DS6 (version A)

Exercice 1 (EML 2014)

On considère l'espace $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices d'ordre 2 à coefficients réels. On définit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et que (A, B, C) est une base de $\mathcal{E}$.

Démonstration.

- Par définition de $\mathcal{E}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\,(A, B, C) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } \mathcal{E} \text{ est un espace vectoriel et la famille } (A,B,C) \text{ engendre } \mathcal{E}.}$$

- Montrons que la famille (A, B, C) est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons : $\lambda_1 \cdot A + \lambda_2 \cdot B + \lambda_3 \cdot C = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$ $(*)$.

$$\begin{aligned} \text{Or :} \quad (*) &\Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \right. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La famille } (A,B,C) \text{ est donc libre.}}$$

- La famille (A, B, C) est :
  × libre,
  × génératrice de $\mathcal{E}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la famille } (A,B,C) \text{ est une base de } \mathcal{E}.}$$

Commentaire

- Il est relativement fréquent de trouver dans les sujets de concours des ensembles de matrices écrites à l'aide de paramètres. Lorsque c'est le cas, on trouve généralement une ou plusieurs questions consistant à démontrer la stabilité de ces ensembles (comme c'est le cas ici en question ***2.*** et ***3.***). Il faut donc être à l'aise sur la compréhension et la manipulation de tels ensembles. Ici, l'ensemble $\mathcal{E}$ n'est autre que l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 triangulaires supérieures.
- Dans l'énoncé, on demande de démontrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel engendrée par la famille (A, B, C). Cette famille étant fournie, l'écriture $\mathcal{E} = \text{Vect}\,(A, B, C)$ (c'est le caractère générateur de la famille) permet de démontrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel. Il faut privilégier cette démonstration à celle qui consiste à vérifier les propriétés axiomatiques de la notion d'espace vectoriel. Cependant cette manière de procéder doit aussi être connue car l'ensemble étudié ne se décrit pas toujours naturellement comme espace vectoriel engendré par une partie.
- Rappelons ci-dessous la rédaction.

(i) $\mathcal{E} \subset \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

(ii) $\mathcal{E} \neq \varnothing$ car $0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$.

(iii) Démontrons que $\mathcal{E}$ est stable par combinaisons linéaires.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(M, N) \in \mathcal{E}^2$.

× Comme $M \in \mathcal{E}$, il existe $(a_1, b_1, c_1) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}$.

× Comme $N \in \mathcal{E}$, il existe $(a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $N = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$.

Démontrons que $\lambda \cdot M + \mu \cdot N \in \mathcal{E}$. On a :

$$\lambda \cdot M + \mu \cdot N \ = \ \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} \lambda\, a_1 + \mu\, a_2 & \lambda\, b_1 + \mu\, b_2 \\ 0 & \lambda\, c_1 + \mu\, c_2 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$$

avec : $(\alpha, \beta, \gamma) = (\lambda\, a_1 + \mu\, a_2, \lambda\, b_1 + \mu\, b_2, \lambda\, c_1 + \mu\, c_2) \in \mathbb{R}^3$.

$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{E} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$

□

2. Établir que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication, c'est à dire :

$$\forall (M, N) \in \mathcal{E}^2, MN \in \mathcal{E}$$

Démonstration.
Soit $(M, N) \in \mathcal{E}^2$. Il existe donc $(a_1, b_1, c_1) \in \mathbb{R}^3$ et $(a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$$

On obtient alors :

$$MN = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\, a_2 & a_1\, b_2 + b_1\, c_2 \\ 0 & c_1\, c_2 \end{pmatrix} = a_1\, a_2 \cdot A + (a_1\, b_2 + b_1\, c_2) \cdot B + c_1\, c_2 \cdot C$$

Donc $MN \in \text{Vect}\,(A, B, C)$. D'où $MN \in \mathcal{E}$.

$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{E} \text{ est bien stable par multiplication.}}$

Commentaire

On pouvait aussi rédiger autrement :

$$MN = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\,a_2 & a_1\,b_2 + b_1\,c_2 \\ 0 & c_1\,c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$$

avec $(\alpha, \beta, \gamma) = (a_1\,a_2, a_1\,b_2 + b_1\,c_2, c_1\,c_2) \in \mathbb{R}^3$.

□

3. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, si M est inversible alors $M^{-1} \in \mathcal{E}$.

Démonstration.
Soit $M \in \mathcal{E}$. Il existe donc $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

- Rappelons tout d'abord :

$$M \text{ est inversible } \Leftrightarrow \det(M) \neq 0 \Leftrightarrow a \times c - 0 \times b \neq 0 \Leftrightarrow ac \neq 0$$

Commentaire

On se sert ici de la caractérisation de l'inversibilité des matrices carrées d'ordre 2. On pouvait aussi tout simplement remarquer que la matrice M est triangulaire (supérieure). Ainsi, elle est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

- Supposons M inversible, c'est-à-dire $ac \neq 0$. Dans ce cas :

$$M^{-1} = \frac{1}{ac} \begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \frac{c}{ac} \cdot A - \frac{b}{ac} \cdot B + \frac{a}{ac} \cdot C \in \mathcal{E}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, si } M \in \mathcal{E} \text{ est inversible, } M^{-1} \in \mathcal{E}.}$$

Commentaire

Attention, on ne montre pas dans cette question que toutes les matrices de $\mathcal{E}$ (c'est-à-dire les matrices carrées d'ordre 2 triangulaires supérieures) sont inversibles !
On démontre simplement que, si une matrice triangulaire supérieure est inversible, alors son inverse est aussi triangulaire supérieure. C'est à nouveau une propriété de stabilité : $\mathcal{E}$ est stable par passage à l'inverse.

□

Pour toute matrice de $\mathcal{E}$, on note $f(M) = TMT$.

4. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

Démonstration.

- Démontrons que f est linéaire.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(M_1, M_2) \in \mathcal{E}^2$.

$$\begin{array}{rcll} f(\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2) & = & T\ (\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2)\ T & \\ & = & (\lambda_1 \cdot TM_1 + \lambda_2 \cdot TM_2)\ T & \textit{(par distributivité à gauche de } \times \textit{ sur } +) \\ & = & \lambda_1 \cdot TM_1T + \lambda_2 \cdot TM_2T & \textit{(par distributivité à droite de } \times \textit{ sur } +) \\ & = & \lambda_1 \cdot f(M_1) + \lambda_2 \cdot f(M_2) & \end{array}$$

- Démontrons que f est à valeurs dans $\mathcal{E}$.
  Soit $M \in \mathcal{E}$.
  Remarquons tout d'abord : $T = A + B + C \in \text{Vect}(A, B, C)$. Ainsi $T \in \mathcal{E}$.
  On en déduit, par stabilité de $\mathcal{E}$ par multiplication (question ***3.***) : $TM \in \mathcal{E}$.
  Enfin : $f(M) = TMT = (TM)\,T \in \mathcal{E}$ en utilisant une nouvelle fois la question ***3.***

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est donc un endomorphisme de } \mathcal{E}.}$$

Commentaire

La rédaction choisie ici pour le deuxième point démontre une prise de recul par rapport aux questions précédentes. Cependant, il est aussi possible de résoudre cette question en effectuant un calcul. Plus précisément, si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, alors :

$$f(M) \;=\; TMT \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} a & b+c \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} a & a+b+c \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$$

□

5. Vérifier que T est inversible et démontrer que f est un automorphisme de $\mathcal{E}$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $\det(T) = 1 \times 1 - 0 \times 1 = 1 \neq 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la matrice } T \text{ est inversible.}}$$

(l'inverse de T est : $T^{-1} = \dfrac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$)

- Déterminons $\text{Ker}(f)$.
  Soit $M \in \mathcal{E}$.

$$\begin{array}{rcl} M \in \text{Ker}(f) & \Leftrightarrow & f(M) \;=\; 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow & TMT \;=\; 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow & T^{-1}TMT \;=\; T^{-1} \times 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \quad \big(= 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\big) \\ & \Leftrightarrow & MTT^{-1} \;=\; 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \times T^{-1} \quad \big(= 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\big) \\ & \Leftrightarrow & M \;=\; 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \end{array}$$

  Donc $\text{Ker}(f) = \{0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\}$ et l'endomorphisme f est injective.

- Enfin, comme f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$ de dimension **finie** :

$$f \text{ est injective} \;\Leftrightarrow\; f \text{ est bijective}$$

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est donc un automorphisme de } \mathcal{E}.}$$

Commentaire

- On utilise ici un cas particulier de la proposition suivante :
  Soient E et F des espaces vectoriels de dimensions **finies** tels que $\dim(E) = \dim(F)$.
  Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors :

$$f \text{ bijective} \;\Leftrightarrow\; f \text{ injective} \;\Leftrightarrow\; f \text{ surjective}$$

- Attention à ne pas confondre :
  × $T \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, matrice qui intervient dans la définition de f.
  × $F \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, matrice représentative de f dans la base (A, B, C) (*cf* question **7.**).

□

6. Est-ce que T est diagonalisable ?

Démonstration.

- La matrice T étant triangulaire supérieure, ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Sp}(T) = \{1\}.}$$

- Démontrons que T n'est pas diagonalisable. On procède par l'absurde.
  Supposons que T est diagonalisable.
  Il existe donc une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de T telles que $T = PDP^{-1}$.
  Or 1 est la seule valeur propre de T. Ainsi $D = I$ et :

$$T \ = \ P\, I_3\, P^{-1} \ = \ P\, I_3\, P^{-1} \ = \ I_3$$

  Absurde !

$$\boxed{\text{La matrice } T \text{ n'est donc pas diagonalisable.}}$$

□

On note F la matrice de f dans la base (A, B, C) de $\mathcal{E}$.

7. Calculer $f(A), f(B), f(C)$ en fonction de (A, B, C) et en déduire F.

Démonstration.

- $f(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ = \ 1 \cdot A + 1 \cdot B + 0 \cdot C.$

  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{(A,B,C)}\big(f(A)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

- $f(B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ = \ 0 \cdot A + 1 \cdot B + 0 \cdot C.$

  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{(A,B,C)}\big(f(B)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

- $f(C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ = \ 0 \cdot A + 1 \cdot B + 1 \cdot C.$

  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{(A,B,C)}\big(f(C)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$$\boxed{\text{Donc } F = \mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

□

8. Montrer que f admet une valeur propre et une seule et déterminer celle-ci, puis déterminer une base et la dimension du sous-espace propre pour f associé à cette valeur propre.

Démonstration.

- Rappelons tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} \lambda \text{ valeur propre de } f & \Leftrightarrow & \lambda \text{ valeur propre de } F \\ & \Leftrightarrow & F - \lambda\, I_3 \text{ n'est pas inversible} \end{array}$$

- Or on a :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{rg}(F - \lambda\, I_3) & = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) \\ & \underset{}{\overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=}} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) \\ & \overset{L_2 \leftarrow L_2 - (1-\lambda)\, L_1}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -(1-\lambda)^2 & -(1-\lambda) \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure.
Elle est non inversible si et seulement si l'un de ses coefficients diagonaux est nul. Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} F - \lambda\, I \text{ non inversible} & \Leftrightarrow & 1 = 0 \ \texttt{OU} \ -(1-\lambda)^2 = 0 \ \texttt{OU} \ -(1-\lambda) = 0 \\ & \Leftrightarrow & (1-\lambda) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \lambda = 1 \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(F) = \{1\}.}$$

- Déterminons $E_1(f)$, le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 1.

Soit $M \in \mathcal{E}$. Alors il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C$.

Autrement dit : $U = \mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(M) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} M \in E_1(f) & \Leftrightarrow & (f - \mathrm{id}_{\mathcal{E}})(M) = 0_{\mathcal{E}} \\ & \Leftrightarrow & (F - I_3)(U) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} & & 0 & = & 0 \\ a & + & c & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \ a = -c \right. \end{array}$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} E_1(f) & = & \{M \in \mathcal{E} \mid (f - \mathrm{id}_{\mathcal{E}})(M) = 0_{\mathcal{E}}\} \\ & = & \{a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C \mid a = -c\} \\ & = & \{-c \cdot A + b \cdot B + c \cdot C \mid (b, c) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \{c \cdot (-A + C) + b \cdot B \mid (b, c) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \mathrm{Vect}\,(-A + C, B) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } E_1(f) = \mathrm{Vect}\,(-A + C, B).}$$

- La famille $(-A+C, B)$ est :
  - × génératrice de $E_1(f)$,
  - × libre car constituée de deux matrices non colinéaires.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en conclut que la famille } (-A+C, B) \text{ est une base de } E_1(f) \text{ et ainsi :} \\ \dim\big(E_1(f)\big) = \mathrm{Card}(-A+C, B) = 2.\end{array}}$$

□

Commentaire

- Il faut faire attention aux objets manipulés. On doit déterminer $E_1(f) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathcal{E}})$, noyau d'un endomorphisme de $\mathcal{E}$. On doit donc obtenir un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$. Si $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $U = \mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(M) \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ sont bien deux représentations différentes de la même matrice M, cela n'autorise pas pour autant à écrire l'égalité entre ces deux éléments :

$$\underbrace{a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C}_{\in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \ \cancel{=} \ \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{\in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad \underbrace{\mathrm{Vect}\,(-A+C, B)}_{E_1(f)} \ \cancel{=} \ \underbrace{\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}_{E_1(F)}$$

- Il faut s'habituer à déterminer les ensembles $E_\lambda(F)$ par lecture de la matrice $F - \lambda I$.

  Illustrons la méthode avec la matrice de l'exercice et $\lambda = 1$.

  On cherche les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $E_1(F)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que : $(F - I_3)\, X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.

  Or :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= x \cdot C_1 + y \cdot C_2 + z \cdot C_3 \\ &= x \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  Pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ à l'aide de cette combinaison linéaire, il y a deux possibilités :

  - × si $x = 0$ alors forcément $z = 0$ car sinon on crée un coefficient non nul en $2^{\text{ème}}$ position de la combinaison linéaire. Enfin, si $x = z = 0$, alors toute valeur de y convient pour créer une combinaison linéaire nulle. On peut prendre par exemple $y = 1$. Ainsi :

$$E_1(F) \ \supset \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

  - × si $x \neq 0$ alors forcément $z = -x$. En prenant par exemple $x = 1$ on obtient :

$$E_1(F) \ \supset \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

  Finalement : $E_1(F) \ \supset \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

  Et l'égalité est vérifiée pour des raisons de dimension (il est simple de démontrer : $\mathrm{rg}(F - I_3) = 1$ ce qui permet de conclure, par théorème du rang : $\dim\big(E_1(F)\big) = 2$.

9. Est-ce que f est diagonalisable ?

Démonstration.
D'après ce qui précède, f admet 1 comme une unique valeur propre. Or :

$$\dim\left(E_1(f)\right) = 2 \neq 3 = \dim\left(\mathcal{E}\right)$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

Commentaire

On pouvait aussi procéder par l'absurde comme en question ***6***. Rappelons la rédaction.
Supposons que f est diagonalisable. Alors $F = \mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(f)$ l'est également.
Il existe donc une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de F telles que $F = PDP^{-1}$.
Or 1 est la seule valeur propre de F. Ainsi $D = I$ et $F = P\,D\,P^{-1} = P\,I_3\,P^{-1} = I_3$.
Absurde ! □

10. Soit λ un réel différent de 1. Résoudre l'équation $f(M) = \lambda M$, d'inconnue $M \in \mathcal{E}$.

Démonstration.
Soit $M \in \mathcal{E}$. Deux cas se présentent.

- Si $M = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$ alors $f(M) = f\left(0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\right) = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$ car f est linéaire.
  Et comme : $\lambda\, 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$ alors $M = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$ est bien solution de l'équation.
- Si $M \neq 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$ alors on a :

$$\begin{array}{rcl} f(M) = \lambda M & \Leftrightarrow & \lambda \text{ est valeur propre de } f \\ & \Leftrightarrow & \lambda = 1 \end{array}$$

Comme on a supposé $\lambda \neq 1$, l'équation $f(M) = \lambda M$ n'a pas de solution si $M \neq 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{\text{Si } \lambda \neq 1, \text{ l'unique solution de l'équation } f(M) = \lambda\, M \text{ est } M = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}.}$$ □

Commentaire

Il était aussi possible de résoudre directement l'équation $f(M) = \lambda M$.
Détaillons la rédaction. Comme $M \in \mathcal{E}$, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl}
f(M) = \lambda M & \Longleftrightarrow & TMT = \lambda M \\[1ex]
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} a & a+b+c \\ 0 & c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \\[2ex]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} (1-\lambda)\, a & & & & & = & 0 \\ a & + & (1-\lambda)\, b & + & c & = & 0 \\ & & & & (1-\lambda)\, c & = & 0 \end{array} \right. \\[4ex]
& \underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{1-\lambda} L_1 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{1-\lambda} L_3}}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} a & & & & & = & 0 \\ a & + & (1-\lambda)\, b & + & c & = & 0 \\ & & & & c & = & 0 \end{array} \right. \\[4ex]
& \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} a & & & = & 0 \\ (1-\lambda)\, b & + & c & = & 0 \\ & & c & = & 0 \end{array} \right. \\[4ex]
& \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 0 \\ (1-\lambda)\, b & = & 0 \\ c & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ a = b = c = 0 \right.
\end{array}$$

On en conclut : $M = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$.

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11. Calculer H^2, puis pour tout a de $\mathbb{R}$ et tout n de $\mathbb{N}$, $(I + aH)^n$.

Démonstration.

- Tout d'abord :
$$H^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
On en déduit, par une récurrence immédiate, que pour tout $k \geqslant 2$, $H^k = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$.
(ou alors on remarque : $\forall k \geqslant 2$, $H^k = H^2 \ H^{k-2} = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \ H^{k-2} = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$)
- Soit $a \in \mathbb{R}$.
Les matrices I et $a\,H$ commutent car I commute avec toutes les matrices carrée du même ordre.
- Soit $n \geqslant 1$. D'après la formule du binôme de Newton :
$$\begin{aligned}
(I + aH)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^{n-k}\,(aH)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\,H^k && \textit{(car : } \forall k \in [\![0, n]\!],\ I^{n-k} = I\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} a^k\,H^k + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} a^k\,H^k && \textit{(cette décomposition est valide car } n \geqslant 1\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} a^k\,H^k && \textit{(car : } \forall k \geqslant 2,\ H^k = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\textit{)} \\
&= \binom{n}{0} a^0\,H^0 + \binom{n}{1} a^1\,H^1 \\
&= I + a\,n\,H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ na & 1 & na \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$
- De plus : $(I + aH)^0 = I$ et $I + a \times 0 \cdot H = I$.
La formule précédente reste valable pour $n = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \forall n \in \mathbb{N},\ (I + a\,H)^n = I + a\,n\,H.}$$

Commentaire

- La relation de Chasles stipule que pour tout $(m, p, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leqslant p \leqslant n$:
$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$
(la somme la plus à droite est nulle si $p = n$)
où (u_n) est une suite quelconque de réels ou de matrices.
- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 0$ et $p = 1$.
L'argument $n \geqslant 1$ est donc essentiel pour découper la somme.
Le cas $n = 0$ doit donc être traité à part.
- Ici, la matrice H vérifie : $\forall k \geqslant 2$, $H^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Elle est dite nilpotente d'indice 2 (ce terme n'est pas au programme et il est préférable de ne pas l'utiliser dans une copie). Si elle avait été nilpotente d'ordre 3, il aurait fallu traiter à part les cas $n = 0$ et $n = 1$ (le découpage de la somme est alors valable pour $n \geqslant 2$). □

12. Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, F^n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On remarque que : $F = I + H = I + 1 \cdot H$.
D'après la question ***9.*** appliquée à $a = 1$, on obtient : $F^n = I + 1 \times n \cdot H$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ F^n = I + n\,H.}$$

□

13. Trouver une matrice G de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $G^3 = F$.
Existe-t-il un endomorphisme g de $\mathcal{E}$ tel que $g \circ g \circ g = f$?

Démonstration.

- D'après la question ***9.***, pour tout $a \in \mathbb{R}$: $(I + a\,H)^3 = I + 3\,a\,H$.
  Or $F = I + 1 \cdot H$. Donc, en choisissant $a = \dfrac{1}{3}$, on obtient :

$$\left(I + \frac{1}{3}\,H\right)^3 = I + 3 \times \frac{1}{3} \cdot H = I + H = F$$

$$\boxed{\text{Donc en posant } G = I + \frac{1}{3}\,H, \text{ on obtient : } G^3 = F.}$$

- On rappelle que $F = \mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(f)$.
  On considère alors l'endomorphisme $g \in \mathscr{L}(\mathcal{E})$ tel que $\mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(g) = G$.
  D'après la relation du point précédent, on obtient :

$$\mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(g^3) = \big(\mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(g)\big)^3 = G^3 = F = \mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(f)$$

  L'application $\mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(.)$ étant un isomorphisme, on obtient, par injectivité : $g^3 = f$.

$$\boxed{\text{On a donc bien exhibé un endomorphisme } g \text{ de } \mathcal{E} \text{ tel que } g \circ g \circ g = f.}$$

Commentaire

Il faut retenir le schéma classique développé dans cette question :
(i) on démontre une propriété sous forme matricielle,
(ii) on en déduit une propriété sur les endomorphismes par la passerelle matrice / endomorphisme.

□

Exercice 2 (HEC 2014)

- La fonction de répartition de la loi normale centrée réduite est notée Φ. On rappelle :

$$\Phi : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\ dt \end{array} \right. \qquad \text{où} \qquad \varphi : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \end{array} \right.$$

- La notation exp désigne la fonction exponentielle.

Un équivalent d'une intégrale

1. Soit N la fonction définie sur l'intervalle $[0,1[$, à valeurs réelles, telle que :

$$N(x) = x^2 - 2x - 2(1-x)\ln(1-x)$$

a) Montrer que la fonction N est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.

Démonstration.
La fonction $T : x \mapsto \ln(1-x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$ car est la composée $T = T_2 \circ T_1$:
× $T_1 : x \mapsto 1-x$ qui est :
- de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$ car polynomiale,
- telle que $T_1\big([0,1[\big) =]0,1] \subset]0,+\infty[$.

× $T_2 : x \mapsto \ln(x)$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

On en déduit que N est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$ par somme et produit de fonctions qui le sont (les autres fonctions en jeu sont polynomiales). □

b) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a : $\ln(1-x) \leqslant -x$.

Démonstration.
Considérons la fonction $T : x \mapsto \ln(1-x)$ précédente.
- En procédant comme dans la question précédente, on démontre que T est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1[$. De plus, pour tout $x \in [0,1[$:

$$T'(x) = \frac{-1}{1-x} \qquad \text{et} \qquad T''(x) = \frac{-1}{(1-x)^2}$$

On en déduit que : $\forall x \in [0,1[$, $T''(x) < 0$.
La fonction f est donc concave sur $[0,1[$.
- Ainsi, la courbe représentative de T est située sous ses tangentes.
Or, la tangente de f au point d'abscisse 0 est la droite d'équation $y = T(0) + T'(0)\ x = -x$.

On en conclut : $\forall x \in [0,1[$, $\ln(1-x) \leqslant -x$.

Commentaire

- On doit toujours penser à utiliser une inégalité de convexité lorsque l'on compare une fonction f ($x \mapsto \ln(1-x)$ ici) à une fonction affine (*i.e.* de la forme $x \mapsto ax+b$).
- Une approche plus basique de la question consiste à considérer la fonction :

$$x \mapsto \ln(1-x) + x$$

en faire l'étude, et démontrer qu'elle est négative sur $[0,1[$. □

c) On note N' la fonction dérivée de la fonction N. Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a $N'(x) \leqslant 0$.

Démonstration.
Soit $x \in [0,1[$.

$$\begin{array}{rcl} N'(x) & = & 2x - 2 - 2 \left(- \ln(1-x) + (1-x) \, \dfrac{-1}{1-x} \right) \\ & = & 2x - \cancel{2} + 2 \, \ln(1-x) + \cancel{2} \\ & = & 2 \, (\ln(1-x) + x) \, \leqslant \, 0 \end{array}$$

car d'après la question précédente, $\ln(1-x) + x \leqslant 0$ sur $[0,1[$.

$$\boxed{\forall x \in [0,1[, \quad N'(x) \leqslant 0}$$

□

d) En déduire pour tout $x \in [0,1[$, un encadrement de $N(x)$.

Démonstration.

- La fonction N est :
  - × continue sur $[0,1[$ d'après la question ***1.a)***.
  - × strictement décroissante sur $[0,1[$ (l'inégalité de la question ***1.b)*** est stricte sur $]0,1[$).

  On en déduit :

  $$N\big([0,1[\big) \; = \; \Big] \lim_{x \to 1} N(x), N(0) \Big] \; = \;]-1, 0]$$

  En effet :
  - × en posant le changement de variable $h = 1 - x$:

    $$\lim_{x \to 1} (1-x) \, \ln(1-x) \; = \; \lim_{h \to 0} h \, \ln(h) \; = \; 0$$

    et ainsi $\displaystyle\lim_{x \to 1} N(x) = 1 - 2 - 0 = -1$.
  - × $N(0) = 0 - 2 \, \ln(1) = 0$.
- Ainsi, pour tout $x \in]0,1[$: $-1 < N(x) < 0$.

$$\boxed{\forall x \in [0,1[, \quad -1 \leqslant N(x) < 0}$$

Commentaire

- On utilise ici le fait que l'image d'un intervalle par une application continue strictement monotone est un intervalle de **même nature**.
- Ce résultat est classiquement utilisée dans la rédaction des questions qui utilisent le théorème de la bijection.

□

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0,1[$, à valeurs réelles, telle que : $f(x) = -2\ \dfrac{x + \ln(1-x)}{x^2}$.

a) Rappeler le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1-x)$.

Démonstration.
La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1[$.
Elle admet donc un développement limité à l'ordre 2 en 0 donné par :

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & f(0) + f'(0)\ x + \dfrac{f''(0)}{2}\ x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \\ & = & -x - \dfrac{1}{2}\ x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \end{array}$$

en utilisant les formules de la question ***1.b)***.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \text{ dans un voisinage de } 0,\ f(x) = -x - \frac{1}{2}\ x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).}$$

□

b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. En déduire que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.
On note encore f la fonction ainsi prolongée.

Démonstration.

- D'après la question précédente, pour tout x dans un voisinage de 0 :

$$x + \ln(1-x) = -\frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

- On en déduit : $x + \ln(1-x) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{1}{2}x^2$.
  Et ainsi, par compatibilité avec le produit et le quotient de l'opérateur d'équivalence :

$$f(x) = -2\ \frac{x + \ln(1-x)}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} -2\ \frac{-\frac{1}{2}\ x^2}{x^2} = 1$$

  On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

$$\boxed{\text{On prolonge } f \text{ par continuité en } 0 \text{ en posant } f(0) = 1.}$$

□

c) Sous réserve d'existence, on note f' la fonction dérivée de f.
Montrer que pour tout $x \in\ ]0,1[$, on a : $f'(x) = -2\dfrac{N(x)}{x^3\,(1-x)}$.

Démonstration.

- La fonction $f : x \mapsto -2\ \dfrac{x + \ln(1-x)}{x^2}$ est dérivable sur $]0,1[$ car elle est le quotient $f = -2\ \dfrac{f_1}{f_2}$:
  × $f_1 : x \mapsto x + \ln(1-x)$ dérivable sur $]0,1[$,
  × $f_2 : x \mapsto x^2$ dérivable sur $]0,1[$ car polynomiale et qui **ne s'annule pas** sur cet intervalle.

- Soit $x \in \,]0,1[$. Alors :

$$\begin{array}{rcll}
f'(x) & = & -2 \, \dfrac{(1 - \frac{1}{1-x}) \times x^2 - (x + \ln(1-x)) \times (2x)}{x^4} & \\[2ex]
& = & -2 \, \dfrac{\frac{-x}{1-x} \times x - (x + \ln(1-x)) \times 2}{x^4} \times x & \textit{(en factorisant par } x\textit{)} \\[2ex]
& = & -2 \, \dfrac{-x^2 - (x + \ln(1-x)) \times 2 \times (1-x)}{(1-x) \; x^3} & \textit{(en multipliant en haut et en bas par } (1-x)\textit{)} \\[2ex]
& = & -2 \, \dfrac{-x^2 - 2 \; (1-x) \; x - 2 \; (1-x) \ln(1-x))}{(1-x) \; x^3} & \\[2ex]
& = & -2 \, \dfrac{x^2 - 2x - 2 \; (1-x) \ln(1-x))}{(1-x) \; x^3} &
\end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \,]0,1[, \; f'(x) = -2 \, \dfrac{N(x)}{x^3 \; (1-x)}}$$

Commentaire

La formulation de la question (« sous réserve d'existence ») laisse penser que la démonstration de la dérivabilité n'était pas un attendu.

☐

d) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0,1[$.
En déduire que f réalise une bijection strictement croissante de $[0,1[$ dans $[1,+\infty[$.

Démonstration.
Soit $x \in [0,1[$.

- D'après la question ***1.d)***, $N(x) < 0$. Ainsi, $-2N(x) > 0$ et $f'(x)$ est du signe de $x^3 \; (1-x)$.
Enfin, si $x \in \,]0,1[$, $x^3 > 0$ et $1 - x > 0$. On en déduit le tableau de variation suivant.

x	0		1
Signe de $f'(x)$	$\Vert$	$+$	$\Vert$
Variations de f	1	$\nearrow$	$+\infty$

Détaillons le calcul de limite en 1 :
$\lim\limits_{x \to 1} \ln(1-x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 1} \; -2(x + \ln(1-x)) = +\infty$ et ainsi $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$.

- La fonction f est :
  - × continue sur $[0,1[$,
  - × strictement croissante sur $[0,1[$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ réalise une bijection de } [0,1[\text{ sur } f\big([0,1[\big) = [1,+\infty[.}$$

☐

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0,1[$: $g_n(x) = \exp\left(-\dfrac{nx^2}{2} f(x)\right)$.

a) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g_n(x)\ dx$.

On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \displaystyle\int_0^1 g_n(x)\ dx$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Remarquons tout d'abord : $f(x) = -2\ \dfrac{x + \ln(1-x)}{x^2} \underset{x\to 1}{\sim} -2\ \ln(1-x)$.

  On en déduit : $-\dfrac{nx^2}{2} f(x) \underset{x\to 1}{\sim} nx^2\ \ln(1-x)$ et donc : $-\dfrac{nx^2}{2} f(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} -\infty$.

  $$\boxed{\text{Ainsi, par composition des limites : } \lim_{x\to 1} g_n(x) = 0.}$$

Commentaire

On peut détailler l'équivalent de f en 1 en formant le quotient suivant :

$$\frac{f(x)}{-2\ \ln(1-x)} = \frac{\cancel{-2}\ \frac{x+\ln(1-x)}{x^2}}{\cancel{-2}\ \ln(1-x)} = \frac{x+\ln(1-x)}{x^2\ \ln(1-x)} = \frac{1}{x\ \ln(1-x)} + \frac{1}{x^2} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0 + 1 = 1$$

- La fonction g_n est prolongeable par continuité en 1 en posant $g_n(1) = 0$.
  De plus, g_n est continue sur $[0,1[$ car elle est la composée $g_n = h_2 \circ h_1$ où :

  × $h_1 : x \mapsto -\dfrac{nx^2}{2}\ f(x)$ est :
    – continue sur $[0,1[$.
    – telle que : $h_1\big([0,1[\big) \subset \mathbb{R}$.

  × $h_2 : x \mapsto \exp(x)$ continue sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction } g_n \text{ étant continue sur \textbf{le segment} } [0,1]\text{, l'intégrale } \int_0^1 g_n(x)\ dx \text{ est bien définie.}}$$ □

b) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a : $0 \leqslant g_n(x) \leqslant \exp\left(-\dfrac{nx^2}{2}\right)$.

Démonstration.
Soit $x \in [0,1[$.

Tout d'abord	$f(x)$	$\geqslant$	1	*(d'après la question **2.d)**)*
donc	$-\dfrac{nx^2}{2}\ f(x)$	$\leqslant$	$-\dfrac{nx^2}{2}$	*(car* $-\dfrac{nx^2}{2} \leqslant 0$*)*
ainsi	$\exp\left(-\dfrac{nx^2}{2}\ f(x)\right)$	$\leqslant$	$\exp\left(-\dfrac{nx^2}{2}\right)$	*(car la fonction* exp *est croissante sur* $\mathbb{R}$*)*

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Enfin, comme la fonction exp est (strictement) positive sur son ensemble de définition,}\\ \text{on en déduit : } \forall x \in [0,1[,\ 0 \leqslant g_n(x) \leqslant \exp\left(-\dfrac{nx^2}{2}\right).\end{array}}$$ □

c) En déduire l'encadrement : $0 \leqslant I_n \leqslant \sqrt{\dfrac{2\pi}{n}} \left(\Phi\left(\sqrt{n}\right) - \dfrac{1}{2} \right)$.

Démonstration.

- D'après la question précédente et par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant 1$) :

$$0 \ \leqslant \ \int_0^1 g_n(x)\ dx \ \leqslant \ \int_0^1 \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right)\ dx$$

- On effectue alors le changement de variable $\boxed{u = \sqrt{n}\ x}$:

$$\left|\begin{array}{l} u = \sqrt{n}\ x \quad \text{(et donc } x = \frac{1}{\sqrt{n}}\ u\text{)} \\ \hookrightarrow du = \sqrt{n}\ dx \quad \text{et} \quad dx = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ du \\ \bullet\ x = 0 \ \Rightarrow\ u = 0 \\ \bullet\ x = 1 \ \Rightarrow\ u = \sqrt{n} \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car la fonction $\psi : u \mapsto \frac{1}{\sqrt{n}}\ u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \sqrt{n}]$.

- On obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right)\ dx &= \int_0^{\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{n}}\ du \ = \ \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{u^2}{2}}\ du \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{u^2}{2}}\ du \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \varphi(u)\ du \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{n}}\ \Big[\ \Phi(u)\ \Big]_0^{\sqrt{n}} \ = \ \sqrt{\frac{2\pi}{n}}\ \left(\Phi(\sqrt{n}) - \Phi(0)\right) \end{aligned}$$

Enfin, par parité de φ :

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\ du}_{=\,1} \ = \ 2 \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \varphi(u)\ du}_{=\,\Phi(0)}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } 0 \ \leqslant \ I_n \ \leqslant \ \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left(\Phi\left(\sqrt{n}\right) - \frac{1}{2} \right).}$$

□

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leqslant I_n \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Démonstration.

$$\begin{array}{llcll} \text{Tout d'abord} & \Phi(\sqrt{n}) & \leqslant & 1 & \textit{(car } \Phi \textit{ est une fonction de répartition)} \\ \text{donc} & \Phi(\sqrt{n}) - \frac{1}{2} & \leqslant & \frac{1}{2} & \\ \text{ainsi} & \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left(\Phi(\sqrt{n}) - \frac{1}{2}\right) & \leqslant & \sqrt{\frac{2\pi}{n}}\ \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2n}} & \textit{(en multipliant par } \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \geqslant 0\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{D'après la question précédente : } 0 \ \leqslant \ I_n \ \leqslant \ \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left(\Phi\left(\sqrt{n}\right) - \frac{1}{2}\right) \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.}$$

Commentaire

On raisonne ici par implication. En fait, la démarche de recherche (au brouillon) se fait plutôt par équivalence. On écrit alors :

$$\begin{array}{lrcll} & \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left(\Phi(\sqrt{n}) - \frac{1}{2}\right) & \leqslant & \sqrt{\frac{\pi}{2n}} & \textit{(ce qu'on souhaite obtenir)} \\ \Leftrightarrow & \Phi(\sqrt{n}) - \frac{1}{2} & \leqslant & \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\ \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \ = \ \frac{1}{2} & \textit{(car } \sqrt{\frac{n}{2\pi}} > 0\textit{)} \\ \Leftrightarrow & \Phi(\sqrt{n}) & \leqslant & 1 & \textit{(ce qui est vérifié pour tout } n\textit{)} \end{array}$$

□

4. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{\ln(n+2)}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 < v_n < 1$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{llcll} \text{Tout d'abord} & n+2 & \geqslant & 3 & \\ \text{donc} & \ln(n+2) & \geqslant & \ln(3) \ > \ \ln(\mathrm{e}) = 1 & \textit{(par stricte croissance de } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{ et car } 3 > e\textit{)} \\ \text{ainsi} & \frac{1}{\ln(n+2)} & < & 1 & \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \end{array}$$

Enfin, comme $\ln(n+2) > 1 > 0$, on a : $v_n = \dfrac{1}{\ln(n+2)} > 0$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < v_n < 1.}$$

□

b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $w_n = f(v_n)$.
Établir la convergence de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$; déterminer sa limite.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Comme $\ln(n+2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $v_n = \dfrac{1}{\ln(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- La fonction f admet une limite finie en 0 (elle est continue en 0), donc, par théoèreme composition des limites, la suite $(f(v_n))$ est convergente et admet la limite ℓ définie par :

$$\ell \ = \ \lim_{n\to+\infty} f(v_n) \ = \ \lim_{x\to 0} f(x) \ = \ 1$$

$$\boxed{\text{La suite } (w_n) \text{ est convergente de limite } \ell = 1.}$$

Commentaire

- Pour avoir tous les points, il faut citer très précisément le théorème de composition des limites : ne pas oublier de mentionner que f possède une limite finie en 0.
- Il n'y avait pas lieu ici d'utiliser le théorème de convergence monotone. Mais une majorité des candidats semble avoir opté pour ce choix. Détaillons ce raisonnement.
La suite (v_n) est décroissante. En effet :

Tout d'abord	$n+3 \geqslant n+2$	
donc	$\ln(n+3) \geqslant \ln(n+2)$	*(par croissance de la fonction* $\ln$ *sur* $]0,+\infty[$*)*
ainsi	$v_{n+1} = \dfrac{1}{\ln(n+3)} \leqslant \dfrac{1}{\ln(n+2)} = v_n$	*(par décroissance de la fonction inverse sur* $]0,+\infty[$*)*

- On en déduit que (w_n) est aussi décroissante. En effet :

	$0 < v_{n+1} \leqslant v_n < 1$	*(d'après ce qui précède et la question* ***4.a)****)*
donc	$f(v_{n+1}) \leqslant f(v_n)$	*(par croissance de la fonction* f *sur* $[0,1[$*)*

- La suite (w_n) est décroissante et minorée par 0.
Elle est donc convergente vers une limite ℓ qui vérifie $\ell \in [0,1]$.
(et on conclut avec le théorème de composition des limites)

$\square$

c) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les inégalités suivantes :

$$I_n \geqslant \int_0^{v_n} g_n(x)\ dx \geqslant \int_0^{v_n} \exp\left(-\frac{nx^2}{2} w_n\right)\ dx \geqslant \frac{1}{\sqrt{nw_n}} \int_0^{v_n\sqrt{nw_n}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord, par la relation de Chasles :

$$I_n \ = \ \int_0^1 g_n(x)\ dx \ = \ \int_0^{v_n} g_n(x)\ dx \ + \ \int_{v_n}^1 g_n(x)\ dx$$

  Or, comme $[v_n, 1] \subset [0, 1]$, on déduit de la question ***3.a)*** que pour tout $x \in [v_n, 1]$: $g_n(x) \geqslant 0$.
  Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($v_n \leqslant 1$) :

$$\int_{v_n}^1 g_n(x)\ dx \geqslant 0 \quad \text{et donc} \quad I_n \geqslant \int_0^{v_n} g_n(x)\ dx$$

- Considérons $x \in [0, v_n]$. Alors $0 \leqslant x \leqslant v_n$, et :

$$f(x) \ \leqslant \ f(v_n) = w_n \qquad \textit{(par croissance de la fonction } f\textit{)}$$

donc
$$-\frac{nx^2}{2} f(x) \ \geqslant \ -\frac{nx^2}{2}\ w_n \qquad \left(\textit{car } -\tfrac{nx^2}{2} \leqslant 0\right)$$

et
$$\exp\left(-\frac{nx^2}{2} f(x)\right) \ \geqslant \ \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\ w_n\right) \qquad \textit{(par croissance de la fonction } \exp\textit{)}$$

enfin
$$\int_0^{v_n} \exp\left(-\frac{nx^2}{2} f(x)\right)\ dx \ \geqslant \ \int_0^{v_n} \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\ w_n\right)\ dx$$

  Cette dernière étape est valide par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant v_n$).

- On effectue alors le changement de variable $\boxed{u = \sqrt{n\ w_n}\ x}$:

$$\left|\begin{array}{l} u = \sqrt{n\ w_n}\ x \quad (\text{et donc } x = \frac{1}{\sqrt{n\ w_n}}\ u) \\ \hookrightarrow du = \sqrt{n\ w_n}\ dx \quad \text{et} \quad dx = \dfrac{1}{\sqrt{n\ w_n}}\ du \\ \bullet\ x = 0 \ \Rightarrow \ u = 0 \\ \bullet\ x = v_n \ \Rightarrow \ u = \sqrt{n\ w_n}\ v_n \end{array}\right.$$

  Ce changement de variable est valide car la fonction $\psi : u \mapsto \frac{1}{\sqrt{n\, w_n}}\ u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \sqrt{n\, w_n}\ v_n]$.

- On obtient :

$$\int_0^{v_n} \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\ w_n\right)\ dx \ = \ \int_0^{v_n\sqrt{n\ w_n}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{n\ w_n}}\ du$$

En combinant ces résultats, on obtient :

$$\boxed{I_n \geqslant \int_0^{v_n} g_n(x)\, dx \geqslant \int_0^{v_n} \exp\left(-\frac{nx^2}{2} w_n\right) dx \geqslant \frac{1}{\sqrt{nw_n}} \int_0^{v_n\sqrt{nw_n}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du}$$

$\square$

d) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement, : $\dfrac{2}{\sqrt{w_n}} \left(\Phi\left(v_n \sqrt{n w_n}\right) - \dfrac{1}{2} \right) \leqslant I_n \sqrt{\dfrac{2n}{\pi}} \leqslant 1$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord, d'après la question ***3.d)*** : $I_n \sqrt{\dfrac{2n}{\pi}} \leqslant 1$. On en déduit : $I_n \leqslant \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.
- Puis, en procédant comme en ***3.c)*** :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{n\ w_n}} \int_0^{v_n \sqrt{n\ w_n}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\,du &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n\ w_n}} \int_0^{v_n \sqrt{n\ w_n}} \varphi(u)\,du \\
&= \frac{2}{\sqrt{w_n}} \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \left[\ \Phi(u)\ \right]_0^{v_n \sqrt{n\ w_n}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{w_n}} \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \left(\Phi(v_n \sqrt{n\ w_n}) - \Phi(0)\right)
\end{aligned}$$

- On en déduit, d'après la question précédente :

$$I_n \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \geqslant \cancel{\sqrt{\frac{2n}{\pi}}}\ \frac{2}{\sqrt{w_n}}\ \cancel{\sqrt{\frac{\pi}{2n}}} \left(\Phi(v_n \sqrt{n\ w_n}) - \frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{2}{\sqrt{w_n}} \left(\Phi\left(v_n \sqrt{n w_n}\right) - \frac{1}{2} \right) \leqslant I_n \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \leqslant 1}$$

$\square$

e) En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration.
Démontrons : $I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

- Tout d'abord, d'après la question précédente :

$$\frac{2}{\sqrt{w_n}} \left(\Phi\left(v_n \sqrt{n w_n}\right) - \frac{1}{2} \right) \leqslant \frac{I_n}{\sqrt{\frac{\pi}{2n}}} \leqslant 1$$

- D'autre part, comme $\sqrt{w_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \sqrt{1} = 1$:

$$v_n \sqrt{n w_n} = \frac{\sqrt{n}}{\ln(n+2)}\ \sqrt{w_n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{\ln(n+2)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \textit{(par croissances comparées)}$$

On en déduit, par composition des limites :

$$\lim_{n \to +\infty} \Phi(v_n \sqrt{n w_n}) = \lim_{x \to +\infty} \Phi(x) = 1$$

- Finalement :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{w_n}} \left(\Phi(v_n \sqrt{n w_n}) - \frac{1}{2} \right) = \frac{2}{\sqrt{1}} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1$$

- Ainsi, par théorème d'encadrement, la suite $\left(\dfrac{I_n}{\sqrt{\frac{\pi}{2n}}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente de limite 1.

$$\boxed{\text{Ainsi } I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.}$$

$\square$

Problème (EDHEC 2015)

Partie I

Dans cette partie, x désigne un réel de $[0,1[$.

1. a) Montrer : $\forall m \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}\, dt \leqslant \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1}$.

Démonstration.
Soit $m \in \mathbb{N}$.

- Remarquons tout d'abord que la fonction $f_m : t \mapsto \dfrac{t^m}{1-t^2}$ est continue sur le **segment** $[0, x]$.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}\, dt$ est bien définie.
- Soit $t \in [0, x[$.

$$\begin{array}{lccccccl}
 & & 0 & \leqslant & t & \leqslant & x & \\
\text{donc} & & 0 & \leqslant & t^2 & \leqslant & x^2 & \textit{(par croissance de la fonction } x \mapsto x^2 \textit{ sur } [0,+\infty[) \\
\text{ainsi} & & 0 & \geqslant & -t^2 & \geqslant & -x^2 & \\
\text{d'où} & & 1 & \geqslant & 1-t^2 & \geqslant & 1-x^2 & \\
\text{puis} & & 1 & \leqslant & \dfrac{1}{1-t^2} & \leqslant & \dfrac{1}{1-x^2} & \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[) \\
\text{enfin} & 0 \leqslant & t^m & \leqslant & \dfrac{t^m}{1-t^2} & \leqslant & \dfrac{t^m}{1-x^2} & \textit{(car } t^m \geqslant 0)
\end{array}$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant x$) :

$$\underbrace{\int_0^x 0\, dt}_{=0} \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}\, dt \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-x^2}\, dt$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{t^m}{1-x^2}\, dt &= \frac{1}{1-x^2} \int_0^x t^m\, dt \\
&= \frac{1}{1-x^2}\, \frac{1}{m+1} \left[\, t^{m+1} \,\right]_0^x \\
&= \frac{1}{1-x^2}\, \frac{1}{m+1} \left(x^{m+1} - \cancel{0^{m+1}}\right) \\
&\leqslant \frac{1}{1-x^2}\, \frac{1}{m+1} && \textit{(car } x^{m+1} \leqslant 1 \textit{ et } \frac{1}{1-x^2}\, \frac{1}{m+1} \geqslant 0)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On obtient bien : } \forall m \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}\, dt \leqslant \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1}.}$$

□

b) En déduire que : $\lim\limits_{m \to +\infty} \displaystyle\int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} = 0$.

Démonstration.
D'après la question précédente :

$$\forall m \in \mathbb{N}, 0 \ \leqslant \ \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}\, dt \ \leqslant \ \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1}$$

Or :

× $\lim\limits_{m \to +\infty} 0 = 0$,

× $\lim\limits_{m \to +\infty} \dfrac{1}{1-x^2} \times \dfrac{1}{m+1} = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par théorème d'encadrement : } \lim_{m \to +\infty} \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}\, dt = 0.}$$

Commentaire

Il n'y a pas, dans le programme ECE, de théorème permettant de passer à la limite sous le symbole d'intégration. Toute tentative de ce genre révèle donc une mauvaise compréhension des objets étudiés.

□

2. a) Pour tout réel t de $[0,1[$ et pour tout k élément de $\mathbb{N}^*$, calculer $\sum\limits_{j=0}^{k-1} t^{2j}$.

Démonstration.
Soit $t \in [0,1[$ et soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j} \quad = \quad \sum_{j=0}^{k-1} \left(t^2\right)^j \quad = \quad \frac{1-\left(t^2\right)^k}{1-t^2} \qquad \textit{(car } t^2 \neq 1\textit{)}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0,1[,\ \sum_{j=0}^{k-1} t^{2j} = \frac{1-t^{2k}}{1-t^2}}$$

□

b) En déduire : $\sum\limits_{j=0}^{k-1} \dfrac{x^{2j+1}}{2j+1} = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t^2}\, dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\, dt$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\forall t \in [0,1[,\ \sum_{j=0}^{k-1} t^{2j} = \frac{1-t^{2k}}{1-t^2}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} \int_0^x \left(\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j}\right) dt \quad &= \quad \int_0^x \frac{1-t^{2k}}{1-t^2}\, dt \\ &= \quad \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\, dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\, dt \qquad \textit{(par linéarité de l'intégrale sur un segment)} \end{aligned}$$

- Enfin :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \left(\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j}\right) dt &= \sum_{j=0}^{k-1} \int_0^x t^{2j}\ dt && \textit{(par linéarité de l'intégrale sur un segment)} \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{2j+1} \left[\ t^{2j+1}\ \right]_0^x \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{2j+1} \left(x^{2j+1} - \cancel{0^{2j+1}}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{En combinant ces deux résultats, on obtient : } \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\ dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\ dt.}$$

□

c) Utiliser la question ***1.*** pour montrer que la série de terme général $\dfrac{x^{2j+1}}{2j+1}$ converge et exprimer $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ sous forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question ***1.*** :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\ dt \leqslant \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{2k+1}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, par théorème d'encadrement : } \lim_{k \to +\infty} \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\ dt = 0.}$$

Commentaire

- Il était possible de rédiger autrement.
  En question ***1.***, on a démontré que l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}\ dt$ est bien définie. On peut donc noter u_m la quantité définie par cette intégrale. On démontre en ***1.a)*** que la suite (u_m) est convergente et de limite nulle. Il en est de même de toutes ses sous-suites.
  En particulier : $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} u_{2m} = 0$. Autrement dit :

$$\lim_{m \to +\infty} \int_0^x \frac{t^{2m}}{1-t^2}\ dt = 0$$

- On détaille dans le point précédent avec précision les mécanismes permettant d'obtenir la limite. Mais les arguments de composition de limite ou de changement de variable (on pose $m = 2k$) sont tout autant acceptables.

- Ainsi, d'après la question précédente, $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ apparaît comme la somme de deux quantités admettant une limite finie lorsque k tend vers $+\infty$.

On en déduit que la série $\sum \dfrac{x^{2j+1}}{2j+1}$ est convergente, de somme :

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} &= \lim_{k\to+\infty} \left(\int_0^x \frac{1}{1-t^2}\, dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\, dt \right) \\ &= \lim_{k\to+\infty} \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\, dt - \lim_{k\to+\infty} \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\, dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\, dt\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La série } \sum \frac{x^{2j+1}}{2j+1} \text{ est convergente, de somme : } \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\, dt.}$$

□

d) Conclure : $\forall k \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\, dt.$

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- La série $\sum \dfrac{x^{2j+1}}{2j+1}$ est convergente. On a donc :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} &= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} \\ &= \cancel{\int_0^x \frac{1}{1-t^2}\, dt} - \left(\cancel{\int_0^x \frac{1}{1-t^2}\, dt} - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\, dt \right)\end{aligned}$$

*(d'après la question **2.c)** et la question **2.b)**)*

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\, dt}$$

- Il reste à démontrer cette égalité lorsque $k = 0$.
  D'après la question ***2.c)***, on a :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\, dt = \int_0^x \frac{t^{2\times 0}}{1-t^2}\, dt$$

  On en déduit que l'égalité est aussi vérifiée lorsque $k = 0$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\, dt}$$

□

On admet sans démonstration que l'on a aussi : $\forall k \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{x^{2j}}{2j} = \int_0^x \frac{t^{2k+1}}{1-t^2}\, dt.$

Partie II

Un joueur réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce.
Cette pièce donne pile avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$.
On note N la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier pile.
Si N prend la valeur n, le joueur place n boules numérotées de 1 à n dans une urne, puis il extrait une boule au hasard de cette urne. On dit que le joueur a gagné si le numéro porté par la boule tirée est impair et on désigne par A l'événement : « le joueur gagne ».
On appelle X la variable aléatoire égale au numéro porté par la boule extraite de l'urne.

3. Reconnaître la loi de N.

Démonstration.

- L'expérience consiste en la succession d'une infinité d'épreuves de Bernoulli (dont le succès est l'obtention de pile) indépendantes et de même paramètre p (probabilité d'obtention de pile).
- La v.a.r. N est le rang d'apparition du premier succès de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en déduit : } N \hookrightarrow \mathcal{G}(p).}$$

□

4. ***a)*** Montrer que, si m est un entier naturel, la commande `2*np.floor(m/2)` renvoie la valeur m si et seulement si m est pair.

Démonstration.

- Si `x` est une variable, l'instruction `floor(x)` permet d'obtenir la partie entière par défaut de `x`.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$\lfloor x \rfloor = x \quad \Leftrightarrow \quad x \text{ est un entier}$$
On a alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned} 2 \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor = m \quad & \Leftrightarrow \quad \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor = \frac{m}{2} \\ & \Leftrightarrow \quad \frac{m}{2} \text{ est un entier} \\ & \Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N}, \ \frac{m}{2} = n \\ & \Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N}, \ m = 2 \times n \\ & \Leftrightarrow \quad m \text{ est pair} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \texttt{2*floor(m/2)} \text{ renvoie la valeur } m \text{ si et seulement si } m \text{ est pair.}}$$

□

b) Compléter les commandes **Python** suivantes pour qu'elles simules N et X puis renvoient l'un des deux messages « le joueur a gagné » ou « le joueur a perdu ».

```
import numpy as np
import numpy.random as nr
import random as rd
p = float(input(“donner la valeur de p“))
N = nr.geometric(---)
X = rd.randint(---, ---, 1)
if ------ :
    print(“------“)
else :
    print(“------“)
```

Démonstration.
On rappelle que la v.a.r. N est égale au rang du premier pile et que X est la v.a.r. prenant la valeur du numéro de la boule tirée. Enfin, rappelons que la partie est gagnée si ce numéro est pair. Afin de simuler N, X et le résultat de l'expérience, on procède comme suit.

- **Début du programme** : initialisation des variables.
  × La valeur de la variable `p` est choisie par l'utilisateur à l'aide de la fonction `input`.

```
4  p = float(input(“donner la valeur de p“))
```

  × En ligne 5, on simule la v.a.r. N à l'aide de la fonction `nr.geometric`. Comme $N \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, il faut écrire :

```
5  N = nr.geometric(p)
```

  × En ligne 6, on simule la v.a.r. X à l'aide de la fonction `rd.randint`. En ligne 2, le nombre n de boules placées dans l'urne est stockée dans la variable `N`. Une fois connu ce nombre n, la v.a.r. X suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Pour simuler cette v.a.r. , il faut donc écrire :

```
6  X = X = rd.randint(1, N+1, 1)
```

- **Structure conditionnelle**.
  Les lignes 7 à 10 suivantes consistent à déterminer si le joueur gagne la partie. Il s'agit alors de vérifier si le numéro de la boule piochée par le joueur (et stocké dans la variable `X`) est pair. On teste cette propriété à l'aide de la question précédente. Rappelons que le test d'égalité se fait à l'aide du symbole `==` (le symbole `=` permet quant à lui de réaliser une affectation).

```
7  if 2 * np.floor(X/2) == X :
```

  Si le numéro est pair, c'est-à-dire si la condition précédente est vérifiée, on affiche « le joueur a gagné » à l'aide de la fonction `print`. Dans l'autre cas, on affiche « le joueur a perdu ».

```
8       print(“le joueur a gagné“)
9   else :
10      print(“le joueur a perdu“)
```

Commentaire

- Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le programme **Python** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir la majorité des points alloués à cette question.
- On a mentionné dans la réponse que la loi de X dépendait de la valeur prise par la v.a.r. N. On peut être plus précis et rigoureux. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de X sachant l'événement $[N = n]$ n'est autre que la loi $\mathcal{U}([\![1, n]\!])$.
  Autrement dit :
$$\forall k \in [\![1, n]\!], \ \mathbb{P}_{[N=n]}\big([X = k]\big) \ = \ \frac{1}{n}$$

□

5. a) Donner, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à j, la valeur de $\mathbb{P}_{[N=2j]}\big([X=2k+1]\big)$.

Démonstration.
Soit $j \in \mathbb{N}$ et soit $k \geqslant j$.

- Si l'événement $[N=2j]$ est réalisé, c'est que le premier pile est apparu au rang $2j$.
  L'urne est alors remplie avec des boules numérotés de 1 à $2j$.
- Dans ce cas, l'événement $[X=2k+1]$ est réalisé si et seulement si le joueur pioche la boule numérotée $2k+1$ dans l'urne. Or, comme $k \geqslant j$, alors $2k+1 \geqslant 2j+1 > 2j$.
  Il est donc impossible que le joueur pioche une telle boule.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}_{[N=2j]}\big([X=2k+1]\big) = 0.}$$

□

b) Donner, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à $j+1$, la valeur de $\mathbb{P}_{[N=2j+1]}\big([X=2k+1]\big)$.

Démonstration.
Soit $j \in \mathbb{N}$ et soit $k \geqslant j+1$.

L'argument est similaire à celui de la question précédente : si le premier pile apparaît au rang $2j+1$ alors le joueur ne peut tirer une boule numérotée $2k+1 \geqslant 2\,(j+1)+1 = 2j+2 > 2j+1$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}_{[N=2j+1]}\big([X=2k+1]\big) = 0.}$$

□

c) Déterminer $\mathbb{P}_{[N=2j]}\big([X=2k+1]\big)$ lorsque k appartient à $[\![0, j-1]\!]$.

Démonstration.
Soit $j \in \mathbb{N}$ et soit $k \in [\![0, j-1]\!]$.

- Si l'événement $[N=2j]$ est réalisé, c'est que le premier pile est apparu au rang $2j$.
  L'urne est alors remplie avec des boules numérotés de 1 à $2j$.
- Dans ce cas, l'événement $[X=2k+1]$ est réalisé si et seulement si le joueur pioche la boule numérotée $2k+1$ dans l'urne. Or, comme $k \in [\![0, j-1]\!]$ alors $2k+1 \in [\![1, 2j-1]\!] \subset [\![1, 2j]\!]$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Toutes les boules de l'urne étant piochées avec la même probabilité, on en déduit :}\\ \mathbb{P}_{[N=2j]}\big([X=2k+1]\big) = \dfrac{1}{2j}.\end{array}}$$

Commentaire

La notation $2k+1$ désigne un entier impair. Attention cependant à ne pas en tirer de conclusion hâtive. L'événement $[X=2k+1]$ est réalisé si et seulement si on pioche `LA` boule impaire numérotée $2k+1$ de l'urne. Cet événement ne doit en aucun cas être confondu avec l'événement A_{2j} « piocher une boule impaire dans l'urne contenant les boules numérotées 1 à $2j$ ». Cet dernier événement est réalisé si et seulement on tire une boule portant un numéro de l'ensemble $\{1, 3, 5, \ldots, 2j-1\}$. On peut donc l'écrire :

$$A_{2j} \; = \; \bigcup_{k=0}^{j-1} [X=2k+1]$$

□

d) Déterminer $\mathbb{P}_{[N=2j+1]}\big([X = 2k+1]\big)$ lorsque k appartient à $[\![0, j]\!]$.

Démonstration.
Soit $j \in \mathbb{N}$ et soit $k \in [\![0, j]\!]$.
L'argument est similaire à celui de la question précédente.

- Si l'événement $[N = 2j+1]$ est réalisé, c'est que le premier pile est apparu au rang $2j+1$.
- Dans ce cas, l'événement $[X = 2k+1]$ est réalisé si et seulement si le joueur pioche la boule numérotée $2k+1$ dans l'urne (avec $2k+1 \in [\![1, 2j+1]\!]$).

Toutes les boules de l'urne étant piochées avec la même probabilité, on en déduit :
$$\mathbb{P}_{[N=2j+1]}\big([X = 2k+1]\big) = \frac{1}{2j+1}.$$

Commentaire

- Le raisonnement étant similaire au précédent, donner directement le résultat permet certainement d'obtenir l'ensemble des points alloués à cette question.
- La difficulté d'un sujet se mesure en grande partie au nombre de questions intermédiaires présentes dans l'énoncé. Les questions ***5.a)***, ***5.b)***, ***5.c)***, ***5.d)***, sont destinées à résoudre la question ***6.a)***. Avoir traité ces questions en amont permet de se focaliser sur les difficultés inhérentes à la question ***6***.
  Ce découpage présente quand même certains désavantages :
  - × il y a une impression de répétition. Les question ***5.a)*** et ***5.b)*** sont assez similaires et il en est de même des questions ***5.c)*** et ***5.d)***.
  - × la multiplication des questions intermédiaires a tendance à rendre moins lisible le but du sujet. Ici, les questions ***5.a)*** à ***5.d)*** ne sont pas motivées même si on se doute qu'elles sont destinées à aider à traiter la suite du sujet.

□

6. a) Justifier : $\mathbb{P}\big([X = 2k+1]\big) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N = n]\big)\, \mathbb{P}_{[N=n]}\big([X = 2k+1]\big)$.

En admettant que l'on peut scinder la somme précédente selon la parité de n, montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([X = 2k+1]\big) \ = \ \frac{p}{q}\left(\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2j} \ + \ \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2j+1}\right)$$

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

- La famille $\big([N = n]\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.
  Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([X = 2k+1]\big) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N = n] \cap [X = 2k+1]\big) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N = n]\big)\, \mathbb{P}_{[N=n]}\big([X = 2k+1]\big) & \textit{(car pour tout } n \in \mathbb{N}^*\textit{, on a : } \mathbb{P}\big([N = n]\big) = p\, q^{n-1} \neq 0\textit{)}\end{aligned}$$

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([X = 2k+1]\big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N = n]\big)\, \mathbb{P}_{[N=n]}\big([X = 2k+1]\big)$$

- L'énoncé suggère alors de scinder la somme suivant la parité de n.

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\big([X = 2k+1]\big) \\ = \ & \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N=n]\big)\, \mathbb{P}_{[N=n]}\big([X=2k+1]\big) \ + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N=n]\big)\, \mathbb{P}_{[N=n]}\big([X=2k+1]\big) \end{aligned}$$

- Étudions chacune de ces sommes.

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N=n]\big)\, \mathbb{P}_{[N=n]}\big([X=2k+1]\big) \\ = \ & \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N=2j]\big)\, \mathbb{P}_{[N=2j]}\big([X=2k+1]\big) \\ = \ & \sum_{\substack{j=1 \\ k \in [\![0,j-1]\!]}}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N=2j]\big)\, \mathbb{P}_{[N=2j]}\big([X=2k+1]\big) \ + \cancel{\sum_{\substack{j=1 \\ k \geqslant j}}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N=2j]\big)\, \mathbb{P}_{[N=2j]}\big([X=2k+1]\big)} \\ = \ & \sum_{j=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N=2j]\big)\, \mathbb{P}_{[N=2j]}\big([X=2k+1]\big) \qquad (*) \\ = \ & \sum_{j=k+1}^{+\infty} p\, q^{2j-1} \times \frac{1}{2j} \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{3}} \textit{ et la question } \textbf{5.c)}\textit{)} \\ = \ & \frac{p}{q} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2j} \end{aligned}$$

La ligne $(*)$ est obtenue en constatant que pour $j \in \mathbb{N}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} j \in [\![1,+\infty[\![\\ k \in [\![0,j-1]\!] \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 \leqslant j \\ 0 \leqslant k \leqslant j-1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 \leqslant j \\ k+1 \leqslant j \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \ k+1 \leqslant j \right. \Leftrightarrow \left\{ \ j \in [\![k+1,+\infty[\![\right.$$

- On procède de même pour la deuxième somme.

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N=n]\big)\, \mathbb{P}_{[N=n]}\big([X=2k+1]\big) \\ = \ & \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N=2j+1]\big)\, \mathbb{P}_{[N=2j+1]}\big([X=2k+1]\big) \\ = \ & \sum_{\substack{j=0 \\ k \in [\![0,j]\!]}}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N=2j+1]\big)\, \mathbb{P}_{[N=2j+1]}\big([X=2k+1]\big) \ + \cancel{\sum_{\substack{j=1 \\ k \geqslant j+1}}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N=2j+1]\big)\, \mathbb{P}_{[N=2j+1]}\big([X=2k+1]\big)} \\ = \ & \sum_{j=k}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N=2j+1]\big)\, \mathbb{P}_{[N=2j+1]}\big([X=2k+1]\big) \\ = \ & \sum_{j=k}^{+\infty} p\, q^{2j} \times \frac{1}{2j+1} \ = \ \frac{p}{q} \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2j+1} \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{3}} \textit{ et la question } \textbf{5.c)}\textit{)} \end{aligned}$$

- Finalement :

$$\mathbb{P}\big([X = 2k+1]\big) = \frac{p}{q} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2j} + \frac{p}{q} \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2j+1}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([X = 2k+1]\big) = \frac{p}{q} \left(\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2j} + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2j+1} \right)}$$

□

b) En déduire : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\big([X = 2k+1]\big) = \dfrac{p}{q} \displaystyle\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}\, dt$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([X = 2k+1]\big) &= \frac{p}{q} \left(\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2j} + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2j+1} \right) \\
&= \frac{p}{q} \left(\int_0^q \frac{t^{2k+1}}{1-t^2}\, dt + \int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t^2}\, dt \right) && \textit{(d'après la question \textbf{2.d)} avec } x = q \in [0,1[\textit{ et la propriété admise)} \\
&= \frac{p}{q} \int_0^q \frac{t^{2k+1} + t^{2k}}{1-t^2}\, dt && \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \frac{p}{q} \int_0^q \frac{t^{2k}\,(t+1)}{(1-t)(1+t)}\, dt \\
&= \frac{p}{q} \int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}\, dt
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([X = 2k+1]\big) = \frac{p}{q} \int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}\, dt.}$$

□

7. a) Montrer : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}\, dt = 0$.

Démonstration.

- Soit $t \in [0, q]$. Alors :

$$\begin{array}{lccccl}
 & 0 & \leqslant & t & \leqslant & q \\
\text{donc} & 0 & \geqslant & -t & \geqslant & -q \\
\text{ainsi} & 1 & \geqslant & 1-t & \geqslant & 1-q \\
\text{d'où} & \dfrac{1}{1} & \leqslant & \dfrac{1}{1-t} & \leqslant & \dfrac{1}{1-q} \quad \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \\
\text{puis} & 1 & \leqslant & \left(\dfrac{1}{1-t}\right)^2 & \leqslant & \left(\dfrac{1}{1-q}\right)^2 \quad \textit{(par croissance de la fonction } u \mapsto u^2 \textit{ sur } [0,+\infty[\textit{)}
\end{array}$$

Finralement, en multipliant par $\dfrac{t^{2n+2}}{1+t} \geqslant 0$, on obtient :

$$0 \leqslant \frac{t^{2n+2}}{1+t} \leqslant \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2\,(1+t)} \leqslant \frac{1}{(1-q)^2}\, \frac{t^{2n+2}}{1+t}$$

- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant q$) :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_0^q 0 \, dt & \leqslant & \displaystyle\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2\,(1+t)} \, dt & \leqslant & \displaystyle\int_0^q \frac{1}{(1-q)^2} \, \frac{t^{2n+2}}{1+t} \, dt \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ 0 & & & & \dfrac{1}{(1-q)^2} \displaystyle\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{1+t} \, dt \end{array}$$

- Or :
  - $\times$ $\lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0$.
  - $\times$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{1+t} \, dt = 0$ d'après la question ***1.b)***.

$$\boxed{\text{Ainsi, par théorème d'encadrement : } \lim_{n \to +\infty} \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2\,(1+t)} \, dt = 0.}$$

Commentaire

On se sert ici du résultat ***1.b)***. Il était aussi possible de s'en passer en effectuant une démonstration analogue à la ***1.b)***. En remarquant $0 \leqslant \dfrac{1}{1+t} \leqslant 1$, on obtient :

$$0 \ \leqslant \ \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2\,(1+t)} \ \leqslant \ \frac{t^{2n+2}}{(1-q)^2}$$

Puis, par croissance de l'intégrale :

$$0 \ \leqslant \ \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2\,(1+t)} \, dt \ \leqslant \ \frac{1}{(1-q)^2} \times \frac{1}{2n+3}$$

et on conclut par théorème d'encadrement comme en ***1.b)***.

$\square$

b) Montrer :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big(\,[X = 2k+1]\,\big) = \frac{p}{q} \left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)} \, dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)} \, dt \right)$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big(\,[X = 2k+1]\,\big) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{p}{q} \int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t} \, dt && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{6.b)}}\textit{)} \\ &= \frac{p}{q} \int_0^q \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{t^{2k}}{1-t} \right) dt && \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \frac{p}{q} \int_0^q \frac{1}{1-t} \left(\sum_{k=0}^{n} \left(t^2\right)^k \right) dt \\ &= \frac{p}{q} \int_0^q \frac{1}{1-t} \left(\frac{1 - \left(t^2\right)^{n+1}}{1-t^2} \right) dt \end{aligned}$$

- Enfin, pour tout $t \in [0, q]$:

$$\frac{1}{1-t} \left(\frac{1-\left(t^2\right)^{n+1}}{1-t^2} \right) = \frac{1}{1-t} \, \frac{1-t^{2n+2}}{(1-t)\,(1+t)} = \frac{1-t^{2n+2}}{(1-t)^2\,(1+t)}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{On en conclut, par linéarité de l'intégrale :} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big([X = 2k+1] \big) = \frac{p}{q} \left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2\,(1+t)} \, dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2\,(1+t)} \, dt \right) \end{array}}$$

$\square$

c) En déduire : $\mathbb{P}(A) = \dfrac{p}{q} \displaystyle\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)} \, dt$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} A \text{ est réalisé} & \Leftrightarrow & \text{le joueur a pioché une boule impaire} \\ & \Leftrightarrow & X \text{ prend une valeur impaire} \\ & \Leftrightarrow & \text{il existe } k \in \mathbb{N},\ [X = 2k+1] \text{ est réalisé} \\ & \Leftrightarrow & \displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty} [X = 2k+1] \text{ est réalisé} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } A = \bigcup_{k=0}^{+\infty} [X = 2k+1]}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rll} & \mathbb{P}(A) & \\ = & \mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty} [X = 2k+1] \right) & \\ = & \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} [X = 2k+1] \right) & \textit{(par le théorème de la limite monotone)} \\ = & \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big([X = 2k+1] \big) & \textit{(car les événements de la famille } \big([X = 2k+1] \big)_{k \in [\![0,n]\!]} \textit{ sont 2 à 2 incompatibles)} \\ = & \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{p}{q} \left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2\,(1+t)} \, dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2\,(1+t)} \, dt \right) & \textit{(d'après la question précédente)} \\ = & \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{p}{q} \int_0^q \frac{1}{(1-t)^2\,(1+t)} \, dt - \lim_{n \to +\infty} \frac{p}{q} \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2\,(1+t)} \, dt & \textit{(car ces deux limites existent et sont finies)} \\ = & \displaystyle\frac{p}{q} \int_0^q \frac{1}{(1-t)^2\,(1+t)} \, dt & \textit{(d'après la question \textbf{7.a)})} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathbb{P}(A) = \frac{p}{q} \int_0^q \frac{1}{(1-t)^2\,(1+t)} \, dt.}$$

$\square$

8. a) Trouver trois constantes réelles a, b et c telles que, pour tout t différent de 1 et de -1, on ait :

$$\frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2}$$

Démonstration.
Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

- Tout d'abord pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}\frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2} &= \frac{a\,(1-t)\,(1+t) + b\,(1-t)^2 + c\,(1+t)}{(1-t)^2\,(1+t)} \\ &= \frac{a - a\,t^2 + b - 2b\,t + b\,t^2 + c + c\,t}{(1-t)^2\,(1+t)} \\ &= \frac{(a+b+c) + (-2b+c)\,t + (-a+b)\,t^2}{(1-t)^2\,(1+t)}\end{aligned}$$

- On a alors :

$$\begin{aligned} & \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}, \quad \frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2} \\
\Longleftrightarrow \quad & \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}, \quad \frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{(a+b+c) + (-2b+c)\,t + (-a+b)\,t^2}{(1-t)^2\,(1+t)} \\
\Longleftrightarrow \quad & \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}, \quad 1 = (a+b+c) + (-2b+c)\,t + (-a+b)\,t^2 \\
\Longleftrightarrow \quad & \left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & + & c & = & 1 \\ & - & 2\,b & + & c & = & 0 \\ -a & + & b & & & = & 0 \end{array}\right. \\
\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\Longleftrightarrow} \quad & \left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & + & c & = & 1 \\ & - & 2\,b & + & c & = & 0 \\ & & 2\,b & + & c & = & 1 \end{array}\right. \\
\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} \quad & \left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & + & c & = & 1 \\ & - & 2\,b & + & c & = & 0 \\ & & & & 2\,c & = & 1 \end{array}\right. \\
\overset{\substack{L_1 \leftarrow 2\,L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow 2\,L_2 - L_3}}{\Longleftrightarrow} \quad & \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2\,a & + & 2\,b & & & = & 1 \\ & - & 4\,b & & & = & -1 \\ & & & & 2\,c & = & 1 \end{array}\right. \\
\overset{L_1 \leftarrow 2\,L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} \quad & \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 4\,a & & & & & = & 1 \\ & & 4\,b & & & = & 1 \\ & & & & 2\,c & = & 1 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}, \ \frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{\frac{1}{4}}{1-t} + \frac{\frac{1}{4}}{1+t} + \frac{\frac{1}{2}}{(1-t)^2}.}$$

$\square$

b) Écrire $\mathbb{P}(A)$ explicitement en fonction de q.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \frac{p}{q} \int_0^q \frac{1}{(1-t)^2\,(1+t)}\ dt \\
&= \frac{p}{q} \int_0^q \left(\frac{\frac{1}{4}}{1-t} + \frac{\frac{1}{4}}{1+t} + \frac{\frac{1}{2}}{(1-t)^2} \right)\ dt \\
&= \frac{p}{q} \left(\frac{1}{4} \int_0^q \frac{1}{1-t}\ dt + \frac{1}{4} \int_0^q \frac{1}{1+t}\ dt + \frac{1}{2} \int_0^q \frac{1}{(1-t)^2}\ dt \right) \qquad \textit{(par linéarité de l'intégrale)}
\end{aligned}$$

- De plus :

$$\begin{aligned}
\int_0^q \frac{1}{1-t}\ dt &= -\int_0^q \frac{-1}{1-t}\ dt \\
&= -\Big[\ \ln\left(|1-t|\right)\ \Big]_0^q \ = \ -\left(\ln\left(|1-q|\right) - \cancel{\ln\left(|1|\right)}\right) \ = \ -\ln(1-q)
\end{aligned}$$

$$\int_0^q \frac{1}{1+t}\ dt \ = \ \Big[\ \ln\left(|1+t|\right)\ \Big]_0^q \ = \ \ln\left(|1+q|\right) - \cancel{\ln\left(|1|\right)} \ = \ \ln(1+q)$$

$$\begin{aligned}
\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2}\ dt &= -\int_0^q (-1)\ (1-t)^{-2}\ dt \ = \ -\Big[\ (1-t)^{-1}\ \Big]_0^q \\
&= -\left[\frac{1}{1-t} \right]_0^q \ = \ -\left(\frac{1}{1-q} - \frac{1}{1} \right) \ = \ 1 - \frac{1}{1-q} \ = \ \frac{q}{1-q}
\end{aligned}$$

- Finalement :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \frac{p}{q} \left(-\frac{1}{4}\ \ln(1-q) + \frac{1}{4}\ \ln(1+q) + \frac{1}{2}\,\frac{q}{1-q} \right) \\
&= \frac{1-q}{q} \left(\frac{1}{4}\ \ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{q}{1-q} \right) \ = \ \frac{1-q}{4\,q}\ \ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right) + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) \ = \ \frac{1-q}{4q}\ \ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right) + \frac{1}{2}}$$

□

c) En déduire : $\mathbb{P}(A) > \dfrac{1}{2}$.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme $p = 1 - q \in \,]0, 1[$. Ainsi : $1 - q > 0$ et $\dfrac{1-q}{4q} > 0$.
- Par ailleurs :

$$\ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right) \;=\; \ln\left(\frac{(1-q)+2\,q}{1-q}\right) \;=\; \ln\left(1+\frac{2\,q}{1-q}\right) > 0 \qquad \text{car} \quad \frac{2\,q}{1-q} > 0$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathbb{P}(A) \;=\; \frac{1-q}{4q}\ \ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right) + \frac{1}{2} \;>\; \frac{1}{2}.}$$

□