DS6 (version B)

Exercice /61

Dans tout ce problème, on note n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées possédant n lignes et n colonnes dont les coefficients sont réels.
On note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient les propriétés suivantes :

(Δ_1) les coefficients diagonaux $m_{1,1}$, ..., $m_{n,n}$ de la matrice M sont des valeurs propres de M ;

(Δ_2) la matrice M n'a pas d'autres valeurs propres que les nombres $m_{1,1}$, ..., $m_{n,n}$.

Partie I. Généralités et exemples /27

1. Montrer que toutes les matrices triangulaires supérieures et toutes les matrices triangulaires inférieures de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ appartiennent à $\mathcal{D}_n$.

- **2 pts**
  0 si résultat décrété sans justification

2. Si M est une matrice de $\mathcal{D}_n$, établir que pour tout α réel, la matrice $M + \alpha I_n$ est encore un élément de $\mathcal{D}_n$.

- **2 pts**

3. On note K_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

a) Montrer que la matrice K_n n'appartient pas à $\mathcal{D}_n$.

- **1 pt :** $\text{rg}(K_n) = 1$
- **1 pt :** 0 **valeur propre de** K_n **et** (Δ_2) **non vérifiée**

b) L'ensemble $\mathcal{D}_n$ est-il un sous espace-vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

- **1 pt :** $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **et** $B_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- **1 pt : montrer** $A_n, B_n \in \mathcal{D}_n$ **et** $A_n + B_n \notin \mathcal{D}_n$

4. *a)* Soit (x, y, z) un élément de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si les nombres x et y sont non nuls.

- **1 pt :** M **inversible ssi** $\det(M) = 0$
- **1 pr :** $\det(M) = xy$

b) En déduire que l'ensemble $\mathcal{D}_2$ ne contient pas d'autre élément que les matrices triangulaires de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

- **1 pt :** $N = \begin{pmatrix} s & x \\ y & z \end{pmatrix}$ $\mathcal{D}_2$ **implique** $N - s\,I_2 \in \mathcal{D}_2$ **(qst *2.*)**
- **1 pt :** $N - s\,I_2 \in \mathcal{D}_2$ **implique** 0 **valeur propre donc** $N - s\,I_2$ **non inversible**
- **1 pt :** $N - s\,I_2$ **non inversible implique** $x = 0$ **ou** $y = 0$ **(qst *4.a)*), donc** N **triangulaire**

5. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{D}_3$.

Cette matrice est-elle diagonalisable ?

- **1,5 pts :** 3**,** 2 **et** 4 **valeurs propres de** A
- **0,5 pt :** A **n'admet pas d'autres valeurs propres, donc** $A \in \mathcal{D}_3$
- **1 pt :** A **diagonalisable**

6. Pour tout t réel, on considère la matrice $M(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1+t \\ 0 & 2 & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t \end{pmatrix}$.

a) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de la matrice $M(t)$ selon la valeur de t.
En déduire les valeurs de t pour lesquelles la matrice $M(t)$ appartient à $\mathcal{D}_3$.

- **3 pts :** $\mathrm{Sp}\left(M(t)\right) = \{2, 3, 4+2t\}$
- **1 pt :** $\forall t \in \mathbb{R},\ M(t) \in \mathcal{D}_3$

b) Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la matrice $M(t)$ est diagonalisable.

- **1 pt : si** $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -\frac{1}{2}\}$**, alors** $M(t)$ **diagonalisable**
- **4 pts : cas** $t = -1$
  - × **1 pt :** $E_2\big(M(-1)\big) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
  - × **1 pt :** $\dim\Big(E_2\big(M(-1)\big)\Big) = 2$
  - × **2 pts :** $M(-1)$ **diagonalisable**
- **2 pts : si** $t = -\frac{1}{2}$**,** $M(-\frac{1}{2})$ **non diagonalisable**

Partie II. Matrices nilpotentes /34

Une matrice M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est *nilpotente* si, et seulement si, il existe un entier naturel p non nul tel que la matrice M^p soit la matrice nulle.

7. Soit M une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Montrer que 0 est une valeur propre de M et que c'est la seule valeur propre de M.

- **2 pts :** 0 **est valeur propre de** M **(par l'absurde)**
- **1 pt :** 0 **est la seule valeur propre possible de** M

8. Soit M une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On va prouver par l'absurde que M^3 est la matrice nulle. Pour cela, on suppose que M^3 n'est pas la matrice nulle.
Notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice M dans la base $\mathscr{B}$.

a) Montrer les inclusions $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2)$ et $\text{Ker}(u^2) \subset \text{Ker}(u^3)$.

- **1 pt :** $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2)$
- **1 pt :** $\text{Ker}(u^2) \subset \text{Ker}(u^3)$

b) Montrer que les noyaux $\text{Ker}(u^2)$ et $\text{Ker}(u^3)$ ne peuvent pas être égaux. Pour cela, montrer que dans le cas contraire, le noyau de u^2 est égal à celui de u^i pour tout entier i supérieur ou égal à 2, et en tirer une contradiction.

- **4 pts : récurrence ($\forall i \geqslant 2$, $\text{Ker}(u^2) = \text{Ker}(u^i)$)**
  - × **1 pt : initialisation**
  - × **3 pts : hérédité (dont 1 pt inclusion $\text{Ker}(u^2) \subset \text{Ker}(u^{i+1})$, et 2 pts inclusion $\text{Ker}(u^{i+1}) \subset \text{Ker}(u^2)$)**
- **1 pt :** $\text{Ker}(u^p) = \mathbb{R}^3$
- **1 pt : cas $p = 1$ ($u = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$ donc $M = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ d'où $M^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$)**
- **2 pts : cas $p > 1$**
  - × **1 pt :** $\text{Ker}(u^2) = \text{Ker}(u^p) = \mathbb{R}^3$
  - × **1 pt :** $\text{Ker}(u^2) = \text{Ker}(u^3)$ **donc** $M^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$

c) Montrer que les noyaux $\text{Ker}(u)$ et $\text{Ker}(u^2)$ ne peuvent pas être égaux non plus.

- **1 pt : raisonnement par l'absurde**
- **1 pt :** $\forall i \geqslant 1$, $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^i)$ **(récurrence immédiate)**
- **1 pt :** $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^p) = \mathbb{R}^3$ **donc** $M = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ **d'où** $M^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$

d) Conclure en considérant la dimension des noyaux mentionnés ci-dessus.

- **1 pt :** $\dim(\text{Ker}(u)) < \dim(\text{Ker}(u^2)) < \dim(\text{Ker}(u^3))$
- **1 pt :** $\text{Ker}(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$
- **1 pt :** $1 \leqslant \dim(\text{Ker}(u)) < \dim(\text{Ker}(u^2)) < \dim(\text{Ker}(u^3)) \leqslant 3$, **d'où :** $\dim(\text{Ker}(u)) = 1$, $\dim(\text{Ker}(u^2)) = 2$ **et** $\dim(\text{Ker}(u^3)) = 3$
- **1 pt :** $\text{Ker}(u^3) = \mathbb{R}^3$ **donc** $M^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$

9. Soit (a, b, c, d, e, f) un élément de $\mathbb{R}^6$. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On définit les réels $\gamma(M) = ac + df + be$ et $\delta(M) = bcf + ade$.

a) Établir l'égalité $M^3 = \gamma(M)M + \delta(M)I_3$.

- **1 pt :** $M^2 = \begin{pmatrix} ac + be & bf & ad \\ de & ac + df & bc \\ cf & ae & be + df \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $M^3 = \begin{pmatrix} ade + bcf & a^2c + adf + abe & abc + b^2e + bdf \\ ac^2 + bce + cdf & bcf + ade & acd + bde + d^2f \\ ace + be^2 + def & bef + acf + df^2 & ade + bcf \end{pmatrix}$

- **1 pt :** $\gamma(M)\, M + \delta(M)\, I_3 = \begin{pmatrix} ade+bcf & a^2c+adf+abe & abc+b^2e+bdf \\ ac^2+bce+cdf & bcf+ade & acd+bde+d^2f \\ ace+be^2+def & bef+acf+df^2 & ade+bcf \end{pmatrix}$

b) Montrer que la matrice M est nilpotente si et seulement si $\gamma(M)$ et $\delta(M)$ sont nuls.

- **2 pts :** $(\Leftarrow)$
  × **1 pt :** $\gamma(M)\, M + \delta(M)\, I_3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$
  × **1 pt :** $\gamma(M) = \delta(M) = 0$ **par liberté de** (M, I_3)
- **1 pt :** $(\Rightarrow)$

c) On suppose que a, b et d sont égaux à 1.
Justifier qu'il existe une infinité de choix pour le triplet (c, e, f) de $\mathbb{R}^3$ pour lesquels la matrice M est nilpotente.

- **1 pt :** M **nilpotente ssi** $\left\{ \begin{array}{rcl} c\,(1-f) & = & -f \\ e & = & -fc \end{array} \right.$
- **1 pt : si** $f = 1$**, alors** M **n'est pas nilpotente**
- **1 pt : si** $f \neq 1$, $(-\frac{f}{1-f}, -\frac{f^2}{1-f}, f)$ **solution du système. Donc il existe une infinité de triplet pour lesquels** M **est nilpotente**

d) En déduire que l'ensemble $\mathcal{D}_3$ contient une infinité de matrices nilpotentes qui ne sont pas triangulaires.

- **1 pt :** $M_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\frac{f}{1-f} & 0 & 1 \\ -\frac{f^2}{1-f} & f & 0 \end{pmatrix}$ **nilpotente si** $f \neq 1$
- **1 pt :** $M_f \in \mathcal{D}_3$ **(car** 0 **seule valeur propre de** M_f **d'après *7.*)**
- **1 pt ; si de plus** $f \neq 0$, M_f **n'est pas triangulaire. Donc il existe une infinité de matrices non triangulaires dans** $\mathcal{D}_3$

e) Exhiber une matrice de $\mathcal{D}_3$ dont tous les coefficients sont non nuls.

- **2 pts :** $M_2 + I_3$ **convient (d'après *2.*)**

Problème (EML 2018 voie S) /93

On définit la fonction I d'une variable réelle x par : $I(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{xt} + e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$.

Partie I : Une inégalité de Taylor-Lagrange

1. Soit $u \in [0, +\infty[$. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[0, +\infty[$, on a :

$$f(u) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, u^k + \int_0^u \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}\, (u-y)^n\, dy$$

- **1 pt : initialisation**
- **3 pts : hérédité**

2. Soit $u \in [0, +\infty[$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[0, +\infty[$. En déduire :

$$\left| f(u) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, u^k \right| \leqslant \frac{u^{n+1}}{(n+1)!}\, M$$

où $M = \max\limits_{y \in [0,u]} \left(\left| f^{(n+1)}(y) \right| \right)$.

Cette inégalité est appelée **inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n de la fonction f.**

- **1 pt : inégalité triangulaire**
- **1 pt :** $\forall y \in [0, u]$, $\left| \dfrac{f^{(n+1)}(y)}{n!}\, (u-y)^n \right| \leqslant \dfrac{M}{n!}\, (u-y)^n$
- **1 pt : croissance de l'intégrale**
- **1 pt : reste calcul**

Partie II : Une autre expression de $I(x)$

3. Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$ converge.

On note alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $W_k = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$.

- **1 pt : continuité de** $t \mapsto \dfrac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}$ **sur** $[0, 1[$
- **1 pt : changement de variable affine**
  0 s'il n'est pas effectué sur un segment
- **1 pt :** $\dfrac{(1-x)^k}{\sqrt{2x - x^2}} \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2\, x}}$
- **2 pts : critère d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues positives**

4. a) Soit $k \in \mathbb{N}$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer : $W_k - W_{k+2} = \dfrac{1}{k+1} W_{k+2}$.

- **1 pt : IPP sur un segment**
- **1 pt :** $t^k \sqrt{1-t^2} = \dfrac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} - \dfrac{t^{k+2}}{\sqrt{1-t^2}}$
- **1 pt : passage à la limite**

b) On admet : $W_0 = \dfrac{\pi}{2}$. Montrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $W_{2k} = \dfrac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\ \dfrac{\pi}{2}$.

- **1 pt :** $W_{k+2} = \dfrac{k+1}{k+2}\ W_k$
- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

5. ***a)*** Montrer que la fonction I est définie sur $\mathbb{R}$ et préciser sa parité.

- **1 pt :** $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{xt} + \mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}$ **continue sur** $[0, 1[$
- **2 pts : critère d'équivalence** $\left(\dfrac{\mathrm{e}^{xt} + \mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}} \underset{t \to 1}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{1-t^2}}\right)$
- **1 pt :** I **paire**

b) Donner la valeur de $I(0)$.

- **1 pt :** $I(0) = \pi$

6. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

a) Soient $t \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$.

(i) On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f : y \mapsto \mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}$.
Démontrer : $\forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)} : y \mapsto \mathrm{e}^y + (-1)^k\ \mathrm{e}^{-y}$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité (dont 1 pt pour** f **de classe** $\mathcal{C}^{k+1}$ **sur** $\mathbb{R}$**)**

(ii) Soit $u \in [0, +\infty[$. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange (**Partie I**) à l'ordre $2n$ appliquée à la fonction $f : y \mapsto \mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}$, montrer :

$$\left| \mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(2k)!}\ u^{2k} \right| \leqslant \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}\ (\mathrm{e}^u - \mathrm{e}^{-u})$$

Indication : on pensera à découper la somme obtenue en appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange en deux sommes : l'une ne comportant que les termes d'indice pair, l'autre ne comportant que les termes d'indice impair.

- **1 pt : application de l'inégalité de Taylor-Lagrange**
  0 si l'hypothèse f **de classe** $\mathcal{C}^{2n+1}$ **sur** $\mathbb{R}$ **non précisée**
- **2 pts :** $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\ u^k \ = \ \sum_{p=0}^{n} \frac{2}{(2p)!}\ u^{2p}$
- **2 pts :** $M = \mathrm{e}^u - \mathrm{e}^{-u}$

(iii) En déduire :

$$\left| \mathrm{e}^{xt} + \mathrm{e}^{-xt} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2(xt)^{2k}}{(2k)!} \right| \leqslant \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ \mathrm{e}^x$$

- **1 pt : application de la question précédente à** $u = xt$
  0 si hypothèse $xt \in [0, +\infty[$ **non précisée**
- **1 pt :** $0 \leqslant (xt)^{2n+1} \leqslant x^{2n+1}$
- **1 pt :** $0 \leqslant \mathrm{e}^{xt} - \mathrm{e}^{-xt} \leqslant \mathrm{e}^x$
- **1 pt :** $0 \leqslant \dfrac{(xt)^{2n+1}}{(2n+1)!}\ (\mathrm{e}^{xt} + \mathrm{e}^{-xt}) \leqslant \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ \mathrm{e}^x$
  0 si le caractère positif est omis

b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$: $\left| I(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{2x^{2k}}{(2k)!}\ W_{2k} \right| \ \leqslant\ \dfrac{x^{2n+1}\pi}{2(2n+1)!}\ \mathrm{e}^{x}$.

- **1 pt :** $I(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{2\,x^{2k}}{(2k)!}\ W_{2k} = \displaystyle\int_0^1 \ \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} \left(\mathrm{e}^{xt} + \mathrm{e}^{-xt} - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{2\,(xt)^{2k}}{(2k)!} \right)\ dt$
- **1 pt : inégalité triangulaire**
- **1 pt : utilisation qst précédente**
- **1 pt : croissance de l'intégrale, les intégrales étant convergentes**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^1 \ \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ \mathrm{e}^{x}\ \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ dt = \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ \mathrm{e}^{x}\ W_0 = \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ \mathrm{e}^{x}\ \dfrac{\pi}{2}$

c) En déduire que la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} \dfrac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}$ converge et que l'on a : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} = \dfrac{1}{\pi}\ I(x)$.

- **1 pt :** $\dfrac{2\,x^{2k}}{(2k)!}\ W_{2k} = \dfrac{x^{2k}}{2^{2k}\,(k!)^2}\ \pi$
- **1 pt :** $\lim\limits_{n \to +\infty}\ \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$
- **1 pt : théorème d'encadrement**

Partie III : Équivalent de $I(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

6. Montrer, pour tout x de $\mathbb{R}_+$: $0 \ \leqslant\ \displaystyle\int_0^1 \ \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}\ dt \ \leqslant\ \dfrac{\pi}{2}$.

- **2 pts :** $0 \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
- **1 pt : critère de comparaison**
- **1 pt : croissance de l'intégrale**

7. ***a)*** Montrer, pour tout v de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$: $1 \ \leqslant\ \dfrac{1}{1-v} \ \leqslant\ (1+v)^2$.

- **1 pt :** $1 \leqslant \dfrac{1}{1-v}$
- **2 pts :** $\dfrac{1}{1-v} \leqslant (1+v)^2$

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer, à l'aide du changement de variable $u = 1 - t$:

$$\int_0^1 \ \frac{\mathrm{e}^{xt}}{\sqrt{1-t^2}}\ dt \ = \ \frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{2}} \ \int_0^1 \ \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}\sqrt{1-\dfrac{u}{2}}}\ du$$

- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^1 \ \dfrac{\mathrm{e}^{xt}}{\sqrt{1-t^2}}\ dt$ **est convergente**
- **2 pts : changement de variable et calcul**

c) En déduire, pour tout x de $\mathbb{R}_+$:

$$\frac{e^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}}\, du \leqslant \int_0^1 \frac{e^{xt}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \leqslant \frac{e^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}}\, du + \frac{e^x}{2\sqrt{2}} \int_0^1 e^{-xu}\sqrt{u}\, du$$

- **2 pts :** $\dfrac{e^{-xu}}{\sqrt{u}} \leqslant \dfrac{e^{-xu}}{\sqrt{u}\sqrt{1-\frac{u}{2}}} \leqslant \dfrac{e^{-xu}}{\sqrt{u}} + \dfrac{1}{2}\, e^{-xu}\sqrt{u}$ **(dont 1 pt pour :** $\dfrac{u}{2} \in \,]0, \frac{1}{2}]$**)**
- **1 pt : croissance de l'intégrale**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}}\, du$ **convergente par critère de comparaison**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^1 e^{-xu}\sqrt{u}\, du$ **bien définie car** $u \mapsto e^{-xu}\sqrt{u}$ **continue sur le segment** $[0,1]$
- **1 pt : fin du calcul**

8. a) <u>**Seulement pour les cubes**</u>
Démontrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\, e^{-t^2}\, dt$ sont convergentes et :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} t^2\, e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

- **1 pt :** $f_X : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-t^2}$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ **car** $t \mapsto e^{-t^2}$ **est paire**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, t^2 e^{-t^2}\, dt = \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{V}(X) + \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 = \frac{1}{2}$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\, e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$ **car** $t \mapsto t^2\, e^{-t^2}$ **paire**

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. À l'aide du changement de variable $t = \sqrt{xu}$, montrer :

$$\int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}}\, du \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}} \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 e^{-xu}\sqrt{u}\, du \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2x\sqrt{x}}$$

- **2 pts : changement de variable pour montrer** $\displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}}\, du = \frac{2}{\sqrt{x}} \int_{\sqrt{x\,\varepsilon}}^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\, dt$ **(1 pt seulement si le changement de variable n'est pas effectué sur un segment)**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\, dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}}\, du \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}$.
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^1 e^{-xu}\sqrt{u}\, du = \frac{2}{x\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} t^2\, e^{-t^2}\, dt$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^1 e^{-xu}\sqrt{u}\, du \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\,x\sqrt{x}}$

9. En déduire : $I(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^x \sqrt{\pi}}{\sqrt{2x}}$.

- **2 pts : avec *7.* et *8.c)* :** $\dfrac{\mathbf{e}^x}{\sqrt{2}} \displaystyle\int_0^1 \dfrac{\mathbf{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\, du + 0 \leqslant I(x) \leqslant \left(\dfrac{\mathbf{e}^x}{\sqrt{2}} \displaystyle\int_0^1 \dfrac{\mathbf{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\, du + \dfrac{\mathbf{e}^x}{2\sqrt{2}} \displaystyle\int_0^1 \mathbf{e}^{-xu} \sqrt{u}\, du \right) + \dfrac{\pi}{2}$
- **1 pt : d'après qst précédente** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{2\,x}}{\mathbf{e}^x \sqrt{\pi}} \left(\dfrac{\mathbf{e}^x}{\sqrt{2}} \displaystyle\int_0^1 \dfrac{\mathbf{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\, du \right) = 1$
- **1 pt : d'après qst précédente** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{2\,x}}{\mathbf{e}^x \sqrt{\pi}} \left(\dfrac{\mathbf{e}^x}{2\sqrt{2}} \displaystyle\int_0^1 \mathbf{e}^{-xu} \sqrt{u}\, du \right) = 0$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{2\,x}}{\mathbf{e}^x \sqrt{\pi}}\, \dfrac{\pi}{2} = 0$
- **1 pt : théorème d'encadrement**

Partie IV : Une application en probabilités

Dans cette partie, λ désigne un réel strictement positif.
On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, suivant toutes les deux la loi de Poisson de paramètre λ.
On s'intéresse à la probabilité de l'événement $[X = Y]$.

10. a) **Seulement pour les cubes**

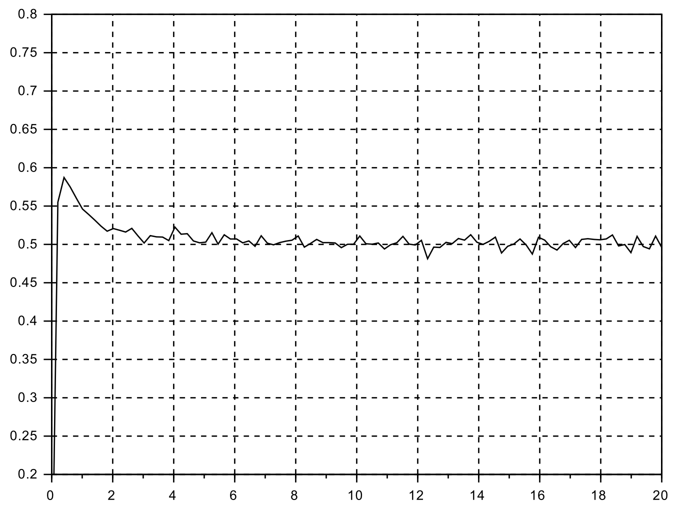
Écrire une fonction **Python** d'en-tête `def estime(lambda)` qui, prenant en argument un réel `lambda` strictement positif, simule un grand nombre de fois les variables aléatoires X et Y, et renvoie une estimation de $\mathbb{P}([X = Y])$.
On rappelle que l'instruction `nr.poisson(lambda)` de la bibliothèque `numpy.random` simule la loi de Poisson de paramètre `lambda`.

- **6 pts :**

```
1  function r = estime(lambda)
2      N = 10000
3      X = grand(1, N, 'poi', lambda)
4      Y = grand(1, N, 'poi', lambda)
5      compteur = 0
6      for i = 1:N
7          if X(i) == Y(i) then
8              compteur = compteur + 1
9          end
10     end
11     r = compteur / N
12 endfunction
```

  × **1 pt : lignes 2 à 4**
  × **1 pt : initialisation** `compteur`
  × **1 pt : boucle** `for`
  × **2 pts : structure conditionnelle**
  × **1 pt : ligne 11**

b) **Seulement pour les cubes**
Grâce à la fonction précédente, on trace, en fonction de λ, une estimation de $\sqrt{\pi\lambda}\ \mathbb{P}([X=Y])$ pour $\lambda \in \,]0,20]$ et on obtient le graphe suivant :



À la vue de ce graphe, proposer un équivalent de $\mathbb{P}([X=Y])$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} \sqrt{\pi\,\lambda}\ \mathbb{P}([X=Y]) = \frac{1}{2}$
- **1 pt :** $\displaystyle\mathbb{P}([X=Y]) \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi\,\lambda}}$

11. Montrer : $\displaystyle\mathbb{P}([X=Y]) = \mathrm{e}^{-2\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}$.

- **1 pt : FPT sur le SCE** $([X=k])_{k\in\mathbb{N}}$
- **1 pt : indépendance de** X **et** Y
- **1 pt :** $\displaystyle\mathbb{P}([X=Y]) = \mathbf{e}^{-2\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}$

12. ***a)*** Exprimer $\mathbb{P}([X=Y])$ en fonction de λ et de la fonction I.

- **1 pt : d'après *6.c)* :** $\displaystyle\frac{1}{\pi}\ I(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}$
- **1 pt :** $\displaystyle\mathbb{P}([X=Y]) = \frac{\mathbf{e}^{-2\,\lambda}}{\pi}\ I(2\,\lambda)$

b) En déduire un équivalent de $\mathbb{P}([X=Y])$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

- **1 pt : comme** $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} 2\,\lambda$ **:** $\displaystyle I(2\,\lambda) \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} \frac{\mathbf{e}^{2\,\lambda}\ \sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}}$
- **1 pt :** $\displaystyle\mathbb{P}([X=Y]) \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi\,\lambda}}$