DS6 (version A)

Exercice (EML 2014) - /41

On considère l'espace $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices d'ordre 2 à coefficients réels. On définit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et que (A, B, C) est une base de $\mathcal{E}$.

- **1 pt** : $\mathcal{E} = \text{Vect}(A, B, C)$
- **1 pt** : (A, B, C) est libre
- **1 pt** : (A, B, C) engendre $\mathcal{E}$

2. Établir que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication, c'est-à-dire : $\forall (M, N) \in \mathcal{E}^2, MN \in \mathcal{E}$.

- **1 pt** : introduction correcte de M et N (compréhension de $M \in \mathcal{E}$)
- **1 pt** : calcul $MN = a_1 a_2 \cdot A + (a_1 b_2 + b_1 c_2) \cdot B + c_1 c_2 \cdot C$
- **1 pt** : conclusion

3. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, si M est inversible alors $M^{-1} \in \mathcal{E}$.

- **1 pt** : M est inversible ssi ses coefficients diagonaux sont non nuls
- **1 pt** : calcul de l'inverse $M^{-1} = \dfrac{1}{ac} \begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$
- **1 pt** : conclusion (triangulaire supérieur ou $\in \text{Vect}(A, B, C)$)

Pour toute matrice de $\mathcal{E}$, on note $f(M) = TMT$.

4. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

- **1 pt** : f est linéaire
- **1 pt** : f est à valeurs dans $\mathcal{E}$

5. Vérifier que T est inversible et démontrer que f est un automorphisme de $\mathcal{E}$.

- **1 pt** : T est inversible
- **1 pt** : f est injective (détermination de $\text{Ker}(f)$)
- **1 pt** : conclusion (dimension finie citée)

6. Est-ce que T est diagonalisable ?

- **1 pt** : $\text{Sp}(T) = \text{Sp}(D) = \{1\}$
- **2 pts** : démonstration par l'absurde. Si T diagonalisable alors $T = I$

On note F la matrice de f dans la base (A, B, C) de $\mathcal{E}$.

7. Calculer $f(A), f(B), f(C)$ en fonction de (A, B, C) et en déduire F.

- **1 pt** : $f(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot A + 1 \cdot B + 0 \cdot C$
- **1 pt** : $f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot A + 1 \cdot B + 0 \cdot C$
- **1 pt** : $f(C) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot A + 1 \cdot B + 1 \cdot C$
- **0 pt** : $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

8. Montrer que f admet une valeur propre et une seule et déterminer celle-ci, puis déterminer une base et la dimension du sous-espace propre pour f associé à cette valeur propre.

- **1 pt** : calcul de $\text{rg}(F - \lambda I_3)$ par pivot de Gauss
- **3 pts** : détermination $E_1(f) = \text{Vect}(C - A, B)$
  - × **1 pt** écriture système,
  - × **1 pt** résolution,
  - × **1 pt** $E_1(f)$.

  (-1 pt à la question si confusion d'objets)
- **2 pt** : dimension de $E_1(f)$ (**1 pt** générateur, **1 pt** libre)

9. Est-ce que f est diagonalisable ?

- **2 pt**

10. Soit λ un réel différent de 1. Résoudre l'équation $f(M) = \lambda M$, d'inconnue $M \in \mathcal{E}$.

- **2 pts** : cas $M = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$ et cas $M \neq 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$

11. On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Calculer H^2, puis pour tout a de $\mathbb{R}$ et tout n de $\mathbb{N}$, $(I + aH)^n$.

- **1 pt** : calcul de H^2
- **1 pt** : $H^k = 0$ pour tout $k \geqslant 2$ (par récurrence immédiate)
- **1 pt** : I et aH commutent
- **1 pt** : $I^j = I$ pour tout $j \geqslant 0$
- **1 pt** : justification $n \geqslant 1$ pour le calcul général
- **1 pt** : formule $(I + aH)^n = I + naH$
- **1 pt** : cas $n = 0$ traité

12. Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, F^n.

- **1 pt** : $F^n = I + nH$

13. Trouver une matrice G de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $G^3 = F$.
Existe-t-il un endomorphisme g de $\mathcal{E}$ tel que $g \circ g \circ g = f$?

- **2 pts** : $G = I + \frac{1}{3} H$
- **1 pt** : $g \circ g \circ g = f$ avec g l'endomorphisme associé à G dans la base (A, B, C)

Exercice 2 (HEC 2014) - /46

Partie I. Un équivalent d'une intégrale

1. Soit N la fonction définie sur l'intervalle $[0,1[$, à valeurs réelles, telle que :

$$N(x) = x^2 - 2x - 2(1-x)\ln(1-x)$$

a) Montrer que la fonction N est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.

- **2 pts** : rédaction précise

b) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a : $\ln(1-x) \leqslant -x$.

- **2 pts** : quelle que soit la méthode (concavité de ln ou étude de la dérivée)

c) On note N' la fonction dérivée de la fonction N. Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a $N'(x) \leqslant 0$.

- **1 pt** : calcul $N'(x) = 2\,(\ln(1-x)+x)$
- **1 pt** : $N'(x) \leqslant 0$

d) En déduire pour tout $x \in [0,1[$, un encadrement de $N(x)$.

- **1 pt** : N est continue et strictement décroissante sur $[0,1[$
- **1 pt** : $N(0) = 0$
- **1 pt** : $\lim\limits_{x\to -1} N(x) = -1$ (changement de variable $h = 1-x$)

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0,1[$, à valeurs réelles, telle que : $f(x) = -2\dfrac{x+\ln(1-x)}{x^2}$.

a) Rappeler le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1-x)$.

- **1 pt** : $\mathrm{DL}_2(0)$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. En déduire que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.
On note encore f la fonction ainsi prolongée.

- **1 pt** : $x + \ln(1-x) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{1}{2}\,x^2$
- **1 pt** : $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$

c) Sous réserve d'existence, on note f' la fonction dérivée de f.
Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, on a : $f'(x) = -2\dfrac{N(x)}{x^3(1-x)}$.

- **1 pt** : justification f est dérivable sur $]0,1[$
- **2 pts** : calcul de $f'(x)$ (**1 pt** dérivation, **1 pt** simplification)

d) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0,1[$. En déduire que f réalise une bijection strictement croissante de $[0,1[$ dans $[1,+\infty[$.

- **1 pt** : tableau de variation
- **1 pt** : hypothèses thm de la bijection (f continue et strictement croissante ici)
- **1 pt** : Image de f

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0,1[$: $g_n(x) = \exp\left(-\dfrac{nx^2}{2} f(x)\right)$.

a) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g_n(x)\,dx$.

On pose alors pour tout n$\in \mathbb{N}^*$: $I_n = \displaystyle\int_0^1 g_n(x)\,dx$.

- **1 pt** : $-\dfrac{nx^2}{2} f(x) \underset{x\to 1}{\sim} nx^2 \ln(1-x)$ d'où $\displaystyle\lim_{x\to 1} -\dfrac{nx^2}{2} f(x) = -\infty$
- **1 pt** : $\displaystyle\lim_{x\to 1} g_n(x) = 0$
- **1 pt** : g_n est continue sur le **segment** $[0,1]$ donc l'intégrale est bien définie

b) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a : $0 \leqslant g_n(x) \leqslant \exp\left(-\dfrac{nx^2}{2}\right)$.

- **2 pts** : **1 pt** $g_n(x) \geqslant 0$, **1 pt** $g_n(x) \leqslant \exp\left(-\dfrac{nx^2}{2}\right)$

c) En déduire l'encadrement : $0 \leqslant I_n \leqslant \sqrt{\dfrac{2\pi}{n}}\left(\Phi(\sqrt{n}) - \dfrac{1}{2}\right)$.

- **1 pt** : croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant
- **2 pts** : changement de variable posé correctement
- **1 pt** : $\displaystyle\int_0^1 \exp\left(-\dfrac{nx^2}{2}\right) dx = \sqrt{\dfrac{2\pi}{n}}\left(\Phi(\sqrt{n}) - \Phi(0)\right)$
- **1 pt** : $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leqslant I_n \leqslant \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

- **1 pt** : $\Phi(\sqrt{n}) \leqslant 1$
- **1 pt** : d'où $\sqrt{\dfrac{2\pi}{n}}\left(\Phi(\sqrt{n}) - \frac{1}{2}\right) \leqslant \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$

4. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{\ln(n+2)}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 < v_n < 1$.

- **2 pts** : **1 pt** $0 < v_n$, **1 pt** $v_n < 1$

b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $w_n = f(v_n)$.
établir la convergence de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$; déterminer sa limite.

- **1 pt** : (v_n) tend vers 0
- **1 pt** : par continuité de f en 0, (w_n) tend vers $f(0) = 1$

(1 pt à la question si la convergence de (w_n) est démontrée mais la valeur de la limite est fausse)

c) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les inégalités suivantes :

$$I_n \geqslant \int_0^{v_n} g_n(x)\ dx \geqslant \int_0^{v_n} \exp\left(-\frac{nx^2}{2}w_n\right)\ dx \geqslant \frac{1}{\sqrt{nw_n}} \int_0^{v_n\sqrt{nw_n}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

- **1 pt** : relation de Chasles
- **1 pt** : croissance de l'intégrale pour $I_n \geqslant \displaystyle\int_0^{v_n} g_n(x)\ dx$
- **2 pts** : $\displaystyle\int_0^{v_n} g_n(x)\ dx \geqslant \int_0^{v_n} \exp(-\frac{nx^2}{2}w_n)\ dx$
- **2 pts** : changement de variable

d) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement, : $\dfrac{2}{\sqrt{w_n}}\left(\Phi\left(v_n\sqrt{nw_n}\right) - \dfrac{1}{2}\right) \leqslant I_n\sqrt{\dfrac{2n}{\pi}} \leqslant 1$

- **1 pt** : $\dfrac{1}{\sqrt{n\,w_n}} \displaystyle\int_0^{v_n\sqrt{nw_n}} \exp(-\frac{u^2}{2})\ du = \frac{2}{\sqrt{w_n}}\ \sqrt{\frac{\pi}{2n}}\ (\Phi(v_n\sqrt{n\ w_n}) - \Phi(0))$
- **1 pt** : lien avec l'inégalité précédente

e) En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

- **1 pt** : $v_n\ \sqrt{nw_n} = \dfrac{\sqrt{n}}{\ln(n+2)}\ \sqrt{w_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{n}}{\ln(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
- **1 pt** : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \Phi(v_n\ \sqrt{nw_n}) = \lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = 1$ (composition de limite)
- **1 pt** : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{w_n}}\ \left(\Phi(v_n\sqrt{nw_n}) - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{1}}\left(1-\frac{1}{2}\right) = 1$
- **1 pt** : conclusion avec citation du théorème d'encadrement

Problème (EDHEC 2015) - /56

Partie I

Dans cette partie, x désigne un réel de $[0,1[$.

1. a) Montrer : $\forall m \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}\ dt \leqslant \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1}$.

- **1 pt** : pour tout $t \in [0,x]$, $0 \leqslant \dfrac{1}{1-t^2} \leqslant \dfrac{1}{1-x^2}$
- **1 pt** : croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant
- **1 pt** : $\displaystyle\int_0^x t^m\ dt \leqslant \int_0^1 t^m\ dt$ ou $x^{m+1} \leqslant 1$
- **1 pt** : $\displaystyle\int_0^1 t^m\ dt = \frac{1}{m+1}$ ou $\displaystyle\int_0^x t^m\ dt = x^{m+1}$

b) En déduire que : $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} = 0$.

- **2 pts** : théorème d'encadrement

2. a) Pour tout réel t de $[0,1[$ et pour tout k élément de $\mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j}$.

- **1 pt** : $t^2 \neq 1$
- **1 pt** : formule correcte à l'aide de la somme géométrique

b) En déduire : $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\,dt.$

- **1 pt** : linéarité de l'intégrale
- **1 pt** : $\displaystyle\int_0^x t^{2j}\,dt = \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$

c) Utiliser la question ***1.*** pour montrer que la série de terme général $\dfrac{x^{2j+1}}{2j+1}$ converge et exprimer $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ sous forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

- **1 pt** : $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\,dt = 0$
- **1 pt** : limite de la somme = somme des limites

d) Conclure : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\,dt.$

- **1 pt** : $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$
- **1 pt** : $\displaystyle\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \cancel{\int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt} - \left(\cancel{\int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt} - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\,dt\right)$
  (avec $k \neq 0$)
- **1 pt** : cas $k = 0$

Partie II

Un joueur réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce.
Cette pièce donne pile avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$.
On note N la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier pile.
Si N prend la valeur n, le joueur place n boules numérotées de 1 à n dans une urne, puis il extrait une boule au hasard de cette urne. On dit que le joueur a gagné si le numéro porté par la boule tirée est impair et on désigne par A l'événement : « le joueur gagne ».
On appelle X la variable aléatoire égale au numéro porté par la boule extraite de l'urne.

1. Reconnaître la loi de N.

- **1 pt** : description expérience
- **1 pt** : description v.a.r. N
- **1 pt** : conclusion : loi suivie par N

2. ***a)*** Montrer que, si m est un entier naturel, la commande `2*np.floor(m/2)` renvoie la valeur m si et seulement si m est pair.

- **1 pt** : calcul cas m pair
- **1 pt** : calcul cas m impair

b) Compléter les commandes **Python** suivantes pour qu'elles simules N et X puis renvoient l'un des deux messages « le joueur a gagné » ou « le joueur a perdu ».

```
import numpy as np
import numpy.random as nr
import random as rd
p = float(input(‘‘donner la valeur de p‘‘))
N = nr.geometric(p)
X = rd.randint(1, N+1, 1)
if 2 * np.floor(X/2) == X :
    print(‘‘le joueur a gagné‘‘)
else :
    print(‘‘le joueur a perdu‘‘)
```

- **1 pt** : paramètre p 2
- **1 pt** : paramètres 1 et N 3
- **1 pt** : condition `2*floor(X/2) == X` 4
- **1 pt** : phrases de sortie

3. a) Donner, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à j, la valeur de $\mathbb{P}_{[N=2j]}\big([X = 2k+1]\big)$.

- **1 pt** : rédaction type : « Si l'évènement $[N = 2j]$ est réalisé, alors ... »
- **1 pt** : dans ce cas, ... et $\mathbb{P}_{[N=2j]}\big([X = 2k+1]\big) = 0$

b) Donner, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à $j+1$, la valeur de $\mathbb{P}_{[N=2j+1]}\big([X = 2k+1]\big)$.

- **1 pt** : rédaction type : « Si l'évènement $[N = 2j+1]$ est réalisé, alors ... »
- **1 pt** : dans ce cas, ... et $\mathbb{P}_{[N=2j+1]}\big([X = 2k+1]\big) = 0$

c) Déterminer $\mathbb{P}_{[N=2j]}\big([X = 2k+1]\big)$ lorsque k appartient à $[\![0, j-1]\!]$.

- **1 pt** : rédaction type : « Si l'évènement $[N = 2j]$ est réalisé, alors ... »
- **1 pt** : justification $1 \leqslant 2k+1 \leqslant 2j$ + équiprobabilité ($\mathbb{P}_{[N=2j]}\big([X = 2k+1]\big) = \dfrac{1}{2j}$)

d) Déterminer $\mathbb{P}_{[N=2j+1]}\big([X = 2k+1]\big)$ lorsque k appartient à $[\![0, j]\!]$.

- **1 pt** : rédaction type : « Si l'évènement $[N = 2j+1]$ est réalisé, alors ... »
- **1 pt** : justification $1 \leqslant 2k+1 \leqslant 2j$ + équiprobabilité ($\mathbb{P}_{[N=2j]}\big([X = 2k+1]\big) = \dfrac{1}{2j+1}$)

4. a) Justifier : $\mathbb{P}\big([X = 2k+1]\big) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N = n]\big)\, \mathbb{P}_{[N=n]}\big([X = 2k+1]\big)$.

En admettant que l'on peut scinder la somme précédente selon la parité de n, montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([X = 2k+1]\big) \ = \ \frac{p}{q}\left(\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2j} \ + \ \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2j+1}\right)$$

- **0 pt** : la famille $([N = n])_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'évènements (associé à N)
- **1 pt** : FPT avec ce sce
- **1 pt** : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}_{[N=n]} \neq 0$
- **2 pts** : découpage somme en termes pairs / impairs avec changements d'indices
- **1 pt** : calcul de la somme sur les pairs
- **1 pt** : calcul de la somme sur les impairs

b) En déduire : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\big([X = 2k+1]\big) = \dfrac{p}{q} \displaystyle\int_0^q \dfrac{t^{2k}}{1-t}\, dt$.

- **1 pt** : Appel question 2.d)
- **1 pt** : linéarité intégrale + simplification $\frac{1+t}{1-t^2} = \frac{1}{1-t}$

5. a) Montrer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^q \dfrac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}\, dt = 0$.

- **1 pt** : Pour tout $t \in [0,q]$, $\frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)} \leqslant \frac{t^{2n+2}}{(1-q)^2}$
- **1 pt** : croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant
- **1 pt** : $\displaystyle\int_0^q \dfrac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}\, dt \leqslant \int_0^1 \dfrac{t^{2n+2}}{(1-q)^2}\, dt$
- **1 pt** : théorème d'encadrement

b) Montrer :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big([X = 2k+1]\big) = \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}\, dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}\, dt\right)$$

- **1 pt** : utilisation de la linéarité de l'intégrale
- **1 pt** : somme géométrique avec $t^2 \neq 1$

c) En déduire : $\mathbb{P}(A) = \dfrac{p}{q} \displaystyle\int_0^q \dfrac{1}{(1-t)^2(1+t)}\, dt$.

- **1 pt** : $A = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty} [X = 2k+1]$
- **1 pt** : $\mathbb{P}(\displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty} [X = 2k+1]) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\bigcup_{k=0}^{n} [X = 2k+1])$ par théorème de la limite monotone
- **1 pt** : appel question 5.b) + conclusion

6. a) Trouver trois constantes réelles a, b et c telles que, pour tout t différent de 1 et de -1, on ait :

$$\frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2}$$

- **2 pts**

b) Écrire $\mathbb{P}(A)$ explicitement en fonction de q.

- **1 pt** : $\displaystyle\int_0^q \dfrac{1}{1-t}\, dt = -\ln(1-q)$
- **0 pt** : $\displaystyle\int_0^q \dfrac{1}{1+t}\, dt = \ln(1+q)$
- **1 pt** : $\displaystyle\int_0^q \dfrac{1}{(1-t)^2}\, dt = \dfrac{q}{1-q}$
- **1 pt** : $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1-q}{4q} \ln\left(\dfrac{1+q}{1-q}\right) + \dfrac{1}{2}$ (éventuellement apparent seulement dans la question suivante !)

c) En déduire : $\mathbb{P}(A) > \dfrac{1}{2}$.

- **1 pt** : Tout d'abord, comme $p = 1-q \in \,]0,1[$ alors : $1-q > 0$ et $\dfrac{1-q}{4q} > 0$.
- **1 pt** : $\ln\left(\dfrac{1+q}{1-q}\right) = \ln\left(\dfrac{(1-q)+2\,q}{1-q}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{2\,q}{1-q}\right) > 0$ car $\dfrac{2\,q}{1-q} > 0$