DS6 (version A)

Exercice 1

On considère l'espace $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices d'ordre 2 à coefficients réels. On définit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et que (A, B, C) est une base de $\mathcal{E}$.

2. Établir que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication, c'est à dire :

$$\forall (M, N) \in \mathcal{E}^2, MN \in \mathcal{E}$$

3. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, si M est inversible alors $M^{-1} \in \mathcal{E}$.
Pour toute matrice de $\mathcal{E}$, on note $f(M) = TMT$.

4. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

5. Vérifier que T est inversible et démontrer que f est un automorphisme de $\mathcal{E}$.

6. Est-ce que T est diagonalisable ?
On note F la matrice de f dans la base (A, B, C) de $\mathcal{E}$.

7. Calculer $f(A), f(B), f(C)$ en fonction de (A, B, C) et en déduire F.

8. Montrer que f admet une valeur propre et une seule et déterminer celle-ci, puis déterminer une base et la dimension du sous-espace propre pour f associé à cette valeur propre.

9. Est-ce que f est diagonalisable ?

10. Soit λ un réel différent de 1. Résoudre l'équation $f(M) = \lambda M$, d'inconnue $M \in \mathcal{E}$.
On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11. Calculer H^2, puis pour tout a de $\mathbb{R}$ et tout n de $\mathbb{N}$, $(I + aH)^n$.

12. Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, F^n.

13. Trouver une matrice G de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $G^3 = F$.
Existe-t-il un endomorphisme g de $\mathcal{E}$ tel que $g \circ g \circ g = f$?

Exercice 2

- La fonction de répartition de la loi normale centrée réduite est notée Φ. On rappelle :

$$\Phi \ : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\ dt \end{array} \right. \qquad \text{où} \qquad \varphi \ : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \end{array} \right.$$

- La notation exp désigne la fonction exponentielle.

Un équivalent d'une intégrale

1. Soit N la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1[$, à valeurs réelles, telle que :

$$N(x) = x^2 - 2x - 2(1-x)\ln(1-x)$$

a) Montrer que la fonction N est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$.

b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$, on a : $\ln(1-x) \leqslant -x$.

c) On note N' la fonction dérivée de la fonction N. Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$, on a $N'(x) \leqslant 0$.

d) En déduire pour tout $x \in [0, 1[$, un encadrement de $N(x)$.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0, 1[$, à valeurs réelles, telle que : $f(x) = -2\dfrac{x + \ln(1-x)}{x^2}$.

a) Rappeler le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1-x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. En déduire que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.
On note encore f la fonction ainsi prolongée.

c) Sous réserve d'existence, on note f' la fonction dérivée de f.
Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, on a : $f'(x) = -2\dfrac{N(x)}{x^3(1-x)}$.

d) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0, 1[$.
En déduire que f réalise une bijection strictement croissante de $[0, 1[$ dans $[1, +\infty[$.

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0, 1[$: $g_n(x) = \exp\left(-\dfrac{nx^2}{2} f(x)\right)$.

a) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g_n(x)\ dx$.

On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \displaystyle\int_0^1 g_n(x)\ dx$.

b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$, on a : $0 \leqslant g_n(x) \leqslant \exp\left(-\dfrac{nx^2}{2}\right)$.

c) En déduire l'encadrement : $0 \leqslant I_n \leqslant \sqrt{\dfrac{2\pi}{n}}\left(\Phi(\sqrt{n}) - \dfrac{1}{2}\right)$.

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leqslant I_n \leqslant \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

4. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{\ln(n+2)}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 < v_n < 1$.

b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $w_n = f(v_n)$.
Établir la convergence de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$; déterminer sa limite.

c) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les inégalités suivantes :

$$I_n \geqslant \int_0^{v_n} g_n(x)\ dx \geqslant \int_0^{v_n} \exp\left(-\frac{nx^2}{2}w_n\right)\ dx \geqslant \frac{1}{\sqrt{nw_n}}\int_0^{v_n\sqrt{nw_n}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

d) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement, : $\dfrac{2}{\sqrt{w_n}}\left(\Phi\left(v_n\sqrt{nw_n}\right) - \dfrac{1}{2}\right) \leqslant I_n\sqrt{\dfrac{2n}{\pi}} \leqslant 1$

e) En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Problème

Partie I

Dans cette partie, x désigne un réel de $[0,1[$.

1. ***a)*** Montrer : $\forall m \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}\ dt \leqslant \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1}$.

b) En déduire que : $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} = 0$.

2. ***a)*** Pour tout réel t de $[0,1[$ et pour tout k élément de $\mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j}$.

b) En déduire : $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\ dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\ dt$.

c) Utiliser la question ***1*** pour montrer que la série de terme général $\dfrac{x^{2j+1}}{2j+1}$ converge et exprimer $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ sous forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

d) Conclure : $\forall k \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\ dt$.

On admet sans démonstration que l'on a aussi : $\forall k \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{x^{2j}}{2j} = \int_0^x \frac{t^{2k+1}}{1-t^2}\ dt$.

Partie II

Un joueur réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce.
Cette pièce donne pile avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et face avec la probabilité $q = 1-p$.
On note N la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier pile.
Si N prend la valeur n, le joueur place n boules numérotées de 1 à n dans une urne, puis il extrait une boule au hasard de cette urne. On dit que le joueur a gagné si le numéro porté par la boule tirée est impair et on désigne par A l'événement : « le joueur gagne ».
On appelle X la variable aléatoire égale au numéro porté par la boule extraite de l'urne.

3. Reconnaître la loi de N.

4. ***a)*** Montrer que, si m est un entier naturel, la commande `2*np.floor(m/2)` renvoie la valeur m si et seulement si m est pair.

b) Compléter les commandes **Python** suivantes pour qu'elles simules N et X puis renvoient l'un des deux messages « le joueur a gagné » ou « le joueur a perdu ».

```
import numpy as np
import numpy.random as nr
import random as rd
p = float(input(‘‘donner la valeur de p‘‘))
N = nr.geometric(---)
X = rd.randint(---, ---, 1)
if ------ :
    print(‘‘------‘‘)
else :
    print(‘‘------‘‘)
```

5. ***a)*** Donner, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à j, la valeur de $\mathbb{P}_{[N=2j]}\big([X = 2k+1] \big)$.

b) Donner, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à $j+1$, la valeur de $\mathbb{P}_{[N=2j+1]}\big([X = 2k+1] \big)$.

c) Déterminer $\mathbb{P}_{[N=2j]}\big([X = 2k+1] \big)$ lorsque k appartient à $[\![0, j-1]\!]$.

d) Déterminer $\mathbb{P}_{[N=2j+1]}\big([X = 2k+1] \big)$ lorsque k appartient à $[\![0, j]\!]$.

6. ***a)*** Justifier : $\mathbb{P}\big([X = 2k+1] \big) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N = n]\big)\, \mathbb{P}_{[N=n]}\big([X = 2k+1] \big)$.

En admettant que l'on peut scinder la somme précédente selon la parité de n, montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([X = 2k+1] \big) \ = \ \frac{p}{q} \left(\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2j} \ + \ \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2j+1} \right)$$

b) En déduire : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\big([X = 2k+1] \big) = \dfrac{p}{q} \displaystyle\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}\, dt$.

7. ***a)*** Montrer : $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}\, dt = 0$.

b) Montrer :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big([X = 2k+1] \big) = \frac{p}{q} \left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}\, dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}\, dt \right)$$

c) En déduire : $\mathbb{P}(A) = \dfrac{p}{q} \displaystyle\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}\, dt$.

8. ***a)*** Trouver trois constantes réelles a, b et c telles que, pour tout t différent de 1 et de -1, on ait :

$$\frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2}$$

b) Écrire $\mathbb{P}(A)$ explicitement en fonction de q.

c) En déduire : $\mathbb{P}(A) > \dfrac{1}{2}$.