'est pas nilpotente dans ce cas.

Ainsi, M est nilpotente si et seulement si $(c,e,f) \in \mathcal{S}$ où :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{(c,e,f) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\setminus\{1\}) \mid c = -\frac{f}{1-f} \ \texttt{ET} \ e = -\frac{f^2}{1-f}\} \\ &= \{(-\frac{f}{1-f}, -\frac{f^2}{1-f}, f) \mid f \in \mathbb{R}\setminus\{1\}\} \end{aligned}$$

$\mathcal{S}$ contient autant de triplets que de valeurs possibles pour f, c'est-à-dire autant que de réels différents de 1.

Il existe une infinité de choix pour le triplet (c,e,f) de $\mathbb{R}^3$ pour lesquels la matrice M est nilpotente.

□

d) En déduire que l'ensemble $\mathcal{D}_3$ contient une infinité de matrices nilpotentes qui ne sont pas triangulaires.

Démonstration.
Soit $f \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

- D'après la question précédente, la matrice $M_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\frac{f}{1-f} & 0 & 1 \\ -\frac{f^2}{1-f} & f & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente.

  Or, d'après la question ***7.***, sa seule valeur propre est 0. On en déduit : $M_f \in \mathcal{D}_3$.
- Supposons de plus : $f \neq 0$. Alors la matrice M_f n'est pas triangulaire.

Ainsi : $\{M_f \mid f \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}\} \subset \mathcal{D}_3$.

$\mathcal{D}_3$ contient une infinité de matrices nilpotentes qui ne sont pas triangulaires.

□

e) Exhiber une matrice de $\mathcal{D}_3$ dont tous les coefficients sont non nuls.

Démonstration.
Soit $f \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

- D'après la question précédente : $M_f \in \mathcal{D}_3$.
- Ainsi, d'après la question ***2.*** : $M_f + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{f}{1-f} & 1 & 1 \\ -\frac{f^2}{1-f} & f & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_3$.

  Toute matrice $M_f + I_3$ (avec $f \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$) satisfait les contraintes de l'énoncé.

Pour $f = 2$ (par exemple), on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_3$.

□

Problème (EML 2018 voie S)

On définit la fonction I d'une variable réelle x par : $I(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{xt} + \mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}\ dt$.

Partie I : Une inégalité de Taylor-Lagrange

1. Soit $u \in [0, +\infty[$. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[0, +\infty[$, on a :

$$f(u) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\ u^k + \int_0^u \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}\ (u-y)^n\ dy$$

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$
où $\quad \mathcal{P}(n)$: pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[0, +\infty[$:

$$f(u) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\ u^k + \int_0^u \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}\ (u-y)^n\ dy$$

- **Initialisation** :
Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\ u^k + \int_0^u \frac{f^{(1)}(y)}{0!}\ (u-y)^0\ dy \ &= \ \frac{f^{(0)}(0)}{0!}\ u^0 + \int_0^u f'(y)\ dy \\ &= \ f(0) + [\ f(y)\ ]_0^u \\ &= \ \cancel{f(0)} + \big(f(u) - \cancel{f(0)}\big) \\ &= \ f(u)\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(0)$.

- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* , pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur $[0, +\infty[$:

$$f(u) \ = \ \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\ u^k + \int_0^u \frac{f^{(n+2)}(y)}{(n+1)!}\ (u-y)^{n+1}\ dy$$

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur $[0, +\infty[$.
En particulier, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[0, +\infty[$. Ainsi, par hypothèse de récurrence :

$$f(u) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\ u^k + \int_0^u \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}\ (u-y)^n\ dy$$

On effectue alors une intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rclrcl} v(y) & = & f^{(n+1)}(y) & v'(y) & = & f^{(n+2)}(y) \\ w'(y) & = & \dfrac{1}{n!}\ (u-y)^n & w(y) & = & -\dfrac{1}{n!} \times \left(-\dfrac{1}{n+1}\right)\ (u-y)^{n+1} \ = \ -\dfrac{1}{(n+1)!}\ (u-y)^{n+1} \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions v et w sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, u]$ (car f est de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur $[0, +\infty[$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
&\int_0^u \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}\ (u-y)^n\ dy \\
= &\ \left[\ f^{(n+1)}(y) \times \left(-\frac{1}{(n+1)!}\ (u-y)^{n+1} \right) \right]_0^u - \int_0^u f^{(n+2)}(y) \times \left(-\frac{1}{(n+1)!}\ (u-y)^{n+1} \right)\ dy \\
= &\ 0 + \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}\ u^{n+1} + \int_0^u \frac{f^{(n+2)}(y)}{(n+1)!}\ (u-y)^{n+1}\ dy
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
f(u) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\ u^k + \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}\ u^{n+1} + \int_0^u \frac{f^{(n+2)}(y)}{(n+1)!}\ (u-y)^{n+1}\ dy \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\ u^k + \int_0^u \frac{f^{(n+2)}(y)}{(n+1)!}\ (u-y)^{n+1}\ dy
\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[0, +\infty[$:

$$f(u) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\ u^k + \int_0^u \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}\ (u-y)^n\ dy.$$

□

2. Soit $u \in [0, +\infty[$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[0, +\infty[$. En déduire :

$$\left| f(u) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\ u^k \right| \leqslant \frac{u^{n+1}}{(n+1)!}\ M$$

où $M = \max\limits_{y \in [0,u]} \left(\left| f^{(n+1)}(y) \right| \right)$.

Cette inégalité est appelée **inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre** n **de la fonction** f.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\left| f(u) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\ u^k \right| = \left| \int_0^u \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}\ (u-y)^n\ dy \right|$$

  Or, par inégalité triangulaire :

$$\left| \int_0^u \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}\ (u-y)^n\ dy \right| \leqslant \int_0^u \left| \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}\ (u-y)^n \right| dy$$

- De plus, soit $y \in [0, u]$:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}\ (u-y)^n \right| &= \frac{\left| f^{(n+1)}(y) \right|}{|n!|} \times \left| (u-y)^n \right| \\
&= \frac{\left| f^{(n+1)}(y) \right|}{n!}\ (u-y)^n && \textit{(car } y \leqslant u\textit{)} \\
&\leqslant \frac{M}{n!}\ (u-y)^n && \textit{(par définition de } M\textit{)}
\end{aligned}$$

- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant u$) :

$$\int_0^u \left| \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!} \ (u-y)^n \right| \ dy \ \leqslant \ \int_0^u \frac{M}{n!} \ (u-y)^n \ dy$$

Or :

$$\begin{aligned} \int_0^u \frac{M}{n!} \ (u-y)^n \ dy &= \frac{M}{n!} \int_0^u (u-y)^n \ dy \\ &= \frac{M}{n!} \left[-\frac{1}{n+1} \ (u-y)^{n+1} \right]_0^u \\ &= \frac{M}{n!} \times \frac{u^{n+1}}{n+1} \ = \ \frac{u^{n+1}}{(n+1)!} \ M \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, par transitivité : } \left| f(u) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \ u^k \right| \ \leqslant \ \frac{u^{n+1}}{(n+1)!} \ M.}$$

□

Partie II : Une autre expression de $I(x)$

3. Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} \ dt$ converge.

On note alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $W_k = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} \ dt$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

- La fonction $t \mapsto \dfrac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $[0,1[$ en tant que quotient $\dfrac{h_1}{h_2}$ de
  × $h_1 : t \mapsto t^k$ qui est continue sur $[0,1[$ en tant que fonction polynomiale,
  × $h_2 : t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ qui :
    – est continue sur $[0,1[$,
    – `NE S'ANNULE PAS` sur $[0,1[$.

  L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} \ dt$ est donc impropre seulement en 1.
- Soit $B \in [0,1[$.
  On effectue le changement de variable $\boxed{x = 1-t}$.

  $x = 1-t$ (et donc $t = 1-x$)
  $\hookrightarrow dx = -dt$
  - $t = 0 \ \Rightarrow \ u = 1$
  - $t = B \ \Rightarrow \ u = 1-B$

  Ce changement de variable est valide car $\varphi : x \mapsto 1-x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1-B, 1]$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned}\int_0^B \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\, dt &= \int_1^{1-B} \frac{(1-x)^k}{\sqrt{1-(1-x)^2}} (-\ dx) \\ &= \int_{1-B}^1 \frac{(1-x)^k}{\sqrt{\cancel{1}-(\cancel{1}-2x+x^2)}}\, dx \\ &= \int_{1-B}^1 \frac{(1-x)^k}{\sqrt{2x-x^2}}\, dx\end{aligned}$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$ est donc convergente si et seulement si $\displaystyle\int_{1-B}^1 \frac{(1-x)^k}{\sqrt{2x-x^2}}\, dx$ admet une limite quand B tend vers 1, *i.e.* si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^k}{\sqrt{2x-x^2}}\, dx$ impropre en 0 est convergente.

- Or, pour tout $x \in \,]0,1]$:

$$\frac{(1-x)^k}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{(1-x)^k}{\sqrt{2x\left(1-\frac{x}{2}\right)}} = \frac{(1-x)^k}{\sqrt{2x}\,\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$$

De plus :

× $(1-x)^k \underset{x\to 0}{\sim} 1$

× $\sqrt{2x}\,\sqrt{1-\dfrac{x}{2}} \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{2x} \times 1$

On obtient :

× $\dfrac{(1-x)^k}{\sqrt{2x-x^2}} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2x}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

× $\forall x \in \,]0,1],\ \dfrac{1}{\sqrt{2x}} \geqslant 0$

× l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ est une intégrale de Riemann, d'exposant $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2} < 1$). Elle est donc convergente, et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^k}{\sqrt{2x-x^2}}\, dx$ aussi.

Par critère d'équivalence d'intégrales généralisée de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^k}{\sqrt{2x-x^2}}\, dx$ est convergente.

$$\boxed{\text{On en déduit que, pour tout } k \in \mathbb{N}, \text{ l'intégrale } \int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \text{ est convergente.}}$$

Commentaire

- Le programme officiel précise que « les changements de variables non affines ne seront pratiqués qu'avec des intégrales sur un segment ». Il est donc autorisé, **sous réserve de convergence**, d'effectuer un changement de variable affine sur une intégrale généralisée.
- Dans cette question, l'objectif est justement de démontrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$. On ne peut donc pas effectuer le changement de variable affine proposé directement. On choisit dans le corrigé ci-dessus de se placer sur un segment pour poursuivre le calcul. On pouvait également procéder de la façon suivante :

1) On démontre la continuité de $t \mapsto \dfrac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}$ sur $[0,1[$.

2) **Sous réserve de convergence**, on effectue le changement de variable $\boxed{x = 1-t}$.

3) On démontre ensuite la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^k}{\sqrt{2x+x^2}}\,dx$ par critère d'équivalence.

4) Ceci permet de lever la réserve de convergence posée dans le point précédent, rendant le changement de variable affine valide et démontrant la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$. $\square$

4. a) Soit $k \in \mathbb{N}$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer : $W_k - W_{k+2} = \dfrac{1}{k+1} W_{k+2}$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$W_{k+2} = \int_0^1 \frac{t^{k+2}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_0^1 t^{k+1} \times \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

- Soit $B \in [0,1[$.
  On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & t^{k+1} & & u'(t) & = & (k+1)\,t^k \\ v'(t) & = & \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}} & & v(t) & = & -\sqrt{1-t^2} \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,B]$.
On obtient alors :

$$\begin{aligned} \int_0^B \frac{t^{k+2}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt &= \Big[\, t^{k+1} \times \big(-\sqrt{1-t^2}\big) \,\Big]_0^B - \int_0^B (k+1)\,t^k \times \big(-\sqrt{1-t^2}\big)\,dt \\ &= -B^{k+1}\sqrt{1-B^2} + 0 + (k+1) \int_0^B t^k \sqrt{1-t^2}\,dt \end{aligned}$$

Or, pour tout $t \in [0,B]$:

$$t^k\sqrt{1-t^2} = t^k\sqrt{1-t^2} \times \frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{t^k\,(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{t^{k+2}}{\sqrt{1-t^2}}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_0^B \frac{t^{k+2}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt &= -B^{k+1}\sqrt{1-B^2} + (k+1)\int_0^B \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{t^{k+2}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \\ &= -B^{k+1}\sqrt{1-B^2} + (k+1)\left(\int_0^B \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\, dt - \int_0^B \frac{t^{k+2}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt\right)\end{aligned}$$

Or :

× $\lim\limits_{B\to 1} B^{k+1}\sqrt{1-B^2} = 0$

× les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{k+2}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$ sont convergentes d'après ***3.***.

On obtient :

$$\underbrace{\int_0^1 \frac{t^{k+2}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt}_{= W_{k+2}} = 0 + \underbrace{(k+1)\left(\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\, dt - \int_0^1 \frac{t^{k+2}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt\right)}_{= (k+1)(W_k - W_{k+2})}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } W_k - W_{k+2} = \frac{1}{k+1}\, W_{k+2}.}$$

□

b) On admet : $W_0 = \frac{\pi}{2}$. Montrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $W_{2k} = \dfrac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\,\dfrac{\pi}{2}$.

Démonstration.

- Soit $k \in \mathbb{N}$. Tout d'abord, d'après la question précédente :

$$W_k - W_{k+2} = \frac{1}{k+1}\, W_{k+2}$$

$$\text{donc} \qquad W_k = \left(1 + \frac{1}{k+1}\right) W_{k+2} = \frac{k+2}{k+1}\, W_{k+2}$$

$$\text{ainsi} \qquad \frac{k+1}{k+2}\, W_k = W_{k+2}$$

- Démontrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(k)$ où $\mathcal{P}(k)$: $W_{2k} = \dfrac{(2k)!}{2^{2k}\,(k!)^2}\,\dfrac{\pi}{2}$.

  ▸ **Initialisation** :
  - D'une part, d'après l'énoncé : $W_0 = \frac{\pi}{2}$.
  - D'autre part : $\dfrac{(2\times 0)!}{2^{2\times 0}\,(0!)^2} \times \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$.

  D'où $\mathcal{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(k)$ et démontrons $\mathcal{P}(k+1)$ (*i.e.* $W_{2(k+1)} = \dfrac{\big(2(k+1)\big)!}{2^{2(k+1)}\ \big((k+1)!\big)^2}\ \dfrac{\pi}{2}$).

- D'une part :

$$\begin{array}{rcll} W_{2(k+1)} & = & W_{2k+2} & \\ & = & \dfrac{2k+1}{2k+2}\ W_{2k} & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & \dfrac{2k+1}{2k+2} \times \dfrac{(2k)!}{2^{2k}\ (k!)^2}\ \dfrac{\pi}{2} & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \end{array}$$

- D'autre part :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\big(2(k+1)\big)!}{2^{2(k+1)}\ \big((k+1)!\big)^2}\ \dfrac{\pi}{2} & = & \dfrac{(2k+2)!}{2^{2k+2}\ \big((k+1)!\big)^2}\ \dfrac{\pi}{2} \\ & = & \dfrac{(2k+2)\,(2k+1)\,(2k)!}{2^2 \times 2^k\ \big((k+1)\,k!\big)^2}\ \dfrac{\pi}{2} \\ & = & \dfrac{\cancel{2}\ \cancel{(k+1)}\,(2k+1)}{2^{\cancel{2}}\ (k+1)^{\cancel{2}}} \times \dfrac{(2k)!}{2^{2k}\,(k!)^2}\ \dfrac{\pi}{2} \\ & = & \dfrac{2k+1}{2k+2} \times \dfrac{(2k)!}{2^{2k}\ (k!)^2}\ \dfrac{\pi}{2} \end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(k+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall k \in \mathbb{N},\ W_k = \dfrac{(2k)!}{2^{2k}\ (k!)^2}\ \dfrac{\pi}{2}.}$$

□

5. a) Montrer que la fonction I est définie sur $\mathbb{R}$ et préciser sa parité.

Démonstration.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  - La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{xt} + e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $[0,1[$ en tant que quotient $\dfrac{h_1}{h_2}$ de :
    × $h_1 : t \mapsto e^{xt} + e^{-xt}$ qui est continue sur $[0,1[$ en tant que somme de fonctions continues sur $[0,1[$,
    × $h_2 : t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ qui :
      – est continue sur $[0,1[$,
      – `NE S'ANNULE PAS` sur $[0,1[$.

  L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{xt} + e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}\ dt$ est donc impropre seulement en 1.

- De plus :
  $\times$ $\dfrac{e^{xt}+e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}} \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{\sqrt{1-t^2}} = (e^{x}+e^{-x})\ \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
  $\times$ $\forall t \in [0,1[,\ \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{\sqrt{1-t^2}} \geqslant 0$
  $\times$ l'intégrale $W_0 = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ est convergente d'après ***3.*** et ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (e^{x}+e^{-x})\ \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ aussi.

  Par critère d'équivalence d'intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{e^{xt}+e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ est convergente.
  Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $I(x)$ est convergente.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } I \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $-x \in \mathbb{R}$, donc $I(-x)$ est bien définie. De plus :

$$I(-x) \ = \ \int_0^1 \frac{e^{(-x)t}+e^{-(-x)t}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \ = \ \int_0^1 \frac{e^{-xt}+e^{xt}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \ = \ I(x)$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } I \text{ est paire.}}$$

□

b) Donner la valeur de $I(0)$.

Démonstration.
Par définition de I :

$$I(0) \ = \ \int_0^1 \frac{e^{0}+e^{0}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \ = \ 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \ = \ 2\,W_0 \ = \ 2\times\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\text{D'où : } I(0) = \pi.}$$

□

6. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

a) Soient $t \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$.

(i) On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f : y \mapsto e^{y}+e^{-y}$.
Démontrer : $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)} : y \mapsto e^{y} + (-1)^k\ e^{-y}$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(k)$ où $\mathcal{P}(k)$: $f^{(k)} : y \mapsto e^{y} + (-1)^k\, e^{-y}$.

▸ **Initialisation**
- D'une part : $f^{(0)} = f$. Donc : $\forall y \in \mathbb{R}$, $f^{(0)}(y) = e^{y}+e^{-y}$.
- D'autre part : $\forall y \in \mathbb{R}$, $e^{y} + (-1)^0\, e^{-y} = e^{y}+e^{-y}$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(k)$ et démontrons $\mathcal{P}(k+1)$ (*i.e.* $f^{(k+1)} : y \mapsto e^{y} + (-1)^{k+1}\, e^{-y}$).
- La fonction f est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $\mathbb{R}$.

- Par hypothèse de récurrence : $f^{(k)} : y \mapsto \mathrm{e}^{y} + (-1)^{k}\,\mathrm{e}^{-y}$.
  Ainsi, soit $y \in \mathbb{R}$:

$$f^{(k+1)}(y) \;=\; \left(f^{(k)}\right)'(y) \;=\; \mathrm{e}^{y} + (-1)^{k} \times (-\mathrm{e}^{-y}) \;=\; \mathrm{e}^{y} + (-1)^{k+1}\,\mathrm{e}^{-y}$$

D'où $\mathcal{P}(k+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)} : y \mapsto \mathrm{e}^{y} + (-1)^{k}\,\mathrm{e}^{-y}.}$$

□

(ii) Soit $u \in [0, +\infty[$. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange (**Partie I**) à l'ordre $2n$ appliquée à la fonction $f : y \mapsto \mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{-y}$, montrer :

$$\left| \mathrm{e}^{u} + \mathrm{e}^{-u} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(2k)!}\, u^{2k} \right| \leqslant \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}\, (\mathrm{e}^{u} - \mathrm{e}^{-u})$$

<u>Indication</u> : on pensera à découper la somme obtenue en appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange en deux sommes : l'une ne comportant que les termes d'indice pair, l'autre ne comportant que les termes d'indice impair.

Démonstration.

- La fonction f est de classe $\mathcal{C}^{2n+1}$ sur $\mathbb{R}$. On peut donc appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $2n$ à f. On obtient :

$$\left| f(u) - \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, u^{k} \right| \leqslant \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}\, M$$

  où : $M = \max\limits_{y \in [0,u]} \left(\left| f^{(2n+1)}(y) \right| \right)$.

- Simplifions la somme $\sum\limits_{k=0}^{2n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}\, u^{k}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, u^{k} &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{\mathrm{e}^{0} + (-1)^{k}\,\mathrm{e}^{0}}{k!}\, u^{k} && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= \sum_{k=0}^{2n} \frac{1 + (-1)^{k}}{k!}\, u^{k} \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{1 + (-1)^{k}}{k!}\, u^{k} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \frac{1 + (-1)^{k}}{k!}\, u^{k} \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{1+1}{k!}\, u^{k} + \cancel{\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \frac{1-1}{k!}\, u^{k}} \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{2}{k!}\, u^{k} \\
&= \sum_{p=0}^{n} \frac{2}{(2p)!}\, u^{2p}
\end{aligned}$$

- Déterminons $M = \max\limits_{y\in[0,u]} \left(\left|f^{(2n+1)}(y)\right|\right)$.
  D'après ***6.a)(i)***, pour tout $y \in \mathbb{R}$:
  $$f^{(2n+1)}(y) \ = \ e^{y} + (-1)^{2n+1}\, e^{-y} \ = \ e^{y} - e^{-y}$$
  La fonction $f^{(2n+1)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $y \in \mathbb{R}$:
  $$\left(f^{(2n+1)}\right)'(y) \ = \ e^{y} + e^{-y} \ > \ 0$$
  On en déduit que la fonction $f^{(2n+1)}$ est (strictement) croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi, soit $y \in \mathbb{R}$:
  $$\underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{f^{(2n+1)}(0)} \ \leqslant \ f^{(2n+1)}(y) \ \leqslant \ f^{(2n+1)}(u)$$
  On en déduit :
  $$0 \ \leqslant \ \left|f^{(2n+1)}(y)\right| \ \leqslant \ \left|f^{(2n+1)}(u)\right|$$
  D'où :
  $$\begin{aligned} M \ &= \ \max_{y\in[0,u]} \left(\left|f^{(2n+1)}(y)\right|\right) \\ &= \ \left|f^{(2n+1)}(u)\right| \\ &= \ e^{u} - e^{-u} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \left|e^{u} + e^{-u} - \sum_{p=0}^{n} \frac{2}{(2p)!}\ u^{2p}\right| \leqslant \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}\ (e^{u} - e^{-u}).}$$

□

(iii) En déduire :
$$\left|e^{xt} + e^{-xt} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2(xt)^{2k}}{(2k)!}\right| \ \leqslant \ \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ e^{x}$$

Démonstration.

- On applique l'inégalité précédente à $u = xt$, ce qui est licite car, comme $x \in [0,+\infty[$ et $t \in [0,1]$: $xt \in [0,+\infty[$. Ainsi :
  $$\left|e^{xt} + e^{-xt} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(2k)!}\ (xt)^{2k}\right| \ \leqslant \ \frac{(xt)^{2n+1}}{(2n+1)!}\ (e^{xt} - e^{-xt})$$
- Or :
  × d'une part :

	$0 \leqslant t \leqslant 1$	
donc	$0 \leqslant t^{2n+1} \leqslant 1$	*(par croissance de $t \mapsto t^{2n+1}$ sur $[0,+\infty[$)*
d'où	$0 \leqslant x^{2n+1}\, t^{2n+1} \leqslant x^{2n+1}$	*(car $x^{2n+1} \geqslant 0$)*
ainsi	$0 \leqslant (xt)^{2n+1} \leqslant x^{2n+1}$	

× d'autre part, comme $\mathrm{e}^{-xt} \geqslant 0$: $\mathrm{e}^{xt} - \mathrm{e}^{-xt} \leqslant \mathrm{e}^{xt}$.
De plus, comme $xt \in [0, +\infty[$, on a démontré en question précédente : $\mathrm{e}^{xt} - \mathrm{e}^{-xt} \geqslant 0$.

$$\begin{array}{lll} \text{Enfin} & t \leqslant 1 & \\ \text{donc} & xt \leqslant x & \\ \text{d'où} & \mathrm{e}^{xt} \leqslant \mathrm{e}^{x} & \textit{(car } \exp \textit{ est croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \end{array}$$

On en déduit :

$$0 \leqslant \mathrm{e}^{xt} - \mathrm{e}^{-xt} \leqslant \mathrm{e}^{xt} \leqslant \mathrm{e}^{x}$$

On obtient :

$$0 \leqslant (xt)^{2n+1} \left(\mathrm{e}^{xt} - \mathrm{e}^{-xt}\right) \leqslant x^{2n+1} \, \mathrm{e}^{x}$$

$$\text{donc} \quad 0 \leqslant \frac{(xt)^{2n+1}}{(2n+1)!} \left(\mathrm{e}^{xt} - \mathrm{e}^{-xt}\right) \leqslant \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \, \mathrm{e}^{x}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, par transitivité : } \left| \mathrm{e}^{xt} + \mathrm{e}^{-xt} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2\,(xt)^{2k}}{(2k)!} \right| \leqslant \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \, \mathrm{e}^{x}.}$$

Commentaire

Dans cette question, on a utilisé l'implication suivante :

$$0 \leqslant (xt)^{2n+1} \leqslant x^{2n+1} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \mathrm{e}^{xt} - \mathrm{e}^{-xt} \leqslant \mathrm{e}^{x}$$

$$\Downarrow$$

$$0 \leqslant (xt)^{2n+1} \left(\mathrm{e}^{xt} - \mathrm{e}^{-xt}\right) \leqslant x^{2n+1} \, \mathrm{e}^{x}$$

On a donc « multiplié » deux inégalités. Rappelons que ceci est valide seulement parce que **tous les termes en présence sont positifs**.

□

b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$: $\left| I(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{2x^{2k}}{(2k)!} \, W_{2k} \right| \leqslant \dfrac{x^{2n+1}\pi}{2(2n+1)!} \, \mathrm{e}^{x}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} & I(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{2\,x^{2k}}{(2k)!} \, W_{2k} \\ = \; & \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{xt} + \mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}} \, dt - \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2\,x^{2k}}{(2k)!} \int_0^1 \frac{t^{2k}}{\sqrt{1-t^2}} \, dt \right) \\ = \; & \int_0^1 \left(\frac{\mathrm{e}^{xt} + \mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2\,x^{2k}}{(2k)!} \times \frac{t^{2k}}{\sqrt{1-t^2}} \right) dt \qquad \textit{(par linéarité de l'intégrale, les intégrales en présence étant convergentes)} \\ = \; & \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \left(\mathrm{e}^{xt} + \mathrm{e}^{-xt} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2\,(xt)^{2k}}{(2k)!} \right) dt \end{aligned}$$

- On en conclut :

$$\begin{aligned}\left|I(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{2\,x^{2k}}{(2k)!}\ W_{2k}\right| &= \left|\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \left(e^{xt} + e^{-xt} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2\,(xt)^{2k}}{(2k)!}\right)\ dt\right| \\ &\leqslant \int_0^1 \left|\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \left(e^{xt} + e^{-xt} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2\,(xt)^{2k}}{(2k)!}\right)\right|\ dt \qquad \textit{(par inégalité triangulaire)}\end{aligned}$$

Comme, pour tout $t \in [0, 1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} \geqslant 0$:

$$\left|I(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{2\,x^{2k}}{(2k)!}\ W_{2k}\right| \leqslant \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \left|e^{xt} + e^{-xt} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2\,(xt)^{2k}}{(2k)!}\right|\ dt$$

- Soit $t \in [0, 1[$. D'après la question précédente :

$$\left|e^{xt} + e^{-xt} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2\,(xt)^{2k}}{(2k)!}\right| \leqslant \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ e^x$$

Ainsi, comme $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} \geqslant 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ \left|e^{xt} + e^{-xt} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2\,(xt)^{2k}}{(2k)!}\right| \leqslant \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ e^x\ \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(0 \leqslant 1)$ et les intégrales en présence étant convergentes :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ \left|e^{xt} + e^{-xt} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2\,(xt)^{2k}}{(2k)!}\right|\ dt \leqslant \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ e^x\ \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ dt$$

- Or :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ e^x\ \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ dt &= \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ e^x \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ dt \\ &= \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ e^x\ W_0 \\ &= \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ e^x \times \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Par transitivité, pour tout } n \in \mathbb{N} : \left|I(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{2x^{2k}}{(2k)!}\ W_{2k}\right| \leqslant \frac{x^{2n+1}\pi}{2(2n+1)!}\ e^x.}$$

□

c) En déduire que la série $\sum_{k\geqslant 0} \dfrac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}$ converge et que l'on a : $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} = \dfrac{1}{\pi}\ I(x)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Soit $k \in [\![0, n]\!]$. D'après ***4.b)*** :

$$\frac{2\,x^{2k}}{(2k)!}\ W_{2k} \ = \ \frac{\cancel{2}\ x^{2k}}{\cancel{(2k)!}} \times \frac{\cancel{(2k)!}}{2^{2k}\,(k!)^2}\ \frac{\pi}{\cancel{2}} \ = \ \frac{x^{2k}}{2^{2k}\,(k!)^2}\ \pi$$

- Ainsi, d'après la question précédente :

$$\left| I(x) - \pi \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{2^{2k}\,(k!)^2} \right| \ \leqslant \ \frac{x^{2n+1}\pi}{2(2n+1)!}\ \mathrm{e}^x$$

D'où :

$$\left| \frac{1}{\pi}\ I(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{2^{2k}\,(k!)^2} \right| \ \leqslant \ \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ \frac{\mathrm{e}^x}{2}$$

- De plus, la série $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{n!}$ est la série exponentielle de paramètre x. Elle est donc convergente.

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$. D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$. Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ \frac{\mathrm{e}^x}{2} \ = \ 0$$

On en déduit, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\pi}\ I(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{2^{2k}\,(k!)^2} \ = \ 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la série } \sum_{k\geqslant 0} \frac{x^{2k}}{2^{2k}\,(k!)^2} \text{ est convergente et : } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{2^{2k}\,(k!)^2} = \frac{1}{\pi}\ I(x).}$$

Commentaire

- On utilise dans cette question l'implication :

$$\sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ convergente} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

- Rappelons que la réciproque de cette propriété est fausse. Par exemple :
  - × $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$,
  - × mais la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est divergente, car c'est la série de Riemann d'exposant 1 ($1 \not> 1$).

□

Partie III : Équivalent de $I(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

7. Montrer, pour tout x de $\mathbb{R}_+$: $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

- Soit $t \in [0,1[$.

$$\begin{array}{lcl} & 0 \leqslant t < 1 & \\ \text{donc} & 0 \geqslant -xt > -x & \textit{(car } x \geqslant 0\textit{)} \\ \text{d'où} & 1 \geqslant \mathrm{e}^{-xt} > \mathrm{e}^{-x} & \textit{(car la fonction } \exp \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ \text{ainsi} & \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} \geqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}} > \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{1-t^2}} & \textit{(car } \sqrt{1-t^2} > 0\textit{)} \end{array}$$

- On en déduit :
  - × $\forall t \in [0,1[$, $0 \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
  - × $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = W_0$ est convergente d'après ***3.***.

  Par critère de comparaison d'intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$ est convergente.

- On rappelle que, pour tout $t \in [0,1[$, on a :

$$0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant 1$) :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \leqslant \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = W_0$$

Or $W_0 = \dfrac{\pi}{2}$. Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \leqslant \frac{\pi}{2}$.

□

8. ***a)*** Montrer, pour tout v de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$: $1 \leqslant \dfrac{1}{1-v} \leqslant (1+v)^2$.

Démonstration.
Soit $v \in [0, \frac{1}{2}]$.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} 1 \leqslant \dfrac{1}{1-v} & \Leftrightarrow & 1 \geqslant 1-v & \textit{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & v \geqslant 0 & \end{array}$$

La dernière égalité est vraie. Donc, par équivalence, la première inégalité aussi.

- Ensuite :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-v} \leqslant (1+v)^2 &\Leftrightarrow 1 \leqslant (1-v)\,(1+v)^2 \qquad \textit{(car } 1-v \geqslant 0\textit{)} \\
&\Leftrightarrow 1 \leqslant (1-v^2)\,(1+v) \\
&\Leftrightarrow \cancel{1} \leqslant \cancel{1} + v - v^2 - v^3 \\
&\Leftrightarrow 0 \leqslant v\,(1-v-v^2) \qquad (*)
\end{aligned}$$

On note P le polynôme défini par : $P(X) = 1 - X - X^2$, et Δ son discriminant :

$$\Delta \ = \ (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) \ = \ 5 \ > \ 0$$

Le polynôme P admet donc 2 racines :

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > \frac{1}{2}$$

Comme $v \in [0, \frac{1}{2}] \subset [x_1, x_2]$, on obtient : $P(v) \geqslant 0$.
D'où : $v\,P(v) \geqslant 0$, *i.e.* $v\,(1-v-v^2) \geqslant 0$.
La dernière inégalité $(*)$ est donc vraie. Ainsi, par équivalence, la première aussi.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall v \in [0, \tfrac{1}{2}],\ 1 \leqslant \frac{1}{1-v} \leqslant (1+v)^2.}$$

□

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer, à l'aide du changement de variable $u = 1 - t$:

$$\int_0^1 \frac{e^{xt}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \ = \ \frac{e^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}\sqrt{1-\frac{u}{2}}}\,du$$

Démonstration.

- Avec un raisonnement similaire à celui de la question ***6.***, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{xt}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ est convergente.

Commentaire

Détaillons la démonstration de cette convergence :
Soit $t \in [0, 1[$.

	$0 \leqslant t < 1$	
donc	$0 \leqslant xt < x$	*(car $x \geqslant 0$)*
d'où	$1 \leqslant e^{xt} < e^x$	*(car la fonction* exp *est strictement croissante sur $\mathbb{R}$)*
ainsi	$\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} \leqslant \dfrac{e^{xt}}{\sqrt{1-t^2}} < \dfrac{e^x}{\sqrt{1-t^2}}$	*(car $\sqrt{1-t^2} > 0$)*

On en déduit :
× $\forall t \in [0, 1[,\ 0 \leqslant \dfrac{e^{xt}}{\sqrt{1-t^2}} \leqslant \dfrac{e^x}{\sqrt{1-t^2}}$

× $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = W_0$ est convergente d'après ***3.***. Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ l'est aussi.

Par critère de comparaison d'intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{xt}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ est convergente.

- On effectue le changement de variable $\boxed{u = 1-t}$.

$$\left|\begin{array}{l} u = 1-t \quad \text{(et donc } t = 1-u) \\ \hookrightarrow du = -dt \\ \bullet\ t = 0 \ \Rightarrow\ u = 1 \\ \bullet\ t = 1 \ \Rightarrow\ u = 0 \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto 1-u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$.
On obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{xt}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt &= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{x(1-u)}}{\sqrt{1-(1-u)^2}}\,(-du) \\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{2u-u^2}}\, du \\ &= \mathrm{e}^{x} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{2u}\,\sqrt{1-\frac{u}{2}}}\, du \\ &= \frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}\,\sqrt{1-\frac{u}{2}}}\, du \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{xt}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}\sqrt{1-\frac{u}{2}}}\, du}$$

Commentaire

Notons qu'on effectue là encore un changement de variable affine sur une intégrale impropre. Cependant la convergence de cette intégrale a été démontré. Le changement de variable est donc valide. □

c) En déduire, pour tout x de $\mathbb{R}_+$:

$$\frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\, du \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{xt}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \leqslant \frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\, du + \frac{\mathrm{e}^{x}}{2\sqrt{2}} \int_0^1 \mathrm{e}^{-xu}\sqrt{u}\, du$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

- D'après la question précédente :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{xt}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}\sqrt{1-\frac{u}{2}}}\, du$$

- Soit $u \in]0,1]$. Alors $\dfrac{u}{2} \in]0, \frac{1}{2}]$ et on peut appliquer la question ***8.a)*** à $v = \dfrac{u}{2}$:

$$1 \leqslant \frac{1}{1-\frac{u}{2}} \leqslant \Big(1+\frac{u}{2}\Big)^2$$

donc $$1 \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u}{2}}} \leqslant 1+\frac{u}{2}$$ *(par croissance de $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $[0,+\infty[$)*

d'où $$\frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}\,\sqrt{1-\frac{u}{2}}} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\Big(1+\frac{u}{2}\Big)$$ *(car $\dfrac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}} \geqslant 0$)*

ainsi $$\frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}\,\sqrt{1-\frac{u}{2}}} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-xu}\,\sqrt{u}$$

- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(0 < 1)$, et les intégrales en présence convergentes $(**)$:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\,du \ \leqslant\ \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}\,\sqrt{1-\frac{u}{2}}}\,du \ \leqslant\ \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-xu}\,\sqrt{u}\,du$$

Ainsi, comme $\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{2}} \geqslant 0$:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\,du \ \leqslant\ \underbrace{\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}\,\sqrt{1-\frac{u}{2}}}\,du}_{= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{xt}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt} \ \leqslant\ \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-xu}\,\sqrt{u}\,du$$

- Or, par linéarité de l'intégrale :

$$\frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-xu}\,\sqrt{u}\,du \ = \ \frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{2}}\left(\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\,du + \int_0^1 \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-xu}\,\sqrt{u}\,du\right)$$

- Revenons sur l'assertion $(**)$.
  - × L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\,du$ est convergente par critère de comparaison d'intégrales généralisées de fonctions continues positives.
  - × L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-xu}\,\sqrt{u}\,du$ est bien définie car la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-xu}\,\sqrt{u}$ est continue sur le segment $[0,1]$.
    Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-xu}\,\sqrt{u}\,du$ est convergente en tant que somme d'intégrales convergentes.

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\boxed{\frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\,du \ \leqslant\ \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{xt}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \ \leqslant\ \frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\,du + \frac{\mathrm{e}^{x}}{2\sqrt{2}} \int_0^1 \mathrm{e}^{-xu}\,\sqrt{u}\,du.}$$

Commentaire

Détaillons l'étude de la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}}\, du$.

× $\forall u \in \,]0,1]$, $0 \leqslant \dfrac{e^{-xu}}{\sqrt{u}} \leqslant \dfrac{e^{-xu}}{\sqrt{u}\,\sqrt{1-\frac{u}{2}}}$

× $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}\,\sqrt{1-\frac{u}{2}}}\, du$ est convergente d'après ***8.b)***.

Par critère de comparaison d'intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}}\, du$ est convergente.

□

9. a) **Seulement pour les cubes**

Démontrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\, e^{-t^2}\, dt$ sont convergentes et :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} t^2\, e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

Démonstration.

- Soit X une v.a.r. de loi $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Alors, soit $t \in \mathbb{R}$:

$$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\,\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{\cancel{2}\times\frac{1}{\cancel{2}}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cancel{2}}\times \cancel{2}\,\pi}}\, e^{-t^2}$$

$$\boxed{\text{Si } X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \tfrac{1}{2}\right), \text{ alors : } f_X : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-t^2}.}$$

- La fonction f_X est une densité. L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, dt$ est donc convergente et vaut 1. D'où, par définition de f_X :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-t^2}\, dt = 1$$

Ainsi : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$.

- De plus, la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est paire. Comme l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$ est convergente, on en déduit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

Commentaire

On rappelle que l'égalité :

$$\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-t^2} \, dt \ = \ \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \, dt$$

se démontre à l'aide du changement de variable $\boxed{u = -t}$.

$$\left|\begin{array}{l} u = -t \quad \text{(et donc } t = -u\text{)} \\ \hookrightarrow du = -dt \quad \text{et} \quad dt = -du \\ \bullet \ t = -\infty \ \Rightarrow \ u = +\infty \\ \bullet \ t = 0 \ \Rightarrow \ u = 0 \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto -u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0]$.

- La v.a.r. X de loi $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}\right)$ admet un moment d'ordre 2. De plus, par formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{E}(X^2) \ = \ \mathbb{V}(X) + \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \ = \ \frac{1}{2} + 0^2 \ = \ \frac{1}{2}$$

D'où l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \, f_X(t) \, dt$ est convergente et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \, f_X(t) \, dt \ = \ \mathbb{E}(X^2) \ = \ \frac{1}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \, f_X(t) \, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \, \mathrm{e}^{-t^2} \, dt$$

Ainsi : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \, \mathrm{e}^{-t^2} \, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

- La fonction $t \mapsto t^2 \, \mathrm{e}^{-t^2}$ est paire. Comme $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \, \mathrm{e}^{-t^2} \, dt$ est convergente, on en déduit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \, \mathrm{e}^{-t^2} \, dt \ = \ 2 \int_{0}^{+\infty} t^2 \, \mathrm{e}^{-t^2} \, dt$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \int_{0}^{+\infty} t^2 \, \mathrm{e}^{-t^2} \, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.}$$

□

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. À l'aide du changement de variable $t = \sqrt{xu}$, montrer :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\, du \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}} \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 \mathrm{e}^{-xu}\sqrt{u}\, du \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2x\sqrt{x}}$$

Démonstration.

- Démontrons : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\, du \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}$.
  Soit $\varepsilon > 0$.
  - × On effectue le changement de variable $\boxed{t = \sqrt{xu}}$.

$$\left|\begin{array}{l} t = \sqrt{xu} \quad \text{(et donc } u = \dfrac{t^2}{x}\text{)} \\ \hookrightarrow dt = \dfrac{x}{2\sqrt{xu}}\, du = \dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{u}}\, du \quad \text{et} \quad du = \dfrac{2t}{x}\, dt \\ \bullet\ t = \varepsilon \ \Rightarrow\ u = \sqrt{x\,\varepsilon} \\ \bullet\ t = 1 \ \Rightarrow\ u = \sqrt{x} \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car $\varphi : t \mapsto \dfrac{t^2}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\sqrt{x\,\varepsilon}, \sqrt{x}]$.
On obtient :

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\, du &= \int_{\sqrt{x\,\varepsilon}}^{\sqrt{x}} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{\frac{\cancel{t}}{\sqrt{x}}} \left(\frac{2\,\cancel{t}}{x}\, dt\right) \\ &= 2\,\frac{\sqrt{x}}{x} \int_{\sqrt{x\,\varepsilon}}^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{x}} \int_{\sqrt{x\,\varepsilon}}^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt \end{aligned}$$

De plus, comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\, du$ est convergente, alors $\displaystyle\int_{\sqrt{x\,\varepsilon}}^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$ admet une limite quand ε tend vers 0 et :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\, du = \frac{2}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$$

  - × D'après la question précédente :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \neq 0$$

D'où : $\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Ainsi :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\, du = \frac{2}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\cancel{2}}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{\cancel{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\, du \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}}$$

- Démontrons : $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-xu}\sqrt{u}\,du \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\,x\,\sqrt{x}}$.
  × On effectue le même changement de variable que précédemment. Ce changement de variable est valide car $\varphi : t \mapsto \dfrac{t^2}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \sqrt{x}]$.
  On obtient :
$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-xu}\sqrt{u}\,du = \int_{\sqrt{x\,\varepsilon}}^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\frac{t}{\sqrt{x}}\,\frac{2t}{x}\,dt = \frac{2}{x\,\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} t^2\,\mathrm{e}^{-t^2}\,dt$$
  × D'après la question précédente :
$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{\sqrt{x}} t^2\,\mathrm{e}^{-t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \neq 0$$
  D'où : $\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} t^2\,\mathrm{e}^{-t^2}\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{4}$. Ainsi :
$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-xu}\sqrt{u}\,du = \frac{2}{x\,\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} t^2\,\mathrm{e}^{-t^2}\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{x\,\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{\pi}}{4} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\,x\,\sqrt{x}}$$
$$\boxed{\int_0^1 \mathrm{e}^{-xu}\sqrt{u}\,du \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\,x\,\sqrt{x}}}$$
□

10. En déduire : $I(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{x}\sqrt{\pi}}{\sqrt{2x}}$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

- Par linéarité de l'intégrale :
$$I(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{xt}+\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{xt}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt + \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$
- En utilisant les encadrements des questions ***7.*** et ***8.c)***, on obtient :
$$\frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\,du + 0 \leqslant I(x) \leqslant \left(\frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\,du + \frac{\mathrm{e}^{x}}{2\sqrt{2}}\int_0^1 \mathrm{e}^{-xu}\sqrt{u}\,du\right) + \frac{\pi}{2}$$
  D'où :
$$\frac{\sqrt{2\,x}}{\mathrm{e}^{x}\sqrt{\pi}}\left(\frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\,du\right) \leqslant \frac{I(x)}{\frac{\mathrm{e}^{x}\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\,x}}} \leqslant \frac{\sqrt{2\,x}}{\mathrm{e}^{x}\sqrt{\pi}}\left(\frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\,du + \frac{\mathrm{e}^{x}}{2\sqrt{2}}\int_0^1 \mathrm{e}^{-xu}\sqrt{u}\,du + \frac{\pi}{2}\right)$$
- Or :
  × d'après la question précédente :
$$\frac{\sqrt{\cancel{2}\,x}}{\cancel{\mathrm{e}^{x}}\sqrt{\pi}}\left(\frac{\cancel{\mathrm{e}^{x}}}{\cancel{\sqrt{2}}}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\,du\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{\pi}}}\,\frac{\cancel{\sqrt{\pi}}}{\cancel{\sqrt{x}}} = 1$$
  Ainsi : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2\,x}}{\mathrm{e}^{x}\sqrt{\pi}}\left(\frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\,du\right) = 1.$

- toujours d'après la question précédente :

$$\frac{\sqrt{\cancel{2}\,x}}{\cancel{\mathrm{e}^x}\,\sqrt{\pi}} \left(\frac{\cancel{\mathrm{e}^x}}{2\,\cancel{\sqrt{2}}} \ \int_0^1 \ \mathrm{e}^{-xu}\,\sqrt{u}\ du \right) \underset{x \to +\infty}{\sim} \cancel{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}} \left(\frac{1}{2} \times \frac{\cancel{\sqrt{\pi}}}{2\,x\,\cancel{\sqrt{x}}} \right) = \frac{1}{4x}$$

Ainsi : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2\,x}}{\mathrm{e}^x\,\sqrt{\pi}} \left(\frac{\mathrm{e}^x}{2\,\sqrt{2}} \ \int_0^1 \ \mathrm{e}^{-xu}\,\sqrt{u}\ du \right) \ = \ 0.$

- enfin, par croissances comparées : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2\,x}}{\mathrm{e}^x\,\sqrt{\pi}} \ \frac{\pi}{2} = 0.$

Finalement :

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2\,x}}{\mathrm{e}^x\,\sqrt{\pi}} \left(\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2}} \ \int_0^1 \ \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\ du \right) \ = \ 1$

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2\,x}}{\mathrm{e}^x\,\sqrt{\pi}} \left(\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2}} \ \int_0^1 \ \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\ du + \frac{\mathrm{e}^x}{2\,\sqrt{2}} \ \int_0^1 \ \mathrm{e}^{-xu}\,\sqrt{u}\ du + \frac{\pi}{2} \right) = 1$

Par théorème d'encadrement : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{I(x)}{\frac{\mathrm{e}^x\,\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\,x}}} = 1.$

$$\boxed{\text{D'où : } I(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^x\,\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\,x}}.}$$

□

Partie IV : Une application en probabilités

Dans cette partie, λ désigne un réel strictement positif.
On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, suivant toutes les deux la loi de Poisson de paramètre λ.
On s'intéresse à la probabilité de l'événement $[X = Y]$.

10. a) Écrire une fonction **Python** d'en-tête `def estime(lambda)` qui, prenant en argument un réel `lambda` strictement positif, simule un grand nombre de fois les variables aléatoires X et Y, et renvoie une estimation de $\mathbb{P}([X = Y])$.
On rappelle que l'instruction `nr.poisson(lambda)` de la bibliothèque `numpy.random` simule la loi de Poisson de paramètre `lambda`.

Démonstration.
On propose le script suivant :

```
function r = estime(lambda)
    N = 10000
    X = grand(1, N, 'poi', lambda)
    Y = grand(1, N, 'poi', lambda)
    compteur = 0
    for i = 1:N
        if X(i) == Y(i) then
            compteur = compteur + 1
        end
    end
    r = compteur / N
endfunction
```

- Cette fonction permet d'obtenir une approximation de la probabilité $\mathbb{P}([X = Y])$ en fonction du paramètre λ.
- L'idée naturelle pour obtenir cette approximation est :
  - × de simuler un grand nombre de fois ($N = 10000$ est ce grand nombre) les v.a.r. X et Y. Formellement, on souhaite obtenir un N-uplet $(x_1, \dots, x_N)$ qui correspond à l'observation d'un N-échantillon $(X_1, \dots, X_N)$ de la v.a.r. X, et un N-uplet $(y_1, \dots, y_N)$ qui correspond à l'observation d'un N-échantillon $(Y_1, \dots, Y_N)$ de la v.a.r. Y.
  - × de compter le nombre de fois où $x_i = y_i$, pour $i \in [\![1, N]\!]$.

  Cette idée est justifiée par la loi faible des grands nombres (LfGN) qui affirme :

$$\frac{\text{nombre de fois où } x_i = y_i}{\text{taille de l'observation}} \simeq \mathbb{P}([X = Y])$$

- Dans la fonction, les valeurs $(x_1, \dots, x_N)$ et $(y_1, \dots, y_N)$ sont obtenus par des appels à la fonction `grand` et sont stockées dans les variables `X` et `Y` :

```
        X = grand(1, N, 'poi', lambda)
        Y = grand(1, N, 'poi', lambda)
```

- La variable `compteur` est initialisée à 0.

```
        compteur = 0
```

  On souhaite qu'elle contienne, en fin de boucle for, le nombre de fois où $x_i = y_i$, pour $i \in [\![1, N]\!]$. La variable `compteur` est alors mise à jour à chaque tour de boucle :

```
        for i = 1:N
            if X(i) == Y(i) then
                compteur = compteur + 1
            end
        end
```

  Détaillons cette mise à jour :
  - × si `X(i)` $=$ `Y(i)`, alors on effectue l'instruction :

```
                compteur = compteur + 1
```

    Ainsi, à chaque fois que `X(i)` $=$ `Y(i)`, la variable `compteur` vaut successivement : 1, 2, ..., j, où j est le nombre de fois, parmi les N observations, où `X(i)` $=$ `Y(i)`.
  - × si `X(i)` $\neq$ `Y(i)`, alors la variable `compteur` n'est pas mise à jour.

  Cela signifie que la variable `compteur` compte le nombre de fois où `X(i)` $=$ `Y(i)`, pour $i \in [\![1, N]\!]$.
- Une fois cette boucle effectuée, on met à jour la variable `r` :

```
        r = compteur / N
```

  La variable `r` contient donc le réel $\dfrac{\text{nombre de fois où } x_i = y_i}{\text{taille de l'observation}}$, qui est bien une approximation de $\mathbb{P}([X = Y])$ par la LfGN.

Commentaire

Pour définir la variable `compteur`, on peut aussi tirer profit des fonctionnalités **Scilab** :

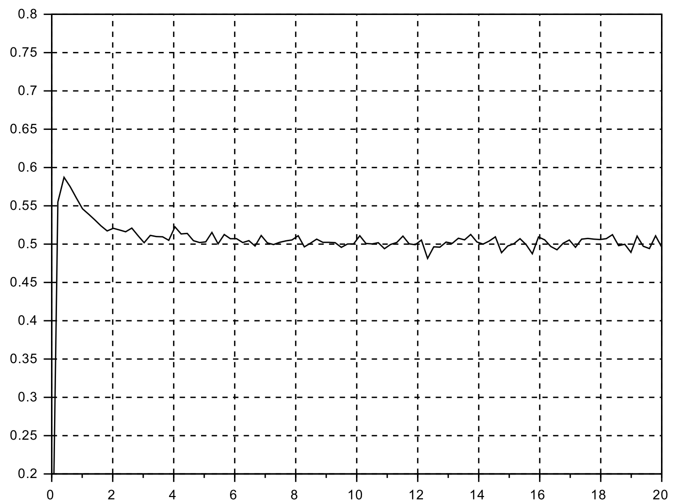
```
function r = estime(lambda)
    N = 10000
    X = grand(1, N, 'poi', lambda)
    Y = grand(1, N, 'poi', lambda)
    compteur = sum( X == Y )
    r = compteur / N
endfunction
```

Pour bien comprendre l'instruction `compteur = sum( X == Y )`, rappelons que :

- l'instruction `X == Y` renvoie une matrice de booléens, de même taille que celle des matrices `X` et `Y`, dont la $i^{\text{ème}}$ coordonnée est `Vrai` si $x_i = y_i$, et `Faux` sinon.
- la fonction `sum` permet de sommer tous les coefficients d'une matrice.

On obtient donc bien avec cette commande, le nombre de fois où $x_i = y_i$. □

b) Grâce à la fonction précédente, on trace, en fonction de λ, une estimation de $\sqrt{\pi\lambda}\, \mathbb{P}([X = Y])$ pour $\lambda \in \,]0, 20]$ et on obtient le graphe suivant :



À la vue de ce graphe, proposer un équivalent de $\mathbb{P}([X = Y])$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

Démonstration.

- À la lecture de ce graphe, on conjecture : $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \sqrt{\pi\,\lambda}\,\mathbb{P}([X = Y]) = \dfrac{1}{2}$.
- Comme $\dfrac{1}{2} \neq 0$, on en déduit : $\sqrt{\pi\,\lambda}\,\mathbb{P}([X = Y]) \underset{\lambda \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}([X = Y]) \underset{\lambda \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2\,\sqrt{\pi\,\lambda}}.}$$

□

11. Montrer : $\mathbb{P}([X=Y]) = \mathrm{e}^{-2\lambda} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\mathbb{P}([X=Y]) \ = \ \mathbb{P}([X-Y=0])$$

Commentaire

Remarquons qu'on se ramène ici à un cas particulier de loi d'une somme $(X-Y)$. Il faut donc se préparer à utiliser les méthodes usuelles pour la détermination de ce type de loi : la formule des probabilités totales.

- La famille $\big([X=k]\big)_{k\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X-Y=0]) & = & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k] \cap [X-Y=0]) & \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k] \cap [Y=k]) & \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k])\ \mathbb{P}([Y=k]) & \textit{(par indépendance de } X \textit{ et } Y\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-\lambda}\ \dfrac{\lambda^k}{k!} \times \mathrm{e}^{-\lambda}\ \dfrac{\lambda^k}{k!}\right) & \textit{(car } X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \textit{ et } Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)\textit{)} \\ & = & \left(\mathrm{e}^{-\lambda}\right)^2 \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{\lambda^{2k}}{(k!)^2} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}([X=Y]) = \mathrm{e}^{-2\,\lambda} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}.}$$

□

12. ***a)*** Exprimer $\mathbb{P}([X=Y])$ en fonction de λ et de la fonction I.

Démonstration.

- D'après la question ***6.c)***, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\frac{1}{\pi}\ I(x) \ = \ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{2^{2k}\,(k!)^2} \ = \ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}$$

- On en déduit, avec la question précédente :

$$\mathbb{P}([X=Y]) \ = \ \mathrm{e}^{-2\,\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2} \ = \ \mathrm{e}^{-2\,\lambda} \times \frac{1}{\pi}\ I(2\,\lambda)$$

(remarquons qu'on a bien : $2\,\lambda \in \mathbb{R}_+$)

$$\boxed{\mathbb{P}([X=Y]) \ = \ \frac{\mathrm{e}^{-2\,\lambda}}{\pi}\ I(2\,\lambda)}$$

□

b) En déduire un équivalent de $\mathbb{P}([X = Y])$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

Démonstration.

- D'après la question ***10.*** : $I(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^x \sqrt{\pi}}{\sqrt{2\,x}}$.
  Or : $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} 2\,\lambda = +\infty$. Donc :
  $$I(2\,\lambda) \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{2\,\lambda}\sqrt{\pi}}{\sqrt{4\,\pi}} = \frac{\mathrm{e}^{2\,\lambda}\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}}$$
- On en déduit :
  $$\mathbb{P}([X = Y]) = \frac{\mathrm{e}^{-2\,\lambda}}{\pi}\ I(2\,\lambda) \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} \frac{\cancel{\mathrm{e}^{-2\,\lambda}}}{\pi}\ \frac{\cancel{\mathrm{e}^{2\,\lambda}}\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\lambda}}$$

$$\boxed{\text{D'où : } \mathbb{P}([X = Y]) \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi\,\lambda}}.}$$

□