DS6 (version B)

Exercice

Dans tout ce problème, on note n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées possédant n lignes et n colonnes dont les coefficients sont réels.
On note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient les propriétés suivantes :

(Δ_1) les coefficients diagonaux $m_{1,1}$, ..., $m_{n,n}$ de la matrice M sont des valeurs propres de M ;

(Δ_2) la matrice M n'a pas d'autres valeurs propres que les nombres $m_{1,1}$, ..., $m_{n,n}$.

Partie I. Généralités et exemples

1. Montrer que toutes les matrices triangulaires supérieures et toutes les matrices triangulaires inférieures de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ appartiennent à $\mathcal{D}_n$.

2. Si M est une matrice de $\mathcal{D}_n$, établir que pour tout α réel, la matrice $M + \alpha I_n$ est encore un élément de $\mathcal{D}_n$.

3. On note K_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

a) Montrer que la matrice K_n n'appartient pas à $\mathcal{D}_n$.

b) L'ensemble $\mathcal{D}_n$ est-il un sous espace-vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

4. ***a)*** Soit (x, y, z) un élément de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si les nombres x et y sont non nuls.

b) En déduire que l'ensemble $\mathcal{D}_2$ ne contient pas d'autre élément que les matrices triangulaires de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

5. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{D}_3$.

Cette matrice est-elle diagonalisable ?

6. Pour tout t réel, on considère la matrice $M(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1+t \\ 0 & 2 & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t \end{pmatrix}$.

a) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de la matrice $M(t)$ selon la valeur de t.
En déduire les valeurs de t pour lesquelles la matrice $M(t)$ appartient à $\mathcal{D}_3$.

b) Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la matrice $M(t)$ est diagonalisable.

Partie II. Matrices nilpotentes

Une matrice M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est *nilpotente* si, et seulement si, il existe un entier naturel p non nul tel que la matrice M^p soit la matrice nulle.

7. Soit M une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Montrer que 0 est une valeur propre de M et que c'est la seule valeur propre de M.

8. Soit M une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On va prouver par l'absurde que M^3 est la matrice nulle. Pour cela, on suppose que M^3 n'est pas la matrice nulle.
Notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice M dans la base $\mathscr{B}$.

a) Montrer les inclusions $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(u^2)$ et $\mathrm{Ker}(u^2) \subset \mathrm{Ker}(u^3)$.

b) Montrer que les noyaux $\ker(u^2)$ et $\ker(u^3)$ ne peuvent pas être égaux. Pour cela, montrer que dans le cas contraire, le noyau de u^2 est égal à celui de u^i pour tout entier i supérieur ou égal à 2, et en tirer une contradiction.

c) Montrer que les noyaux $\ker(u)$ et $\ker(u^2)$ ne peuvent pas être égaux non plus.

d) Conclure en considérant la dimension des noyaux mentionnés ci-dessus.

9. Soit (a, b, c, d, e, f) un élément de $\mathbb{R}^6$. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On définit les réels $\gamma(M) = ac + df + be$ et $\delta(M) = bcf + ade$.

a) Établir l'égalité $M^3 = \gamma(M)M + \delta(M)I_3$.

b) Montrer que la matrice M est nilpotente si et seulement si $\gamma(M)$ et $\delta(M)$ sont nuls.

c) On suppose que a, b et d sont égaux à 1.
Justifier qu'il existe une infinité de choix pour le triplet (c, e, f) de $\mathbb{R}^3$ pour lesquels la matrice M est nilpotente.

d) En déduire que l'ensemble $\mathcal{D}_3$ contient une infinité de matrices nilpotentes qui ne sont pas triangulaires.

e) Exhiber une matrice de $\mathcal{D}_3$ dont tous les coefficients sont non nuls.

Problème

On définit la fonction I d'une variable réelle x par : $I(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{xt} + \mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$.

Partie I : Une inégalité de Taylor-Lagrange

1. Soit $u \in [0, +\infty[$. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[0, +\infty[$, on a :

$$f(u) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, u^k + \int_0^u \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}\, (u-y)^n\, dy$$

2. Soit $u \in [0, +\infty[$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[0, +\infty[$. En déduire :

$$\left| f(u) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, u^k \right| \;\leqslant\; \frac{u^{n+1}}{(n+1)!}\, M$$

où $M = \displaystyle\max_{y \in [0,u]} \left(\left| f^{(n+1)}(y) \right| \right)$.

Cette inégalité est appelée **inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre** n **de la fonction** f.

Partie II : Une autre expression de $I(x)$

3. Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$ converge.

On note alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $W_k = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$.

4. ***a)*** Soit $k \in \mathbb{N}$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer : $W_k - W_{k+2} = \dfrac{1}{k+1} W_{k+2}$.

b) On admet : $W_0 = \dfrac{\pi}{2}$. Montrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $W_{2k} = \dfrac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\, \dfrac{\pi}{2}$.

5. ***a)*** Montrer que la fonction I est définie sur $\mathbb{R}$ et préciser sa parité.

b) Donner la valeur de $I(0)$.

6. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

a) Soient $t \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$.

(i) Démontrer : $\forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)} : y \mapsto \mathrm{e}^y + (-1)^k\, \mathrm{e}^{-y}$.

(ii) Soit $u \in [0, +\infty[$. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange (**Partie I**) à l'ordre $2n$ appliquée à la fonction $f : y \mapsto \mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}$, montrer :

$$\left| \mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(2k)!}\, u^{2k} \right| \;\leqslant\; \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}\, (\mathrm{e}^u - \mathrm{e}^{-u})$$

<u>Indication</u> : on pensera à découper la somme obtenue en appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange en deux sommes : l'une ne comportant que les termes d'indice pair, l'autre ne comportant que les termes d'indice impair.

(iii) En déduire :

$$\left| \mathrm{e}^{xt} + \mathrm{e}^{-xt} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2(xt)^{2k}}{(2k)!} \right| \;\leqslant\; \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\, \mathrm{e}^x$$

b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$: $\left| I(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{2x^{2k}}{(2k)!}\ W_{2k} \right| \ \leqslant\ \dfrac{x^{2n+1}\pi}{2(2n+1)!}\ \mathrm{e}^{x}$.

c) En déduire que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \dfrac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}$ converge et que l'on a : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} = \dfrac{1}{\pi}\ I(x)$.

Partie III : Équivalent de $I(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

7. Montrer, pour tout x de $\mathbb{R}_+$: $0 \ \leqslant\ \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}\ dt \ \leqslant\ \frac{\pi}{2}$.

8. a) Montrer, pour tout v de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$: $1 \ \leqslant\ \dfrac{1}{1-v} \ \leqslant\ (1+v)^2$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer, à l'aide du changement de variable $u = 1 - t$:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{xt}}{\sqrt{1-t^2}}\ dt \ = \ \frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}\sqrt{1-\dfrac{u}{2}}}\ du$$

c) En déduire, pour tout x de $\mathbb{R}_+$:

$$\frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\ du \ \leqslant\ \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{xt}}{\sqrt{1-t^2}}\ dt \ \leqslant\ \frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\ du + \frac{\mathrm{e}^{x}}{2\sqrt{2}} \int_0^1 \mathrm{e}^{-xu}\sqrt{u}\ du$$

9. a) **Seulement pour les cubes**

Démontrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-t^2}\ dt$ sont convergentes et :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-t^2}\ dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. À l'aide du changement de variable $t = \sqrt{xu}$, montrer :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\ du \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}} \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 \mathrm{e}^{-xu}\sqrt{u}\ du \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2x\sqrt{x}}$$

10. En déduire : $I(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{x}\sqrt{\pi}}{\sqrt{2x}}$.

Partie IV : Une application en probabilités

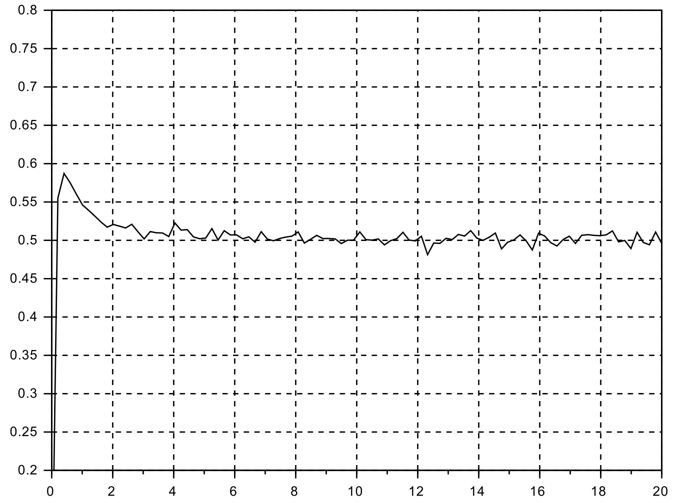
Dans cette partie, λ désigne un réel strictement positif.
On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, suivant toutes les deux la loi de Poisson de paramètre λ.
On s'intéresse à la probabilité de l'événement $[X = Y]$.

10. a) **Seulement pour les cubes**

Écrire une fonction **Python** d'en-tête `def estime(lambda)` qui, prenant en argument un réel `lambda` strictement positif, simule un grand nombre de fois les variables aléatoires X et Y, et renvoie une estimation de $\mathbb{P}([X = Y])$.
On rappelle que l'instruction `nr.poisson(lambda)` de la bibliothèque `numpy.random` simule la loi de Poisson de paramètre `lambda`.

b) **Seulement pour les cubes**

Grâce à la fonction précédente, on trace, en fonction de λ, une estimation de $\sqrt{\pi\lambda}\ \mathbb{P}([X = Y])$ pour $\lambda \in \,]0, 20]$ et on obtient le graphe suivant :



À la vue de ce graphe, proposer un équivalent de $\mathbb{P}([X = Y])$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

11. Montrer : $\mathbb{P}([X = Y]) = \mathrm{e}^{-2\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}$.

12. ***a)*** Exprimer $\mathbb{P}([X = Y])$ en fonction de λ et de la fonction I.

b) En déduire un équivalent de $\mathbb{P}([X = Y])$ lorsque λ tend vers $+\infty$.