DS5 (version B)

Exercice (EDHEC S 2017)

Dans ce problème, n est un entier naturel non nul et $\mathbb{R}_n[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
On note $\mathscr{B} = (e_0, e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. On rappelle que $e_0(X) = 1$ et que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $e_k(X) = X^k$.

Partie 1 : étude d'une application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$.

On considère l'application φ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\varphi(P) = \sum\limits_{k=0}^{n} P^{(k)}$, où $P^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de P, avec la convention $P^{(0)} = P$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Démonstration.

- Démontrons que φ est linéaire
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(P_1, P_2) \in \big(\mathbb{R}_n[X]\big)^2$.

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2) &= \sum_{k=0}^{n} (\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2)^{(k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\lambda_1 \cdot P_1^{(k)} + \lambda_2 \cdot P_2^{(k)}\right) && \textit{(par linéarité de l'application dérivée } k^{\text{ème}}\textit{)} \\
&= \lambda_1 \cdot \sum_{k=0}^{n} P_1^{(k)} + \lambda_2 \cdot \sum_{k=0}^{n} P_2^{(k)} \\
&= \lambda_1 \cdot \varphi(P_1) + \lambda_2 \cdot \varphi(P_2)
\end{aligned}$$

  Donc φ est linéaire.
- Démontrons que φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$
  Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
  × Tout d'abord :
  $$\deg\big(\varphi(P)\big) = \deg\left(\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}\right) \leqslant \max_{k \in [\![0,n]\!]} \big(\deg(P^{(k)})\big)$$
  × Or, comme $\deg(P) \leqslant n$, alors : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\deg\big(P^{(k)}\big) \leqslant n - k$.
  De plus : $\max\limits_{k \in [\![0,n]\!]} (n - k) = n$.
  × Ainsi : $\deg\big(\varphi(P)\big) \leqslant n$. D'où : $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$\boxed{\text{L'application } \varphi \text{ est bien un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

Commentaire

On utilise dans cette démonstration deux propriétés sur le degré des polynômes.
Si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$, alors :

$$\deg(P+Q) \ \leqslant\ \max\big(\deg(P),\ \deg(Q)\big)$$

$$\deg(P) \leqslant n \quad \Rightarrow \quad \forall k \in [\![0,n]\!],\ \deg(P^{(k)}) \leqslant n-k$$

Cette dernière propriété se démontre par récurrence.

□

2. ***a)*** Calculer $\varphi(e_0)$ et en déduire une valeur propre de φ.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \varphi(e_0) &= \sum_{k=0}^{n} e_0^{(k)} \\ &= e_0^{(0)} + e_0^{(1)} + \cdots + e_0^{(n)} \\ &= e_0 + e_0' + \cdots + e_0^{(n)} \\ &= e_0 && \textit{(car } e_0(X) = 1\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi(e_0) = e_0}$$

- On constate :
  × $e_0 \neq 0_{\mathbb{R}_n[X]}$
  × $\varphi(e_0) = 1 \cdot e_0$

  On en déduit que e_0 est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre 1.

$$\boxed{1 \text{ est une valeur propre de } \varphi.}$$

□

b) Montrer : $\forall j \in [\![1,n]\!]\ ,\ \varphi(e_j) - e_j \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$.

Démonstration.
Soit $j \in [\![1,n]\!]$.

- Tout d'abord :

$$\varphi(e_j) - e_j \ = \ \sum_{k=0}^{n} e_j^{(k)} - e_j \ = \ \left(\cancel{e_j^{(0)}} + \sum_{k=1}^{n} e_j^{(k)}\right) - \cancel{e_j} \ = \ \sum_{k=1}^{n} e_j^{(k)}$$

  D'où :

$$\deg\big(\varphi(e_j) - e_j\big) \ = \ \deg\left(\sum_{k=1}^{n} e_j^{(k)}\right) \ \leqslant \ \max_{k \in [\![1,n]\!]} \big(\deg(e_j^{(k)})\big)$$

- Or, comme $\deg(e_j) = j$, alors : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\deg\big(e_j^{(k)}\big) \leqslant j-k$.
  De plus : $\max\limits_{k \in [\![1,n]\!]} (j-k) = j-1$.

- Ainsi : $\deg\big(\varphi(e_j) - e_j\big) \leqslant j-1$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall j \in [\![1,n]\!],\ \varphi(e_j) - e_j \in \mathbb{R}_{j-1}[X].}$$

□

c) En déduire que la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$ est triangulaire et que la seule valeur propre de φ est celle trouvée à la question précédente.

Démonstration.

- Déterminons $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$.
  - × Tout d'abord, d'après ***2.a)*** : $\varphi(e_0) = e_0 = 1 \cdot e_0 + 0 \cdot e_1 + \cdots + 0 \cdot e_n$.

    D'où : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\varphi(e_0)\big) \; = \; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.
  - × Soit $j \in [\![2, n]\!]$. D'après ***2.b)*** : $\varphi(e_j) - e_j \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$.
    On en déduit qu'il existe $Q_j \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$ tel que : $\varphi(e_j) - e_j = Q_j$.

    Plus précisément, il existe $(a_{0,j}, \ldots, a_{j-1,j}) \in \mathbb{R}^j$ tel que : $Q_j = \sum\limits_{i=0}^{j-1} a_{i,j} \cdot e_i$.
    Ainsi : $\varphi(e_j) = a_{0,j} \cdot e_0 + \cdots + a_{j-1,j} \cdot e_{j-1} + 1 \cdot e_j + 0 \cdot e_{j+1} + \cdots + 0 \cdot e_n$.

    D'où : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\varphi(e_0)\big) \; = \; \begin{pmatrix} a_{0,j} \\ \vdots \\ a_{j-1,j} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

  Finalement :

$$A \; = \; \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) \; = \; \begin{pmatrix} 1 & a_{0,1} & \cdots & \cdots & a_{0,j} & \cdots & \cdots & a_{0,n-1} & a_{0,n} \\ 0 & 1 & \ddots & & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & a_{j-1,j} & & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & 1 & a_{n-2,n-1} & \vdots \\ \vdots & & & & & & 0 & 1 & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{La matrice de } \varphi \text{ dans la base } \mathscr{B} \text{ est bien triangulaire.}}$$

- Comme A est une matrice triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathrm{Sp}(\varphi) = \mathrm{Sp}(A) = \{1\}.}$$

Commentaire

On a décrit précisément la matrice A, matrice représentative de φ dans la base $\mathscr{B}$. Un tel niveau de détail n'était sans doute pas attendu. On pouvait par exemple conclure de la manière suivante.

- Tout d'abord, d'après ***2.a)*** : $\varphi(e_0) = e_0$. D'où : $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

- Soit $j \in [\![2, n]\!]$. D'après ***2.b)*** : $\varphi(e_j) - e_j \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$.
  On en déduit qu'il existe $Q_j \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$ tel que : $\varphi(e_j) - e_j = Q_j$. D'où : $\varphi(e_j) = Q_j + 1 \cdot e_j + 0 \cdot e_{j+1} + \cdots + 0 \cdot e_n$.

  Ainsi la matrice représentative de $\varphi(e_j)$ est de la forme : $\text{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\varphi(e_j)\big) = \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

  (les symboles $*$ représentent n'importe quels réels (pas forcément identiques)

Finalement, la matrice représentative A de φ dans $\mathscr{B}$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

d) Montrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Démonstration.

- La matrice A est triangulaire et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.
  Elle est donc inversible.

  $$\boxed{\text{On en déduit que l'endomorphisme } \varphi \text{ est bijectif.}}$$

- L'application φ est :
  × un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$,
  × bijective.

  $$\boxed{\text{L'application } \varphi \text{ est donc un automorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

Commentaire

Pour démontrer la bijectivité de φ, on pouvait aussi remarquer que l'application φ est :
× injective car $0 \notin \text{Sp}(\varphi)$,
× un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est un espace vectoriel **de dimension finie**.

□

3. a) Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, calculer $\varphi(P - P')$.

Démonstration.
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$\begin{array}{rcll}
\varphi(P-P') & = & \sum\limits_{k=0}^{n} (P-P')^{(k)} & \\
 & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \big(P^{(k)} - (P')^{(k)}\big) & \textit{(par linéarité des applications dérivée } k^{\text{ème}}\textit{)} \\
 & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \big(P^{(k)} - P^{(k+1)}\big) & \\
 & = & P^{(0)} - P^{(n+1)} & \textit{(par télescopage)}
\end{array}$$

Or, comme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors : $\deg(P) \leqslant n$. On en déduit : $P^{(n+1)} = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P-P') = P - 0_{\mathbb{R}_n[X]} = P.}$$

□

b) Déterminer φ^{-1}, puis écrire la matrice de φ^{-1} dans la base $\mathscr{B}$.

Démonstration.

- On note ψ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $\psi : P \mapsto P - P'$.
  Alors, d'après la question précédente, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$:
  $$(\varphi \circ \psi)(P) \ = \ \varphi\big(\psi(P)\big) \ = \ \varphi(P-P') \ = \ P$$
  $$\boxed{\text{Ainsi : } \varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}.}$$
- Comme l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie, on en déduit que ψ est bijective et : $\varphi^{-1} = \psi$.
  $$\boxed{\varphi^{-1} : P \mapsto P - P'.}$$

Commentaire

- Pour déterminer la bijection réciproque de φ, on cherche un endomorphisme ψ tel que :
  $$\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]} \quad \text{et} \quad \psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$$
- L'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ étant de dimension finie, il est même possible de ne démontrer qu'une des deux égalités précédentes. Plus précisément, si φ et ψ sont des endomorphismes d'un espace vectoriel **de dimension finie** E :
  $$\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]} \ \Rightarrow \ \begin{cases} \varphi \text{ et } \psi \text{ sont bijectives,} \\ \varphi^{-1} = \psi \text{ et } \psi^{-1} = \varphi \end{cases}$$
  (la propriété réciproque est évidemment vérifiée)
- On peut énoncer un résultat similaire dans l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Plus précisément, si A et B sont des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:
  $$AB = I_n \ \Rightarrow \ \begin{cases} A \text{ et } B \text{ sont inversibles,} \\ A^{-1} = B \text{ et } B^{-1} = A \end{cases}$$

- Soit $j \in [\![0, n]\!]$.

$$\begin{array}{rcl} \varphi^{-1}(e_j) & = & e_j - e'_j \\ & = & e_j - j \cdot e_{j-1} \\ & = & 0 \cdot e_0 + \cdots + 0 \cdot e_{j-2} + (-j) \cdot e_{j-1} + 1 \cdot e_j + 0 \cdot e_{j+1} + \cdots + 0 \cdot e_n \end{array}$$

D'où : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\varphi^{-1}(e_j)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -j \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

□

c) On donne le script **Python** suivant :

```
1  import numpy as np
2  import numpy.linalg as nla
3  n = int(input(‘‘Entrer la valeur de n :‘‘)
4  M = np.eye(n+1)
5  for k in range(n) :
6      M[k, k+1] = -(k+1)
7  A =  - - - - - -
8  print(A)
```

Compléter la sixième ligne de ce script pour qu'il affiche la matrice A de φ dans la base $\mathscr{B}$ lorsque la valeur de n est entrée par l'utilisateur.

Démonstration.

- **Début du programme**.
  On commence par stocker, dans la variable `n`, la valeur de n à l'aide d'une interface de dialogue avec l'utilisateur :

```
1  n = int(input(‘‘Entrer la valeur de n :‘‘)
```

  On initialise ensuite la variable `M` avec l'instruction :

```
3  M = np.eye(n+1)
```

  La variable `M` contient alors une matrice de $\mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux valent 1 et les autres sont nuls. La variable `M` contient donc la matrice I_{n+1}.

- **Structure itérative**.
Les lignes 4 à 5 consistent à mettre à jour la variable `M` pour qu'elle contiennent la matrice :

$$M \; = \; \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi^{-1}) \; = \; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme la variable `M` contient déjà I_{n+1}, il reste à modifier la surdiagonale de la façon suivante :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \; M_{k,k+1} = -(k+1)$$

On met donc à jour la variable `M` en conséquence :

```
4 for k in range(n) :
5     M[k, k+1] = -(k+1)
```

- **Fin du programme**.
À l'issue de cette boucle, la variable `M` contient $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi^{-1}) \; = \; A^{-1}$ (par isomorphisme de représentation). Or :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) \; = \; A \; = \; (A^{-1})^{-1}$$

Ainsi, pour que la variable `A` contienne $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$, on complète l'instruction de la manière suivante :

```
6 A = nla.inv(M)
```

On finit le programme en renvoyant la matrice A contenue dans la variable `A`.

```
7 print(A)
```

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, fournir la bonne réponse démontre la bonne compréhension du script et permet certainement d'obtenir la majorité des points alloués à cette question.
On procèdera de même dans les autres questions dans la suite de l'exercice.

□

Partie 2 : étude d'une autre application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$.

On désigne par x un réel quelconque.

4. a) Montrer que, pour tout entier naturel k, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^k \, \mathrm{e}^{-t} \, dt$ est convergente.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

- La fonction $t \mapsto t^k \, \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[x, +\infty[$ en tant que produit de fonctions continues sur cet intervalle. L'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^k \, \mathrm{e}^{-t} \, dt$ est donc impropre en $+\infty$.

- De plus :
  - $\times$ $t^k \, \mathrm{e}^{-t} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$
  - $\times$ $\forall t \in [1, +\infty[, \; \dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$ et $t^k \, \mathrm{e}^{-t} \geqslant 0$
  - $\times$ l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} \, dt$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant 2 ($2 > 1$). Elle est donc convergente.

  Par critère de négligeabilité d'intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^k \, \mathrm{e}^{-t} \, dt$ est convergente.
- Enfin, comme la fonction $t \mapsto t^k \, \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur **le segment** d'extrémités x et 1 (segment $[x, 1]$ si $x \leqslant 1$, segment $[1, x]$ si $x \geqslant 1$), l'intégrale $\displaystyle\int_x^1 t^k \, \mathrm{e}^{-t} \, dt$ est bien définie.

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } k \in \mathbb{N}, \text{ l'intégrale } \displaystyle\int_x^{+\infty} t^k \, \mathrm{e}^{-t} \, dt \text{ est convergente.}}$$

□

b) En déduire que, si P est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} P(t) \, \mathrm{e}^{-t} \, dt$ est convergente.

Démonstration.
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que : $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cdot e_k$.
Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$P(t) \, \mathrm{e}^{-t} \; = \; \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \, e_k(t) \right) \mathrm{e}^{-t} \; = \; \sum_{k=0}^{n} a_k \; t^k \, \mathrm{e}^{-t}$$

Or, d'après la question précédente, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, les intégrales $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^k \, \mathrm{e}^{-t} \, dt$ sont convergentes.

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{On en déduit que l'intégrale } \displaystyle\int_x^{+\infty} P(t) \, \mathrm{e}^{-t} \, dt \text{ est convergente} \\ \text{en tant que combinaison linéaire d'intégrales convergentes.} \end{array}}$$

□

5. a) Donner la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \, dt$.

Démonstration.
Soit $A \in [x, +\infty[$.

$$\int_x^A \mathrm{e}^{-t} \, dt \; = \; \Big[-\mathrm{e}^{-t} \Big]_x^A \; = \; -\mathrm{e}^{-A} + \mathrm{e}^{-x}$$

Or : $\lim\limits_{A \to +\infty} \mathrm{e}^{-A} = 0$.

$$\boxed{\text{D'où : } \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \, dt = \mathrm{e}^{-x}.}$$

□

b) Établir que pour tout entier naturel k, on a : $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^k \, \mathrm{e}^{-t} \, dt = k! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} \, \mathrm{e}^{-x}$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(k)$ où $\mathcal{P}(k)$: $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^k \, \mathrm{e}^{-t} \, dt = k! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} \, \mathrm{e}^{-x}$.

- **Initialisation**
  - D'une part, d'après la question précédente :
  $$\int_x^{+\infty} t^0 \, \mathrm{e}^{-t} \, dt = \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{-x}$$
  - D'autre part :
  $$0! \sum_{i=0}^{0} \frac{x^i}{i!} \, \mathrm{e}^{-x} = 1 \times \frac{x^0}{0!} \, \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}$$

  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(k)$ et démontrons $\mathcal{P}(k+1)$ (*i.e.* $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^{k+1} \, \mathrm{e}^{-t} \, dt = (k+1)! \sum_{i=0}^{k+1} \frac{x^i}{i!} \, \mathrm{e}^{-x}$).
  - Soit $A \in [x, +\infty[$. On procède par intégration par parties (IPP).
  $$\left| \begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & t^{k+1} & & u'(t) & = & (k+1)\, t^k \\ v'(t) & = & \mathrm{e}^{-t} & & v(t) & = & -\mathrm{e}^{-t} \end{array} \right.$$
  Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x, A]$.
  On obtient alors :
  $$\begin{aligned} \int_x^{A} t^{k+1} \, \mathrm{e}^{-t} \, dt &= \left[\, t^{k+1} \times (-\mathrm{e}^{-t}) \, \right]_x^A - \int_x^A (k+1)\, t^k \times (-\mathrm{e}^{-t}) \, dt \\ &= -A^{k+1} \, \mathrm{e}^{-A} + x^{k+1} \, \mathrm{e}^{-x} + (k+1) \int_x^A t^k \mathrm{e}^{-t} \, dt \end{aligned}$$
  Or, par croissances comparées : $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} A^{k+1} \, \mathrm{e}^{-A} = 0$. D'où, comme les intégrales $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^{k+1} \, \mathrm{e}^{-t} \, dt$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^k \, \mathrm{e}^{-t} \, dt$ sont convergentes d'après ***4.a)*** :
  $$\begin{aligned} \int_x^{+\infty} t^{k+1} \, \mathrm{e}^{-t} \, dt &= x^{k+1} \, \mathrm{e}^{-x} + (k+1) \int_x^{+\infty} t^k \, \mathrm{e}^{-t} \, dt \\ &= x^{k+1} \, \mathrm{e}^{-x} + (k+1) \left(k! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} \, \mathrm{e}^{-x} \right) \quad \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= x^{k+1} \, \mathrm{e}^{-x} + (k+1)! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} \, \mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

- Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
(k+1)! \sum_{i=0}^{k+1} \frac{x^i}{i!}\, \mathrm{e}^{-x} &= (k+1)! \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \right) \mathrm{e}^{-x} \\
&= \left((k+1)! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} + \cancel{(k+1)!}\, \frac{x^{k+1}}{\cancel{(k+1)!}} \right) \mathrm{e}^{-x} \\
&= (k+1)! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} + x^{k+1}\, \mathrm{e}^{-x}
\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(k+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall k \in \mathbb{N},\ \int_x^{+\infty} t^k\, \mathrm{e}^{-t}\, dt \ = \ k! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!}\, \mathrm{e}^{-x}.}$$

□

6. Informatique.

a) On admet que si `u` est une liste, la commande **Python** `prod(u)` renvoie le produit des éléments de `u`.
Utiliser l'égalité obtenue à la question ***5.b)*** pour compléter le script **Python** suivant afin qu'il calcule et qu'il affiche la variable `s` contenant la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^k\, \mathrm{e}^{-t}\, dt$, les valeurs de `x` et de `k` étant entrées par l'utilisateur.

```
k = int(input(“Entrer la valeur de k :“)
x = float(input(“Entrer la valeur de x :“)
p = np.prod([i for i in range(1,k+1)])
u =  - - - - - - -  ./  - - - - - - -
s = p *  - - - - - - -  * np.exp(-x)
print(s)
```

Démonstration.

- **Début du programme**.
  Comme précisé dans l'énoncé, les valeurs suivantes sont définies par l'utilisateur grâce à une interface de dialogue :
  × la valeur de k est stockée dans la variable `k` :

```
k = int(input(“Entrer la valeur de k :“)
```

  × la valeur de x est stockée dans la variable `x` :

```
x = float(input(“Entrer la valeur de x :“)
```

  On définit ensuite la variable `p` à l'aide de l'instruction suivante :

```
p = np.prod([i for i in range(1,k+1)])
```

  La variable `p` contient donc le produit des éléments du vecteurs $(1, 2, \ldots, k)$.
  Ainsi, `p` contient $1 \times 2 \times \cdots \times k \ = \ k!$.

- **Cœur du programme.**

  On souhaite stocker dans la variable `s` la valeur $k! \sum\limits_{i=0}^{k} \dfrac{x^i}{i!}\ \mathrm{e}^{-x}$. Pour cela on commence par stocker, dans la variable `u`, un vecteur contenant tous les termes de la somme $\sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{x^i}{i!}$.

```
u = [x**i / np.prod([j for j in range(1, i+1)]) for i in range(k+1)]
```

  Détaillons cette instruction :

  × la commande `[j for j in range(1, i+1)]` renvoie la liste contenant tous les entiers de 1 à i : $(1, 2, \dots, i-1, i)$.
  La commande `np.prod([j for j in range(1, i+1)])` permet alors d'obtenir le réel : $1 \times 2 \times \cdots \times i = i!$.

  × la commande `x**i / np.prod([j for j in range(1, i+1)])` permet ensuite d'obtenir le réel $\dfrac{x^i}{i!}$.

  × finalement, la commande `[x**i / np.prod([j for j in range(1, i+1)]) for i in range(k+1)]` renvoie la liste :
$$\left(\frac{x^0}{0!}, \frac{x^1}{1!}, \dots, \frac{x^k}{k!} \right)$$

  Pour obtenir $\sum\limits_{i=0}^{k} \dfrac{x^i}{i!}$, il reste donc à sommer les coordonnées du vecteur `u`, ce que l'on obtient avec la commande : `sum(u)`.

  On peut ainsi stocker la valeur $k! \sum\limits_{i=0}^{k} \dfrac{x^i}{i!}\ \mathrm{e}^{-x}$ à l'aide de l'instruction suivante :

```
s = p * sum(u) * np.exp(-x)
```

  (on rappelle que la variable `p` contient la valeur $k!$)

Commentaire

On pouvait bien sûr privilégier l'utilisation d'une boucle for pour stocker la valeur $\sum\limits_{i=0}^{k} \dfrac{x^i}{i!}$ dans la variable `u` (démarche plus naturelle pour coder une somme).

```
u = 0
for i in range(n) :
    u = u + x**i / np.prod([j for j in range(1,i+1)])
s = p * u * np.exp(-x)
```

Ce n'étaient pas les instructions attendues par l'énoncé, mais elles permettaient assurément d'obtenir la majorité des points alloués à cette question.

- **Fin du programme.**

  À l'issue des lignes précédentes, la variable `s` contient la valeur $k! \sum\limits_{i=0}^{k} \dfrac{x^i}{i!}\ \mathrm{e}^{-x}$. Or, d'après la question précédente :
$$k! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!}\ \mathrm{e}^{-x} = \int_{x}^{+\infty} t^k\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$$
  On finit donc le programme en renvoyant cette valeur contenue dans la variable `s` à l'utilisateur.

```
print(s)
```

□

b) **Seulement pour les cubes** :

Montrer, grâce à un changement de variable simple : $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^k \, \mathrm{e}^{-t} \, dt \;=\; \mathrm{e}^{-x} \int_0^{+\infty} (u+x)^k \, \mathrm{e}^{-u} \, du$.

En déduire la commande manquante du script **Python** suivant afin qu'il permette de calculer et d'afficher une valeur approchée de $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^k \, \mathrm{e}^{-t} \, dt$ grâce à la méthode de Monte Carlo.

```
import numpy.random as nr
k = int(input(“Entrer la valeur de k :“)
x = float(input(“Entrer la valeur de x :“)
Z = nr.exponential(1, 100000)
s = np.exp(-x) * np.mean(  - - - - - -  )
print(s)
```

Démonstration.

- On effectue le changement de variable $\boxed{u = t - x}$.

$$\left|\begin{array}{l} u = t - x \quad \text{(et donc } t = u + x\text{)} \\ \hookrightarrow du = dt \\ \bullet\ t = x \;\Rightarrow\; u = 0 \\ \bullet\ t = +\infty \;\Rightarrow\; u = +\infty \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto u + x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.
On obtient alors :

$$\int_x^{+\infty} t^k \, \mathrm{e}^{-t} \, dt \;=\; \int_0^{+\infty} (u+x)^k \, \mathrm{e}^{-(u+x)} \, du$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \int_x^{+\infty} t^k \, \mathrm{e}^{-t} \, dt \;=\; \mathrm{e}^{-x} \int_0^{+\infty} (u+x)^k \, \mathrm{e}^{-u} \, du.}$$

Commentaire

Le programme officiel précise que « les changements de variables **non affines** ne seront pratiqués qu'avec des intégrales sur un segment ». Il est donc autorisé, sous réserve de convergence, d'effectuer un changement de variable affine sur une intégrale généralisée (ce qui est fait dans cette question).

- L'idée de la méthode de Monte-Carlo est de faire apparaître $\displaystyle\int_0^{+\infty} (u+x)^k \mathrm{e}^{-u} \, du$ sous la forme d'une espérance qu'on pourra alors approcher à l'aide d'une simulation informatique.
  - × On considère Z une v.a.r. telle que $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ de densité : $f_Z = u \mapsto \left\{\begin{array}{cl} 0 & \text{si } u < 0 \\ \mathrm{e}^{-u} & \text{si } u \geqslant 0 \end{array}\right.$.

    Notons alors V la v.a.r. définie par : $V = (Z+x)^k$.
  - × La v.a.r. V admet une espérance si et seulement si la v.a.r. $Z + x$ admet un moment d'ordre k. Or, la v.a.r. Z admet un moment d'ordre k si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \, f_Z(t) \, dt$ converge absolument, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour les calculs de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^m \, f_Z(t) \, dt$.

× Comme f_Z est nulle en dehors de $[0, +\infty[$, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k\, f_Z(t)\, dt \ = \ \int_0^{+\infty} t^k\, f_Z(t)\, dt$$

× Or, pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$t^k\, f_Z(t) \ = \ t^k\, \mathrm{e}^{-t}$$

De plus, d'après la question ***4.a*** appliquée à $x = 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k\, \mathrm{e}^{-t}\, dt$ est convergente.
On en déduit que la v.a.r. Z admet un moment d'ordre k.

× Ainsi, la v.a.r. $Z + x$ admet un moment d'ordre k en tant que transformée affine de la v.a.r. Z qui en admet un.

$$\boxed{\text{Finalement, la v.a.r. } V \text{ admet une espérance.}}$$

× Enfin, par définition de f_Z, on obtient l'espérance de V sous la forme :

$$\mathbb{E}(V) \ = \ \int_0^{+\infty} (u+x)^k\, f_Z(u)\, du \ = \ \int_0^{+\infty} (u+x)^k\, \mathrm{e}^{-u}\, du \ = \ \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} t^k\, \mathrm{e}^{-t}\, dt$$

(où la dernière égalité a été démontrée par changement de variable)

× L'énoncé demande donc de déterminer une valeur approchée de $\mathrm{e}^{-x}\, \mathbb{E}(V)$. L'idée naturelle pour obtenir une approximation de l'espérance $\mathbb{E}(V)$ est :

- de simuler un grand nombre de fois ($N = 100000$ est ici ce grand nombre) la v.a.r. V.
  Formellement, on souhaite obtenir un N-uplet $(v_1, \dots, v_N)$ qui correspond à l'observation d'un N-échantillon $(V_1, \dots, V_N)$ de la v.a.r. V.
  (les v.a.r. V_i sont indépendantes et ont même loi que V)
- de réaliser la moyenne des résultats de cette observation.

Cette idée est justifiée par la loi faible des grands nombres (LfGN) qui affirme :

$$\text{moyenne de l'observation} \ = \ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} v_i \ \simeq \ \mathbb{E}(V)$$

× Cela se traduit de la manière suivante en **Python** :

- la ligne 3 permet d'obtenir des valeurs $(z_1, \dots, z_{100000})$ qui correspondent à l'observation d'un 100000-échantillon $(Z_1, \dots, Z_{100000})$ de la v.a.r. Z.

```
4  Z = nr.exponential(1, 100000)
```

- pour d'obtenir les valeurs $(v_1, \dots, v_{100000})$ qui correspondent à l'observation d'un 100000-échantillon $(V_1, \dots, V_100000)$ de la v.a.r. V, on utilise la commande suivante : `(Z + x).^k`.
- il faut ensuite calculer la moyenne de ces observations avec la commande `np.mean` :

```
np.mean( (Z + x)**k )
```

On rappelle alors qu'on cherche, non pas une valeur approchée de $\mathbb{E}(V)$, mais une valeur approchée de $\mathrm{e}^{-x}\, \mathbb{E}(V)$.. On complète alors le script de l'énoncé de la façon suivante :

```
5  s = np.exp(-x) * np.mean( (Z + x)**k )
```

Commentaire

- Un tel niveau d'explication n'est pas attendu aux concours : l'écriture du passage manquant démontr la compréhension de toutes les commandes en question. On décrit ici de manière précise les instruction afin d'aider le lecteur un peu moins habile en **Python**.
- On a utilisé en 4 une fonction prédéfinie en **Python**. D'autres solutions sont possibles. Tout d'abord, on peu utiliser la fonction `sum` :

```
5   s = np.exp(-x) * (sum( (Z + x)**k ) / 100000)
```

On peut aussi effectuer la somme à l'aide d'une boucle :

```
5   S = 0
6   for i in range(100000) :
7       S = S + (Z[i] + x)**k
8   s = np.exp(-x) * (S / 100000)
```

Étant donné la forme du script ed l'énoncé, le concepteur avait en tête la première solution. Cependant, il est raisonnable de penser que toute réponse juste sera comptée comme telle. Ainsi, les deux solutions précédentes rapportent certainement la totalité des points.

- On pouvait également calculer de manière isolée le 100000-uplet d'observation $(v_1, \ldots, v_{100000})$ à partir des observations $(z_1, \ldots, z_{100000})$ pour plus de lisibilité :

```
5   V = (Z + x)**k
6   s = np.exp(-x) * np.mean(V)
```

□

On considère maintenant l'application qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, associe la fonction $F = \Psi(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ F(x) = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} P(t)\, \mathrm{e}^{-t}\, dt$$

7. a) Montrer que Ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après la question ***4.b)***, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} P(t)\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$ est convergente. Ainsi, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\Psi(P)$ est bien défini.

- Démontrons que Ψ est linéaire

  Soit $(P_1, P_2) \in \big(\mathbb{R}_n[X]\big)^2$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.

  $$\begin{aligned}
  &\big(\Psi(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2)\big)(x) \\
  = \ & \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} (\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2)(t)\ dt \\
  = \ & \mathrm{e}^x \left(\lambda_1 \int_x^{+\infty} P_1(t)\ \mathrm{e}^{-t}\ dt + \lambda_2 \int_x^{+\infty} P_2(t)\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \right) && \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\
  = \ & \lambda_1\ \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} P_1(t)\ \mathrm{e}^{-t}\ dt + \lambda_2\ \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} P_2(t)\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \\
  = \ & \lambda_1\ \big(\Psi(P_1)\big)(x) + \lambda_2\ \big(\Psi(P_2)\big)(x) \\
  = \ & \big(\lambda_1 \cdot \Psi(P_1) + \lambda_2 \cdot \Psi(P_2)\big)(x)
  \end{aligned}$$

  D'où : $\Psi(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2) = \lambda_1 \cdot \Psi(P_1) + \lambda_2 \cdot \Psi(P_2)$.

  $\boxed{\text{On en déduit que } \Psi \text{ est linéaire.}}$

- Démontrons que Ψ est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$

  Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que : $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k\, X^k$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.

  $$\begin{aligned}
  \big(\Psi(P)\big)(x) &= \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} P(t)\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \\
  &= \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k\, t^k \right) \mathrm{e}^{-t}\ dt \\
  &= \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \left(\mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} t^k\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \right) && \textit{(par linéarité de l'intégrale, les intégrales étant convergentes)} \\
  &= \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \left(\cancel{\mathrm{e}^x} \times k! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!}\ \cancel{\mathrm{e}^{-x}} \right) && \textit{(d'après \textbf{5.b)})}
  \end{aligned}$$

  On en déduit :

  $$\begin{aligned}
  \big(\Psi(P)\big)(x) &= \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{k} \lambda_k\ \frac{k!}{i!}\ x^i \right) \\
  &= \sum_{0 \leqslant i \leqslant k \leqslant n} \lambda_k\ \frac{k!}{i!}\ x^i \\
  &= \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=i}^{n} \lambda_k\ \frac{k!}{i!}\ x^i \right)
  \end{aligned}$$

  Ainsi, en posant $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $\mu_i = \sum\limits_{k=i}^{n} \lambda_k\ \dfrac{k!}{i!}$, on obtient : $\big(\Psi(P)\big)(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \mu_i\ x^i$.

  $\boxed{\text{On en déduit : } \Psi(P) \in \mathbb{R}_n[X].}$

$\boxed{\text{Finalement, } \Psi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$

□

b) Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner une relation entre F , F' et P.

Démonstration.

- On commence par noter G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $G : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} P(t)\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$.
  *(la fonction G est bien définie sur $\mathbb{R}$ d'après **4.b)**).*
  Soit $x \in \mathbb{R}$. Remarquons de plus, par relation de Chasles :
  $$\int_0^{+\infty} P(t)\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \ = \ \int_0^{x} P(t)\ \mathrm{e}^{-t}\ dt + \int_x^{+\infty} P(t)\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$$
  Ainsi :
  $$G(x) \ = \ \int_0^{+\infty} P(t)\ \mathrm{e}^{-t}\ dt - \int_0^{x} P(t)\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$$
- La fonction $t \mapsto P(t)\,\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc une primitive H de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
  $$G(x) \ = \ \int_0^{+\infty} P(t)\ \mathrm{e}^{-t}\ dt - \big(H(x) - H(0)\big) \qquad (*)$$
  La fonction G est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en tant que transformée affine de la fonction H qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
  $$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que la fonction } F = \exp \times G \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \\ \text{en tant que produit de fonctions declasse } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.\end{array}}$$
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $F = \exp \times G$:
  $$F'(x) \ = \ \mathrm{e}^x \times G(x) + \mathrm{e}^x \times G'(x)$$
  Or, d'après $(*)$: $G'(X) = -H'(x) = -P(x)\,\mathrm{e}^{-x}$. Ainsi :
  $$\begin{aligned} F'(x) \ &= \ \mathrm{e}^x \times G(x) + \cancel{\mathrm{e}^x} \times \big(-P(x)\,\cancel{\mathrm{e}^{-x}}\big) \\ &= \ F(x) - P(x) \end{aligned}$$
  $$\boxed{F' = F - P}$$

□

c) Montrer que Ψ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Démonstration.

- Démontrons que Ψ est injectif, c'est-à-dire : $\mathrm{Ker}(\Psi) = \{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}$.
  Procédons par double inclusion.
  $(\supset)$ Comme $\mathrm{Ker}(\Psi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$, alors : $\{0_{\mathbb{R}_n[X]}\} \subset \mathrm{Ker}(\Psi)$.
  $(\subset)$ Soit $P \in \mathrm{Ker}(\Psi)$.

Alors	$\Psi(P) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$	
c'est-à-dire	$F = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$	
d'où	$F' = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$	
ainsi	$F - P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$	*(d'après la question précédente)*
finalement	$P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$	*(car $F = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$)*

On obtient : $\mathrm{Ker}(\Psi) \subset \{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'endomorphisme } \Psi \text{ est injectif.}}$$

- Finalement l'application Ψ est :
  - × injective,
  - × un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est un espace vectoriel **de dimension finie**.

$$\boxed{\text{L'application } \Psi \text{ est donc un automorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

☐

8. On considère un polynôme P non nul, vecteur propre de Ψ pour une valeur propre λ non nulle.

a) Utiliser la relation obtenue à la question ***7.b)*** pour établir : $P' = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda}\ P$.

Démonstration.
Le polynôme P est un vecteur propre de Ψ associé à la valeur propre λ ($\lambda \neq 0$).

$$\begin{array}{lcr} \text{Alors} & \Psi(P) = \lambda \cdot P & \\ \text{c'est-à-dire} & F = \lambda\ P & \\ \text{donc} & F' = \lambda\ P' & \\ \text{d'où} & F - P = \lambda\ P' & \textit{(d'après } \textbf{\textit{7.b)}}\textit{)} \\ \text{ainsi} & \lambda\ P - P = \lambda\ P' & \\ \text{puis} & (\lambda - 1)\ P = \lambda\ P' & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Enfin, comme } \lambda \neq 0 : P' = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda}\ P.}$$

☐

b) En déduire, en considérant les degrés, que $\lambda = 1$ est la seule valeur propre possible de Ψ.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord que 0 n'est pas valeur propre de Ψ, car Ψ est bijective d'après ***7.c)***.
- On procède par l'absurde.
  Supposons qu'il existe une valeur propre de Ψ notée λ avec : $\lambda \neq 1$.
  D'après le point précédent : $\lambda \neq 0$. On peut donc appliquer la question ***8.a)***. Ainsi, en notant P un vecteur propre de Ψ associé à la valeur propre λ, on a :
  $$\frac{\lambda - 1}{\lambda}\ P = P'$$
  Ainsi :
  - × d'une part :
  $$\deg\left(\frac{\lambda - 1}{\lambda}\ P\right) = \deg(P')$$
  - × d'autre part, comme $\lambda \neq 0$, on obtient : $\dfrac{\lambda - 1}{\lambda} \neq 0$. Ainsi :
  $$\deg\left(\frac{\lambda - 1}{\lambda}\ P\right) = \deg(P)$$

  Ainsi : $\deg(P) = \deg(P')$.
  Or, comme P est un vecteur propre de Ψ : $P \neq 0_{\mathbb{R}_n[X]}$. On en déduit : $\deg(P') < \deg(P)$.
  Finalement : $\deg(P) < \deg(P)$. Absurde.

$$\boxed{\text{La seule valeur propre possible de } \Psi \text{ est 1.}}$$

Commentaire

On prendra bien garde à ne pas oublier d'écarter le cas où $P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$. En effet, dans ce cas : $\deg(P) = -\infty$. Et ainsi :

$$\deg(P) = \deg(P')$$

$\square$

c) Montrer enfin que $\lambda = 1$ est bien la seule valeur propre de Ψ. (On ne demande pas le sous-espace propre associé).

Démonstration.
Démontrons que e_0 est vecteur propre de Ψ associé à la valeur propre 1.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\big(\Psi(e_0)\big)(x) &= \mathrm{e}^{x} \int_{x}^{+\infty} e_0(t)\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \\
&= \mathrm{e}^{x} \int_{x}^{+\infty} 1 \times \mathrm{e}^{-t}\ dt \\
&= \mathrm{e}^{x}\ \mathrm{e}^{-x} && \textit{(d'après } \textbf{\textit{5.a)}}\textit{)} \\
&= 1 \ = \ e_0(x)
\end{aligned}$$

Ainsi :

× $e_0 \neq 0_{\mathbb{R}_n[X]}$

× $\Psi(e_0) = 1 \cdot e_0$

D'où e_0 est vecteur propre de Ψ associé à la valeur propre 1, et 1 est donc valeur propre de Ψ.

$$\boxed{\text{Finalement, d'après la question précédente : } \mathrm{Sp}(\Psi) = \{1\}.}$$

$\square$

9. a) Montrer que les endomorphismes φ et Ψ sont égaux.

Démonstration.

- Démontrons d'abord : $\forall j \in [\![0, n]\!]$, $\varphi(e_j) = \Psi(e_j)$.
  Soit $j \in [\![0, n]\!]$.
  × D'une part, soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\big(\Psi(e_j)\big)(x) &= \mathrm{e}^{x} \int_{x}^{+\infty} e_j(t)\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \\
&= \mathrm{e}^{x} \int_{x}^{+\infty} t^j\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \\
&= \cancel{\mathrm{e}^{x}} \times j! \sum_{i=0}^{j} \frac{x^i}{i!}\ \cancel{\mathrm{e}^{-x}} && \textit{(d'après } \textbf{\textit{5.a)}}\textit{)} \\
&= \sum_{i=0}^{j} \frac{j!}{i!}\ e_i(t)
\end{aligned}$$

  Ainsi : $\Psi(e_j) = \sum\limits_{i=0}^{j} \dfrac{j!}{i!} \cdot e_i$.

× D'autre part, par récurrence immédiate :

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ e_j^{(k)} = \left\{ \begin{array}{cc} j\ (j-1)\ \cdots\ (j-k+2)\ (j-k+1)\ e_{j-k} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant j \\ 0 & \text{si } k > j \end{array} \right.$$

D'où :

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ e_j^{(k)} = \left\{ \begin{array}{cc} \dfrac{j!}{(j-k)!}\ e_{j-k} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant j \\ 0 & \text{si } k > j \end{array} \right.$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} \varphi(e_j) & = & \sum\limits_{k=0}^{n} e_j^{(k)} & \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{j} \dfrac{j!}{(j-k)!}\ e_{j-k} & \\ & = & \sum\limits_{i=0}^{j} \dfrac{j!}{i!}\ e_i & \textit{(avec le changement d'indice : } i = j-k\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall j \in [\![0,n]\!],\ \Psi(e_j) = \varphi(e_j).}$$

Commentaire

Remarquons qu'effectuer le changement d'indice $i = j-k$ revient simplement à écrire la somme dans le sens inverse :

$$\begin{array}{rcl} \sum\limits_{k=0}^{j} \dfrac{j!}{(j-k)!}\ e_{j-k} & = & \dfrac{j!}{j!}\ e_j + \dfrac{j!}{(j-1)!}\ e_{j-1} + \cdots + \dfrac{j!}{(j-(j-1))!}\ e_{j-(j-1)} + \dfrac{j!}{(j-j)!}\ e_{j-j} \\ & = & \dfrac{j!}{j!}\ e_j + \dfrac{j!}{(j-1)!}\ e_{j-1} + \cdots + \dfrac{j!}{1!}\ e_1 + \dfrac{j!}{0!}\ e_0 \\ \sum\limits_{i=0}^{j} \dfrac{j!}{i!}\ e_i & = & \dfrac{j!}{0!}\ e_0 + \dfrac{j!}{1!}\ e_1 + \cdots + \dfrac{j!}{(j-1)!}\ e_{j-1} + \dfrac{j!}{j!}\ e_j \end{array}$$

- Démontrons maintenant : $\Psi = \varphi$.
  Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que : $P = \sum\limits_{j=0}^{n} \lambda_j \cdot e_j$.

$$\begin{array}{rcll} \Psi(P) & = & \Psi\left(\sum\limits_{j=0}^{n} \lambda_j\, e_j\right) & \\ & = & \sum\limits_{j=0}^{n} \lambda_j \cdot \Psi(e_j) & \textit{(par linéarité de } \Psi\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{j=0}^{n} \lambda_j \cdot \varphi(e_j) & \textit{(d'après le point précédent)} \\ & = & \varphi\left(\sum\limits_{j=0}^{n} \lambda_j \cdot e_j\right) & \textit{(par linéarité de } \varphi\textit{)} \\ & = & \varphi(P) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \Psi = \varphi.}$$

Commentaire

On a ici commencé par démontrer que les endomorphismes φ et Ψ étaient égaux sur **une base** de $\mathbb{R}_n[X]$, avant de conclure que ces deux endomorphismes sont égaux par linéarité de ces applications. Cette méthode est à privilégier lorsqu'on veut montrer une égalité entre deux applications linéaires.

□

b) En déduire que, si P est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ et s'il existe un réel a tel que pour tout réel x supérieur ou égal à a, on a $P(x) \geqslant 0$, alors :

$$\forall x \geqslant a,\ \sum_{i=0}^{n} P^{(i)}(x) \geqslant 0$$

Démonstration.
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \geqslant a,\ P(x) \geqslant 0$.
Soit $x \geqslant a$.

- Tout d'abord :

$$\forall t \geqslant a,\ P(t)\ \mathrm{e}^{-t} \geqslant 0$$

- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant :

$$\int_x^{+\infty} P(t)\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \ \geqslant\ 0$$

(cette inégalité est bien vérifiée car l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} P(t)\ e^{-t}\ dt$ *est convergente d'après **4.b)**)*

- Ainsi, comme $\mathrm{e}^x \geqslant 0$:

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{e}^x \displaystyle\int_x^{+\infty} P(t)\ \mathrm{e}^{-t}\ dt & \geqslant & 0 \\ & & \shortparallel & & \\ \varphi(x) & = & \Psi(x) & & \end{array}$$

(d'après la question précédente)

$$\boxed{\text{Par définition de } \varphi : \forall x \geqslant a,\ \sum_{i=0}^{n} P^{(i)}(x) \geqslant 0.}$$

□

Problème

Dans tout le problème, r désigne un entier naturel vérifiant $1 \leqslant r \leqslant 10$. Une urne contient 10 boules distinctes B_1, B_2, ..., B_{10}. Une expérience aléatoire consiste à y effectuer une suite de tirages d'une boule **avec remise**, chaque boule ayant la même probabilité de sortir à chaque tirage.
Cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Commentaire

Il est vivement conseillé de prendre le temps de comprendre précisément l'expérience aléatoire. Un défaut de compréhension aura en effet des répercussions importantes sur le reste du problème. Le contenu initial de l'urne est une donnée primordiale. Il est précisé de manière très explicite que l'urne contient 10 boules. Le rôle de l'entier r est par contre beaucoup moins clair. Il faut comprendre que parmi les 10 boules de l'urne, on en distingue r. Plus précisément, les boules $B_1, \ldots, B_r$ sont considérés comme différentes (on aurait pu les choisir d'une autre couleur par exemple) des boules $B_{r+1}, \ldots, B_{10}$.

Partie I : Étude du nombre de tirages nécessaires pour obtenir au moins une fois chacune des boules $B_1, \ldots, B_r$

On suppose que le nombre de tirages nécessaires pour obtenir au moins une fois chacune des boules $B_1, \ldots, B_r$ définit une variable aléatoire Y_r sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. Cas particulier $r = 1$.
Montrer que la variable aléatoire Y_1 suit une loi géométrique ; préciser son paramètre, son espérance et sa variance.

Démonstration.

- Par définition, Y_1 est le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule B_1.
  - × L'expérience consiste en une succession d'une infinité d'épreuves de Bernoulli (tirage d'une boule dans l'urne) indépendantes et de même paramètre de succès $\dfrac{1}{10}$ (probabilité d'obtenir la boule B_1).
  - × La v.a.r. Y_1 est le rang du premier succès de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en conclut : } Y_1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{10}\right).}$$

Commentaire

- Même si cela n'est pas explicitement supposé dans l'énoncé, on fait ici l'hypothèse que les tirages sont indépendants. Il est à noter que les tirages se font avec remise. Ainsi, la composition de l'urne n'est pas modifiée au cours des tirages. Il est alors raisonnable de penser que la probabilité de tirer une boule lors d'un tirage ne dépend pas des résultats des autres tirages.
- Le fait que la composition de l'urne reste inchangée tout au long de l'expérience permet de démontrer que la probabilité de tirer la boule B_1 est de $\frac{1}{10}$ à chaque tirage. Par contre, lorsque les tirages s'effectuent sans remise, l'expérience consiste toujours en une succession d'épreuves de Bernoulli mais celles-ci ont des paramètres de succès différents.
- En cas d'absence de remise, il est naturel de conditionner par des événements permettant de préciser le contenu de l'urne avant que le tirage n'ait lieu. Cela nous amène généralement à l'utilisation de la formule des probabilités composées ainsi qu'à celle des probabilités totales.

- Comme $Y_1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{10}\right)$, alors Y_1 admet une espérance et une variance données par :

$$\mathbb{E}(Y_1) = \frac{1}{\frac{1}{10}} = 10 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(Y_1) = \frac{1-\frac{1}{10}}{\left(\frac{1}{10}\right)^2} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{1}{100}} = \frac{9}{10} \times 100 = 90$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_1) = 10 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Y_1) = 90}$$

□

2. On suppose que r est supérieur ou égal à 2.

a) Calculer la probabilité pour que les r boules B_1, B_2, ..., B_r sortent dans cet ordre aux r premiers tirages.

Démonstration.

- Tout d'abord, notons A l'événement « les r boules $B_1, B_2, \ldots, B_r$ sortent dans cet ordre aux r premiers tirages ».
- Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note T_i la v.a.r. égale au numéro de la boule tirée lors du $i^{\text{ème}}$ tirage.
On a alors :

$$A = [T_1 = 1] \cap [T_2 = 2] \cap \ldots \cap [T_r = r]$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\big([T_1 = 1] \cap [T_2 = 2] \cap \ldots \cap [T_r = r]\big) \\
&= \mathbb{P}\big([T_1 = 1]\big) \times \mathbb{P}\big([T_2 = 2]\big) \times \ldots \times \mathbb{P}\big([T_r = r]\big) && \textit{(par indépendance des tirages)} \\
&= \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \ldots \times \frac{1}{10} && \textit{(car chaque boule a la même probabilité d'apparaître)} \\
&= \left(\frac{1}{10}\right)^r
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}(A) = \left(\frac{1}{10}\right)^r}$$

Commentaire

- On a introduit dans cette question des v.a.r. T_i.
On aurait aussi pu introduire, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ et tout $j \in [\![1, r]\!]$ l'événement :

$$A_i^j \text{ : « la boule } B_j \text{ a été tirée lors du } i^{\text{ème}} \text{ tirage »}$$

Dans ce cas : $A = A_1^1 \cap \ldots \cap A_r^r$.
- Il était aussi possible d'introduire, pour tout $j \in [\![1, r]\!]$ l'événement :

$$C_j \text{ : « la boule } B_j \text{ a été tirée lors du } j^{\text{ème}} \text{ tirage »}$$

Dans ce cas : $A = B_1 \cap \ldots \cap B_r$.
- Ce dernier choix est certainement le plus adapté à la question posée. Les autres permettent l'introduction de v.a.r. ou événements plus généraux qui pourront être utilisés dans d'autres questions de l'énoncé.

Commentaire

- Il était enfin possible de traiter cette question par dénombrement. On considère alors que l'expérience consiste à effectuer r tirages successifs et avec remise dans l'urne contenant initialement 10 boules.
  × Dans ce cas, Ω_1 (l'univers des possibles de l'expérience ci-dessus) est l'ensemble des r-uplets de l'ensemble $\mathscr{B} = [\![1, 10]\!]$ des boules.
  (ici la boule est désignée par son numéro mais on pourrait aussi considérer l'ensemble des boules sous la forme $\mathscr{B} = \{B_1, \ldots, B_{10}\}$)
  Ainsi : $\text{Card}(\Omega_1) = 10^r$.
  × Comme Ω_1 est un ensemble fini, on choisit comme tribu $\mathscr{A}_1 = \mathcal{P}(\Omega_1)$.
  × Enfin, on munit $(\Omega_1, \mathscr{A}_1)$ de la probabilité uniforme notée $\mathbb{P}_1$ (chaque r-tirage a même probabilité d'appraître).

  Le seul r-tirage qui réalise l'événement A est : $(1, 2, \ldots, r)$.
  Autrement dit : $A = \{(1, 2, \ldots, r)\}$. On en déduit :

$$\mathbb{P}_1(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega_1)} = \frac{1}{10^r}$$

□

b) En déduire la probabilité $\mathbb{P}\big([Y_r = r] \big)$.

Démonstration.

- L'événement $[Y_r = r]$ est réalisé si et seulement si il a fallu attendre r tirages pour obtenir au moins une fois chacune des boules $B_1, \ldots, B_r$.
  Autrement dit, cet événement est réalisé si et seulement si on obtient exactement une fois chacune des boules $B_1, \ldots, B_r$ lors des r premiers tirages.
- Ainsi, l'événement $[Y_r = r]$ est réalisé par tous les r-tirages qui contiennent chaque nombre de $[\![1, r]\!]$. Un tel r-tirage est entièrement déterminé par :
  × le numéro (élément de $[\![1, r]\!]$) en $1^{\text{ère}}$ position : r possibilités.
  × le numéro (élément de $[\![1, r]\!]$) en $2^{\text{ème}}$ position, différent du numéro précédent : $r - 1$ possibilités.
  × ...
  × le numéro (élément de $[\![1, r]\!]$) en $r^{\text{ème}}$ position, différent des numéros précédents : 1 possibilité.

  Il y a donc $r \times (r-1) \times \ldots \times 1 = r!$ tels r-tirages.
  (chacun de ces r-tirage n'est autre qu'une permutation de l'ensemble $[\![1, r]\!]$)
- Chacun de ces r-tirages a la même probabilité d'apparaître puisque l'ordre dans lequel les boules $B_1, \ldots, B_r$ n'a pas d'influence sur le résultat.
  Par exemple :

$$\mathbb{P}\big([T_1 = 1] \cap [T_2 = 2] \cap \ldots \cap [T_r = r] \big) = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\big([T_1 = r] \cap [T_2 = r-1] \cap \ldots \cap [T_r = 1] \big)$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathbb{P}\big([Y_r = r] \big) = r! \times \mathbb{P}(A) = \frac{r!}{10^r}.}$$

Commentaire

- Il était possible de traiter entièrement cette question par dénombrement. On a déterminé le nombre de r-tirages réalisant l'événement considéré. Or, il y a 10^r r-tirages en tout.
On en conclut, en reprenant les notations de la question précédente :

$$\mathbb{P}\big([Y_r = r]\big) \;=\; \frac{\text{Card}\,\big([Y_r = r]\big)}{\text{Card}(\Omega_1)} \;=\; \frac{r!}{10^r}$$

- Il était aussi possible, mais plus technique, en opérant par décomposition d'événements. Notons $\mathcal{S}_r$ l'ensemble des permutations de l'ensemble $[\![1, r]\!]$. Alors :

$$[Y_r = r] \;=\; \bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}_r} \Big(\bigcap_{i=1}^{r} [T_i = \sigma(i)] \Big)$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([Y_r = r]\big) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}_r} \Big(\bigcap_{i=1}^{r} [T_i = \sigma(i)] \Big) \right) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{r} [T_i = \sigma(i)] \right) && \textit{(car les événements de la famille } \Big(\bigcap_{i=1}^{r} [T_i = \sigma(i)]\Big)_{\sigma \in \mathcal{S}_r} \textit{ sont 2 à 2 incompatibles)} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r} \left(\prod_{i=1}^{r} \mathbb{P}\big([T_i = \sigma(i)]\big) \right) && \textit{(par indépendance des tirages)} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r} \left(\prod_{i=1}^{r} \frac{1}{10} \right) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r} \left(\frac{1}{10} \right)^r \;=\; r! \times \left(\frac{1}{10} \right)^r && \textit{(car } \text{Card}\,\big(\mathcal{S}_r\big) = r!\textit{)}
\end{aligned}$$

□

c) Préciser l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable aléatoire Y_r.

Démonstration.

- Il faut au minimum r tirages pour obtenir au moins une fois chacune des r boules $B_1, \ldots, B_r$.

$$\boxed{Y_r(\Omega) \;\subset\; [\![r, +\infty[\![}$$

- De plus, n'importe quelle valeur $i \in [\![r, +\infty[\![$ peut être atteinte par Y_r. Démontrons-le.
Soit $i \in [\![r, +\infty[\![$. Considérons par exemple l'∞-tirage ω défini par :

$$\omega = (1, 2, \ldots, r-1, r-1, \ldots, r-1, r, \ldots)$$

Ce tirage apparaît si l'on tire les boules $B_1, \ldots, B_{r-1}$ dans cet ordre, suivi du tirage répété de la boule B_{r-1} jusqu'au $i^{\text{ème}}$ tirage où la boule B_r est tirée. Cet ∞-tirage ω réalise l'événement $[Y_r = i]$ (ce qui démontre que Y_r peut prendre la valeur i).

$$\boxed{\text{Finalement, l'ensemble des valeurs que peut prendre } Y_r \text{ est } Y_r(\Omega) = [\![r, +\infty[\![.}$$

□

3. On suppose encore que r est supérieur ou égal à 2. Pour tout entier i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant r$, on désigne par W_i la variable aléatoire représentant le nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, i boules distinctes parmi les boules B_1, B_2, ... , B_r soient sorties (en particulier, on a : $W_r = Y_r$). On pose :

$$\begin{cases} X_1 = W_1 \\ \forall i \in [\![2, r]\!],\ X_i = W_i - W_{i-1} \end{cases}$$

On admet que les variables aléatoires X_1, ..., X_r sont indépendantes.

a) Exprimer la variable aléatoire Y_r à l'aide des variables aléatoires X_1, ..., X_r.

Démonstration.

- Par définition :

$$\forall i \in [\![2, r]\!],\ X_i = W_i - W_{i-1}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \sum\limits_{i=2}^{r} X_i & = & \sum\limits_{i=2}^{r} \big(W_i - W_{i-1}\big) & \\ & = & W_r - W_1 & \textit{(par télescopage)} \\ & = & W_r - X_1 & \textit{(car } X_1 = W_1\textit{)} \\ & = & Y_r - X_1 & \textit{(car } Y_r = W_r\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } Y_r = X_1 + \sum_{i=2}^{r} X_i = \sum_{i=1}^{r} X_i.}$$

□

b) Interpréter concrètement la variable aléatoire X_i pour tout i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant r$.

Démonstration.
Soit $i \in [\![2, r]\!]$.

- La v.a.r. W_i prend pour valeur le nombre de tirages nécessaires pour qu'on ait obtenu, pour la première fois, i boules distinctes parmi B_1, ..., B_r.
- Comme $X_i = W_i - W_{i-1}$, la v.a.r. a donc pour valeur la différence entre :
  - × le nombre de tirages nécessaires à l'obtention de i boules distinctes parmi B_1, ..., B_r.
  - et × le nombre de tirages nécessaires à l'obtention de $(i-1)$ boules distinctes parmi B_1, ..., B_r.

> Ainsi, pour tout $i \in [\![2, r]\!]$, la v.a.r. X_i est donc le nombre de tirages nécessaires entre la première obtention de $i-1$ boules distinctes parmi B_1, ..., B_r et la première obtention de i boules distinctes parmi B_1, ..., B_r.

- Par définition, $X_1 = W_1$.

> La v.a.r. X_1 est donc le nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, une des boules B_1, ..., B_r.

Commentaire

La première définition est en réalité aussi adaptée pour le cas $i = 1$. On peut en effet considérer que la v.a.r. X_1 est le nombre de tirages nécessaires entre la première obtention de 0 boule parmi B_1, ..., B_r (sous-entendu ce qu'on a avant le premier tirage) et la première obtention d'une boule B_1, ..., B_r. On retrouve ainsi que X_1 est la v.a.r. qui donne le nombre de tirages nécessaires à la première obtention d'une boule parmi B_1, ..., B_r. □

c) Montrer que, pour tout i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant r$, la variable aléatoire X_i suit une loi géométrique ; préciser son espérance et sa variance.

Démonstration.
Soit $i \in [\![1, r]\!]$.
D'après la question précèdente, X_i est la v.a.r. qui prend pour valeur le nombre de tirages nécessaires entre la première obtention de $i-1$ boules distinctes parmi $B_1, \ldots, B_r$ et la première obtention de i boules distinctes parmi $B_1, \ldots, B_r$.

- L'expérience consiste en une succession d'une infinité d'épreuves de Bernoulli (tirage d'une boule dans l'urne) indépendantes et de même paramètre de succès $\dfrac{r-(i-1)}{10}$ (probabilité d'obtenir, dans l'urne contenant 10 boules, une boule qui est une des boules $B_1, \ldots, B_r$ mais qui n'est pas une des $i-1$ boules distinctes parmi $B_1, \ldots, B_r$ déjà obtenue au moins une fois).
- La v.a.r. X_i est le rang du premier succès de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en conclut : } X_i \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{r-i+1}{10}\right).}$$

- Comme $X_i \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{r-i+1}{10}\right)$, alors X_i admet une espérance et une variance données par :

$$\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{\frac{r-i+1}{10}} = \frac{10}{r-i+1}$$

$$\mathbb{V}(X_i) = \frac{1-\frac{r-i+1}{10}}{\left(\frac{r-i+1}{10}\right)^2} = \frac{\frac{10-(r-i+1)}{10}}{\frac{(r-i+1)^2}{10^2}} = \frac{10-(r-i+1)}{\cancel{10}} \times \frac{10^{\cancel{2}}}{(r-i+1)^2}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que pour tout } i \in [\![1, r]\!],\ \mathbb{E}(X_i) = \frac{10}{r-i+1} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X_i) = 10\ \frac{10-(r-i+1)}{(r-i+1)^2}.}$$

□

d) On pose : $S_1(r) = \sum\limits_{k=1}^{r} \dfrac{1}{k}$ et $S_2(r) = \sum\limits_{k=1}^{r} \dfrac{1}{k^2}$.
Exprimer l'espérance $\mathbb{E}(Y_r)$ et la variance $\mathbb{V}(Y_r)$ de Y_r à l'aide de $S_1(r)$ et de $S_2(r)$.

Démonstration.

- D'après la question **3.a)**, $Y_r = \sum\limits_{i=1}^{r} X_i$. La v.a.r. Y_r admet une variance (et donc une espérance) comme somme de v.a.r. qui admettent chacune une variance (et donc une espérance).
- De plus :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_r) &= \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{r} X_i\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \mathbb{E}(X_i) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \frac{10}{r-i+1} \\
&= \sum_{j=1}^{r} \frac{10}{j} && \textit{(à l'aide du changement d'indice } j = r+1-i\textit{)} \\
&= 10\ S_1(r)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_r) = 10\ S_1(r)}$$

- Enfin :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{V}(Y_r) & = & \mathbb{V}\Big(\sum\limits_{i=1}^{r} X_i \Big) & \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{r} \mathbb{V}(X_i) & \textit{(car, d'après l'énoncé, les v.a.r. de la famille } (X_i)_{i \in [\![1,r]\!]} \textit{ sont indépendantes)} \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{r} 10 \times \dfrac{10 - (r-i+1)}{(r-i+1)^2} & \\
& = & 10 \sum\limits_{i=1}^{r} \left(\dfrac{10}{(r-i+1)^2} - \dfrac{\cancel{r-i+1}}{(r-i+1)^{\cancel{2}}} \right) & \\
& = & 10 \left(10 \sum\limits_{i=1}^{r} \dfrac{1}{(r-i+1)^2} - \sum\limits_{i=1}^{r} \dfrac{1}{r-i+1} \right) & \\
& = & 10 \left(10 \sum\limits_{j=1}^{r} \dfrac{1}{j^2} - \sum\limits_{j=1}^{r} \dfrac{1}{j} \right) & \textit{(à l'aide du changement d'indice } j = r+1-i \textit{)} \\
& = & 100\, S_2\,(r) - 10 S_1\,(r) &
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(Y_r) = 100\ S_2(r) - 10\ S_1(r).}$$

Commentaire

Le changement d'indice $j = r + 1 - i$ n'est rien d'autre qu'une sommation dans l'autre sens :

$$\begin{array}{rcl}
\sum\limits_{i=1}^{r} \dfrac{1}{r+1-i} & = & \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r-1} + \cdots + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{1} \\
& = & \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{r-1} + \dfrac{1}{r} = \sum\limits_{j=1}^{r} \dfrac{1}{j}
\end{array}$$

□

4. a) Si k est un entier naturel non nul, préciser le minimum et le maximum de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sur l'intervalle $[k, k+1]$ et en déduire un encadrement de l'intégrale $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt$.

Démonstration.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in [k, k+1]$. Alors :

$$\begin{array}{rcccccl}
& k & \leqslant & t & \leqslant & k+1 & \\
\text{donc} & \dfrac{1}{k} & \geqslant & \dfrac{1}{t} & \geqslant & \dfrac{1}{k+1} & \textit{(par décroissance de } t \mapsto \frac{1}{t} \textit{ sur }]0, +\infty[\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, le minimum de } t \mapsto \frac{1}{t} \text{ est } \frac{1}{k+1} \text{ et son maximum est } \frac{1}{k} \text{ sur } [k, k+1].}$$

- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($k \leqslant k+1$) :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k}\, dt & \geqslant & \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt & \geqslant & \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\, dt \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ \big((k+1)-k\big)\,\dfrac{1}{k} & & \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt & & \big((k+1)-k\big)\,\dfrac{1}{k+1} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } k \in \mathbb{N}^* : \ \frac{1}{k+1} \ \leqslant \ \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt \ \leqslant \ \frac{1}{k}.}$$

Commentaire

- Il faut noter que les intégrales en présence sont bien définies.
  En effet, les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{k}$, $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{k+1}$ sont continues sur le **segment** $[k, k+1]$.
- Il est important de noter que l'argument de bonne définition est essentiel dans le cas où l'on étudie des intégrales impropres. Dans ce cas, il est essentiel de démontrer la convergence de ces intégrales impropres avant de pouvoir utiliser la croissance de l'intégrale.

□

b) Si r est supérieur ou égal à 2, donner un encadrement de $S_1(r)$ et en déduire la double inégalité :

$$10\,\ln(r+1) \ \leqslant \ \mathbb{E}(Y_r) \ \leqslant \ 10\,\big(\ln(r)+1\big)$$

Démonstration.
Soit $r \geqslant 2$. D'après la question ***4.a)*** :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{k+1} \ \leqslant \ \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt \ \leqslant \ \frac{1}{k}$$

- En sommant les inégalités de droite pour k variant de 1 à r, on obtient :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k} \\ & & & & \shortparallel & & \shortparallel \\ \ln(r+1) & = & \big[\ \ln(t)\ \big]_1^{r+1} & = & \displaystyle\int_1^{r+1} \frac{1}{t}\, dt & & S_1(r) \end{array} \quad \textit{(par relation de Chasles)}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } S_1(r) \ \geqslant \ \ln(r+1).}$$

- En sommant les inégalités de gauche pour k variant de 1 à $r-1$, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{k+1} & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{r-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \displaystyle\sum_{i=2}^{r} \frac{1}{i} & & \displaystyle\int_1^{r} \frac{1}{t}\, dt \end{array} \qquad \textit{(par relation de Chasles)}$$

Puis en ajoutant 1 de part et d'autre :

$$1+\sum_{i=2}^{r}\frac{1}{i}\leqslant 1+\ln(r)$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } S_1(r)\leqslant \ln(r)+1.}$$

- En combinant les deux inégalité précédentes, on obtient :

$$\begin{array}{ccccc} 10\ \ln(r+1) & \leqslant & 10\ S_1(r) & \leqslant & 10\ \big(\ln(r)+1\big) \\ & & \shortparallel & & \\ & & \mathbb{E}(Y_r) & & \end{array}$$

*(d'après la question **3.d)**)*

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall r\geqslant 2,\ 10\ \ln(r+1)\ \leqslant\ \mathbb{E}(Y_r)\ \leqslant\ 10\ (\ln(r)+1).}$$

□

c) Si r supérieur ou égal à 2, établir par une méthode analogue à celle de la question précédente, la double inégalité :

$$1-\frac{1}{r+1}\ \leqslant\ S_2(r)\ \leqslant\ 2-\frac{1}{r}$$

En déduire un encadrement de $\mathbb{V}(Y_r)$.

Démonstration.
Soit $r\geqslant 2$.

- Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Soit $t\in[k,k+1]$. Alors :

$$\begin{array}{rccccc} & k & \leqslant & t & \leqslant & k+1 \\ \text{donc} & \dfrac{1}{k^2} & \geqslant & \dfrac{1}{t^2} & \geqslant & \dfrac{1}{(k+1)^2} \end{array}$$

(par décroissance de $t\mapsto \frac{1}{t}$ sur $]0,+\infty[$)

$$\boxed{\text{Ainsi, le minimum de } t\mapsto\frac{1}{t} \text{ est } \frac{1}{k+1} \text{ et son maximum est } \frac{1}{k} \text{ sur } [k,k+1].}$$

- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($k\leqslant k+1$) :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{k^2}\,dt & \geqslant & \displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{t^2}\,dt & \geqslant & \displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{(k+1)^2}\,dt \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ \big((k+1)-k\big)\,\dfrac{1}{k^2} & & \displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{t^2}\,dt & & \big((k+1)-k\big)\,\dfrac{1}{(k+1)^2} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } k\in\mathbb{N}^* : \frac{1}{(k+1)^2}\ \leqslant\ \int_k^{k+1}\frac{1}{t^2}\,dt\ \leqslant\ \frac{1}{k^2}.}$$

- En sommant les inégalités de droite pour k variant de 1 à r, on obtient :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \int_{k}^{k+1} \frac{1}{t^2}\, dt & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k^2} & \\ & & & \shortparallel & & \shortparallel & \\ 1 - \dfrac{1}{r+1} & = & \left[-\dfrac{1}{t} \right]_1^{r+1} = & \displaystyle\int_{1}^{r+1} \frac{1}{t^2}\, dt & & S_2(r) & \textit{(par relation de Chasles)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } 1 - \frac{1}{r+1} \leqslant S_2(r).}$$

- En sommant les inégalités de gauche pour k variant de 1 à $r-1$, on obtient :

$$\begin{array}{ccccccc} & & \displaystyle\sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{(k+1)^2} & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{r-1} \int_{k}^{k+1} \frac{1}{t^2}\, dt & & \\ & & \shortparallel & & \shortparallel & & \\ S_2(r) - 1 & = & \displaystyle\sum_{k=2}^{r} \frac{1}{k^2} & & \displaystyle\int_{1}^{r} \frac{1}{t^2}\, dt & = & \left[-\dfrac{1}{t} \right]_1^{r} = 1 - \dfrac{1}{r} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } S_2(r) - 1 \leqslant 1 - \frac{1}{r} \text{ puis : } S_2(r) \leqslant 2 - \frac{1}{r}.}$$

$$\boxed{\text{En conclusion : } 1 - \frac{1}{r+1} \leqslant S_2(r) \leqslant 2 - \frac{1}{r}.}$$

- Or, d'après la question ***3.d)*** :

$$\mathbb{V}(Y_r) = 100\, S_2\,(r) - 10\, S_1\,(r)$$

En reprenant les inégalités précédentes :

$$100\, \left(1 - \frac{1}{r+1}\right) \leqslant 100\ S_2(r) \leqslant 100\, \left(2 - \frac{1}{r}\right)$$

$$\text{donc} \quad 100\, \left(1 - \frac{1}{r+1}\right) - 10\, S_1(r) \ \leqslant\ \underbrace{100\ S_2(r) - 10\, S_1(r)}_{= \mathbb{V}(Y_r)} \ \leqslant\ 100\, \left(2 - \frac{1}{r}\right) - 10\, S_1(r)$$

Enfin, d'après la question précédente :

$$-10\big(\ln(r) + 1\big) \ \leqslant\ -10\, S_1(r) \qquad \text{et} \qquad -10\, S_1(r) \ \leqslant\ -10\, \ln(r+1)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{On en déduit :} \\ \forall r \geqslant 2,\ 100 \left(1 - \dfrac{1}{r+1}\right) - 10\, (\ln(r) + 1) \leqslant \mathbb{V}\,(Y_r) \leqslant 100 \left(2 - \dfrac{1}{r}\right) - 10 \ln(r+1) \end{array}}$$

□

Partie II : Étude du nombre de boules distinctes parmi les boules B_1, B_2, …, B_r tirées au moins une fois au cours des n premiers tirages

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on suppose que le nombre de boules distinctes parmi les boules B_1, B_2, …, B_r tirées au moins une fois au cours des n premiers tirages, définit une variable aléatoire Z_n sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On note $\mathbb{E}(Z_n)$ l'espérance de Z_n et on pose $Z_0 = 0$.
Pour tout entier naturel n non nul et pour tout entier naturel k, on note $p_{n,k}$ la probabilité de l'événement $[Z_n = k]$ et on pose : $p_{n,-1} = 0$.

5. Étude des cas particuliers $n = 1$ et $n = 2$.

a) Déterminer la loi de Z_1 et donner son espérance.

Démonstration.

- Par définition, la v.a.r. Z_1 prend pour valeur le nombre de boules distinctes parmi $B_1, \dots, B_r$ obtenues en un seul tirage. On considère alors que l'expérience consiste à effectuer 1 tirage.
  - × Cette expérience possède deux issues. Il y a succès si on obtient une boule parmi $B_1, \dots,$ B_r (ce qui se produit avec probabilité $\frac{r}{10}$) et échec dans le cas contraire.
  - × La v.a.r. Z_1 prend la valeur 1 en cas de succès de l'expérience et prend pour valeur 0 sinon.

$$\boxed{\text{On en conclut : } Z_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{r}{10}\right) \text{ et } \mathbb{E}(Z_1) = \frac{r}{10}.}$$

Commentaire

Il est conseillé d'utiliser la rédaction indiquée au-dessus lorsque l'on reconnaît une loi usuelle. Toutefois, il peut arriver que, de par le découpage des questions, le sujet attende une rédaction plus détaillée. On développe ci-dessous la rédaction la plus générale consistant tout d'abord à préciser l'ensemble image puis obtenir la loi de Z_1 à l'aide d'une décomposition d'événements.

- Lorsqu'on effectue ce tirage, deux cas se présentent :
  - × soit on obtient une boule parmi $B_1, \dots, B_r$.
    Dans ce cas, la v.a.r. Z_1 prend la valeur 1.
  - × soit on obtient une boule parmi $B_{r+1}, \dots, B_{10}$.
    Dans ce cas, la v.a.r. Z_1 prend la valeur 0.

  On en déduit : $Z_1(\Omega) = \{0, 1\}$. Ainsi : $Z_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ où $p = \mathbb{P}\big([Z_1 = 1]\big)$.
- De plus (avec les notations introduites précédemment) :

$$[Z_1 = 1] \; = \; [T_1 = 1] \cup \ldots \cup [T_1 = r]$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([Z_1 = 1]\big) &= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{r} [T_1 = i]\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{r} \mathbb{P}\big([T_1 = i]\big) && \textit{(car les événements de la famille } \big([T_1 = i]\big)_{i \in [\![1,r]\!]} \textit{ sont 2 à 2 incompatibles)} \\ &= \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{10} = \frac{r}{10} \end{aligned}$$

On a bien : $Z_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{r}{10}\right)$.

□

b) On suppose, dans cette question, que r est supérieur ou égal à 2.
Déterminer la loi de Z_2 et montrer que son espérance est donnée par : $\mathbb{E}(Z_2) = \dfrac{19\,r}{100}$.

Démonstration.

- Par définition, la v.a.r. Z_2 prend pour valeur le nombre de boules distinctes parmi $B_1, \ldots, B_r$ obtenues après deux tirages. Or en deux tirages, on peut obtenir au plus 2 boules distinctes parmi $B_1, \ldots, B_r$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } Z_2(\Omega) \subset \{0,1,2\}.}$$

Commentaire

On peut être plus précis et démontrer : $Z_2(\Omega) = \{0,1,2\}$.
On peut par exemple remarquer que :
× le 2-tirage $(r+1, r+1)$ réalise $[Z_2 = 0]$,
(les deux premiers tirages ont fourni 2 *boules qui ne sont pas parmi* $B_1, \ldots, B_r$*)*
× le 2-tirage $(1, r+1)$ réalise $[Z_2 = 1]$,
(les deux premiers tirages ont fourni 1 *boule parmi* $B_1, \ldots, B_r$ *et* 1 *qui ne l'est pas)*
× le 2-tirage $(1, r)$ réalise $[Z_2 = 2]$.
(les deux premiers tirages ont fourni 2 *boules parmi* $B_1, \ldots, B_r$*)*

- La famille $\big([Z_1 = 0], [Z_1 = 1]\big)$ est un système complet d'événements.
Soit $i \in \{0,1,2\}$. D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}\big([Z_2 = i]\big) = \mathbb{P}\big([Z_1 = 0] \cap [Z_2 = i]\big) + \mathbb{P}\big([Z_1 = 1] \cap [Z_2 = i]\big)$$

- Plusieurs cas se présentent.

× Si $i = 0$ alors :

$$[Z_1 = 1] \cap [Z_2 = 0] = \varnothing$$

En effet, si le premier tirage a fourni une boule parmi $B_1, \ldots, B_r$, au bout de deux tirages on a forcément obtenu au moins une boule parmi $B_1, \ldots, B_r$. On en déduit :

$$\mathbb{P}\big([Z_2 = 0]\big) = \mathbb{P}\big([Z_1 = 0] \cap [Z_2 = 0]\big)$$

On considère alors que l'expérience consiste à effectuer deux tirages successifs et avec remise.
– Dans ce cas, Ω_2 (l'univers des possibles de l'expérience ci-dessus) est l'ensemble des 2-uplets de l'ensemble $\mathscr{B} = [\![1, 10]\!]$ des boules. Ainsi : $\text{Card}(\Omega_2) = 10^2$.
– Comme Ω_2 est un ensemble fini, on choisit comme tribu $\mathscr{A}_2 = \mathcal{P}(\Omega_2)$.
– Enfin, on munit $(\Omega_2, \mathscr{A}_2)$ de la probabilité uniforme notée $\mathbb{P}_2$ (chaque 2-tirage a même probabilité d'apparaître).

L'événement $[Z_1 = 0] \cap [Z_2 = 0]$ est réalisé par tous les 2-tirages qui contiennent deux nombres de $[\![r+1, 10]\!]$. Un tel 2-tirage est entièrement déterminé par :
× le numéro (élément de $[\![r+1, 10]\!]$) en 1$^{\text{ère}}$ position : $10 - (r+1) + 1 = 10 - r$ possibilités.
× le numéro (élément de $[\![r+1, 10]\!]$) en 2$^{\text{ème}}$ position : $10 - (r+1) + 1 = 10 - r$ possibilités.
Il y a donc : $(10-r)^2$ tels 2-tirages. Finalement :

$$\mathbb{P}_2\big([Z_1 = 0] \cap [Z_2 = 0]\big) = \frac{\text{Card}\big([Z_1 = 0] \cap [Z_2 = 0]\big)}{\text{Card}(\Omega_2)} = \frac{(10-r)^2}{10^2}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}\big([Z_2 = 0]\big) = \frac{(10-r)^2}{10^2}.}$$

Commentaire

On peut aussi procéder par décomposition d'événement.
On reprend les notations de la question ***2.a)***. Remarquons tout d'abord :

$$[Z_2 = 0] \ = \ [r+1 \leqslant T_1 \leqslant 10] \ \cap \ [r+1 \leqslant T_2 \leqslant 10]$$

$\left(\begin{array}{l} \textit{l'événement } [Z_2 = 0] \textit{ est réalisé si et seulement si les deux premiers} \\ \textit{tirages fournissent une boule parmi } B_{r+1}, \ \dots, \ B_{10} \end{array}\right)$

On en déduit : T_1 et T_2 sont indépendantes car les tirages se font avec remise. Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} & & \mathbb{P}\big([Z_2 = 0] \big) & \\ & = & \mathbb{P}\big([r+1 \leqslant T_1 \leqslant 10] \ \cap \ [r+1 \leqslant T_2 \leqslant 10] \big) & \\ & = & \mathbb{P}\big([r+1 \leqslant T_1 \leqslant 10] \big) \times \mathbb{P}\big([r+1 \leqslant T_2 \leqslant 10] \big) & \textit{(car les v.a.r. } T_1 \textit{ et } T_2 \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=r+1}^{10} [T_1 = i] \right) \times \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=r+1}^{10} [T_2 = i] \right) & \\ & = & \left(\sum\limits_{i=r+1}^{10} \mathbb{P}\big([T_1 = i] \big) \right) \times \left(\sum\limits_{i=r+1}^{10} \mathbb{P}\big([T_2 = j] \big) \right) & \textit{(car les événements de la famille } \big([T_1 = i] \big)_{i \in [\![r+1,10]\!]} \textit{ et de la famille } \big([T_2 = j] \big)_{j \in [\![r+1,10]\!]} \textit{ sont 2 à 2 incompatibles)} \\ & = & \left(\sum\limits_{i=r+1}^{10} \dfrac{1}{10} \right) \times \left(\sum\limits_{i=r+1}^{10} \dfrac{1}{10} \right) & \\ & = & \dfrac{10-r}{10} \times \dfrac{10-r}{10} & \end{array}$$

× Si $i = 2$ alors :

$$[Z_1 = 0] \cap [Z_2 = 2] = \varnothing$$

En effet, si le premier tirage n'a pas fourni de boule parmi $B_1, \dots, B_r$, on ne peut en avoir obtenu deux distinctes au bout de deux tirages. On en déduit :

$$\mathbb{P}\big([Z_2 = 2] \big) = \mathbb{P}\big([Z_1 = 1] \cap [Z_2 = 2] \big)$$

L'événement $[Z_1 = 1] \cap [Z_2 = 2]$ est réalisé par tous les 2-tirages qui contiennent deux nombres distincts de $[\![1, r]\!]$. Un tel 2-tirage est entièrement déterminé par :

× le numéro (élément de $[\![1, r]\!]$) en $1^{\text{ère}}$ position : r possibilités.
× le numéro (élément de $[\![1, r]\!]$) en $2^{\text{ème}}$ position, différent du 1^{er} : $r-1$ possibilités.

Il y a donc : $r \times (r-1)$ tels 2-tirages. Finalement :

$$\mathbb{P}_2\big([Z_1 = 1] \cap [Z_2 = 2] \big) = \frac{\mathrm{Card}\,\big([Z_1 = 1] \cap [Z_2 = 2] \big)}{\mathrm{Card}(\Omega_2)} = \frac{r \times (r-1)}{10^2}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}\big([Z_2 = 2] \big) = \frac{r \times (r-1)}{10^2}.}$$

Commentaire

Ici aussi il était possible de procéder par décomposition d'événements. Tout d'abord :

$$[Z_2 = 2] = \bigcup_{\substack{(i,j) \in [\![1,r]\!]^2 \\ i \neq j}} [T_1 = i] \ \cap \ [T_2 = j]$$

$$\left(\begin{array}{l} \textit{l'événement } [Z_2 = 2] \textit{ est réalisé si et seulement si les deux premiers} \\ \textit{tirages fournissent deux boules distinctes parmi } B_1, \ \ldots, \ B_r \end{array} \right)$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rll}
& \mathbb{P}\big([Z_2 = 2] \big) & \\
= & \mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{\substack{(i,j) \in [\![1,r]\!]^2 \\ i \neq j}} [T_1 = i] \ \cap \ [T_2 = j] \Big) & \\
= & \sum\limits_{\substack{(i,j) \in [\![1,r]\!]^2 \\ i \neq j}} \mathbb{P}\big([T_1 = i] \ \cap \ [T_2 = j] \big) & \textit{(car les événements de la famille } \big([T_1 = i] \ \cap \ [T_2 = j] \big)_{\substack{(i,j) \in [\![1,r]\!]^2 \\ i \neq j}} \textit{ sont deux à deux incompatibles)} \\
= & \sum\limits_{\substack{(i,j) \in [\![1,r]\!]^2 \\ i \neq j}} \mathbb{P}\big([T_1 = i]\big) \times \mathbb{P}\big([T_2 = j] \big) & \textit{(car les v.a.r. } T_1 \textit{ et } T_2 \textit{ sont indépendantes)} \\
= & \sum\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant r \\ i \neq j}} \mathbb{P}\big([T_1 = i] \big) \times \mathbb{P}\big([T_2 = j] \big) & \\
= & \sum\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant r \\ i \neq j}} \dfrac{1}{100} & \textit{(car pour tout } (i,j) \in [\![1,r]\!]^2, \ \mathbb{P}\big([T_1 = i] \big) = \dfrac{1}{10} = \mathbb{P}\big([T_2 = j] \big)\textit{)} \\
= & \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant r} \dfrac{1}{100} - \sum\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant r \\ i = j}} \dfrac{1}{100} & \\
= & \sum\limits_{i=1}^{r} \left(\sum\limits_{j=1}^{r} \dfrac{1}{100} \right) - \sum\limits_{k=1}^{r} \dfrac{1}{100} & \\
= & \sum\limits_{i=1}^{r} \left(\dfrac{r}{100} \right) - \dfrac{r}{100} \ = \ \dfrac{r^2}{100} - \dfrac{r}{100} \ = \ \dfrac{r(r-1)}{100} &
\end{array}$$

- La famille $([Z_2 = 0] \, , [Z_2 = 1] \, , [Z_2 = 2])$ forme un système complet d'événements.
  On en déduit :
  $$\mathbb{P}\big([Z_2 = 0] \big) + \mathbb{P}\big([Z_2 = 1] \big) + \mathbb{P}\big([Z_2 = 2] \big) = 1$$
  Et ainsi :
  $$\begin{array}{rcl}
  \mathbb{P}\big([Z_2 = 1] \big) & = & 1 - \Big(\mathbb{P}\big([Z_2 = 0] \big) + \mathbb{P}\big([Z_2 = 2] \big) \Big) \\
  & = & 1 - \dfrac{(10-r)^2}{100} - \dfrac{r(r-1)}{100} \\
  & = & \dfrac{1}{100} \ \big(100 - (100 - 20\,r + r^2) - r^2 + r \big) \ = \ \dfrac{21\,r - 2\,r^2}{100}
  \end{array}$$
  $$\boxed{\mathbb{P}\big([Z_2 = 1] \big) = \dfrac{21\,r - 2\,r^2}{100}}$$

- La v.a.r. Z_2 est finie. Elle admet donc une espérance.
  De plus :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z_2) &= \sum_{i=0}^{2} i\ \mathbb{P}\big([Z_2 = i]\big) \\ &= 0 \times \frac{(10-r)^2}{100} + 1 \times \left(\frac{21r - 2r^2}{100}\right) + 2 \times \frac{r(r-1)}{100} \\ &= \frac{19\,r}{100}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Z_2) = \frac{19\,r}{100}}$$

Commentaire

- La valeur de $\mathbb{E}(Z_2)$ est fournie dans l'énoncé. Cela permet de mettre en avant le lien suivant :

$$1 \times \mathbb{P}\big([Z_2 = 1]\big) + 2 \times \mathbb{P}\big([Z_2 = 2]\big) = \frac{19\,r}{100}$$

  Ainsi, si on a déterminé $\mathbb{P}\big([Z_2 = 2]\big)$, il est possible de vérifier la valeur de $\mathbb{P}\big([Z_2 = 1]\big)$ à l'aide de cette égalité. Ensuite, à l'aide de l'égalité :

$$\mathbb{P}\big([Z_2 = 0]\big) + \mathbb{P}\big([Z_2 = 1]\big) + \mathbb{P}\big([Z_2 = 2]\big) = 1$$

  on peut alors vérifier la valeur de $\mathbb{P}\big([Z_2 = 0]\big)$.
- Il est tout à fait possible, **au brouillon**, d'opérer par rétro-ingénierie, c'est à dire partir du résultat donné par l'énoncé ($\mathbb{E}(Z_2)$ en l'occurrence) pour en déduire un résultat intermédiaire ($\mathbb{P}\big([Z_2 = 1]\big)$ puis $\mathbb{P}\big([Z_2 = 0]\big)$). Évidemment, partir du résultat ne constitue en aucun cas une démonstration. Mais la valeur du résultat intermédiaire peut parfois renseigner sur la voie à choisir pour le démontrer.

$\square$

6. Établir, pour tout entier naturel n non nul et pour tout entier naturel k au plus égal à r, l'égalité :

$$10\,p_{n,k} \;=\; (10 - r + k)\,p_{n-1,k} + (r + 1 - k)\,p_{n-1,k-1} \qquad (*)$$

Vérifier que cette égalité reste vraie dans le cas où k est supérieur ou égal à $r+1$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [\![0, r]\!]$.

- Tout d'abord, remarquons : $Z_{n-1}(\Omega) \subset [\![0, r]\!]$.
  En effet, en n tirages, on obtient au plus r boules distinctes parmi les boules B_1, ..., B_r.

$$\boxed{Z_{n-1}(\Omega) \subset [\![0, r]\!]}$$

  Notons au passage que ce résultat est aussi vérifié pour $n = 1$.
  En effet : Z_0 est la v.a.r. constante nulle. On a donc bien : $Z_0(\Omega) = \{0\} \subset [\![0, r]\!]$.

Commentaire

La propriété $Z_n(\Omega) \subset [\![0,r]\!]$ (inclusion et non égalité) est suffisante pour pouvoir conclure que la famille $\big([Z_{n-1} = i]\big)_{i\in[\![0,r]\!]}$ est un système complet d'événements. Afin de bien comprendre ce point, on peut l'illustrer à l'aide de la v.a.r. Z_1 (cas où $n = 2$).
On a vu en question ***5.a)*** : $Z_1(\Omega) = \{0, 1\}$. Ainsi :

$$\big([Z_1 = 0]\,, [Z_1 = 1]\big) \quad \text{est un système complet d'événements}$$

mais on peut aussi remarquer :

$$\underbrace{\big([Z_1 = 0]\,, [Z_1 = 1]\,, [Z_1 = 2]\,, [Z_1 = 3]\big)}_{\big([Z_1 = 0]\,, [Z_1 = 1]\,, \varnothing, \varnothing\big)} \quad \text{est un système complet d'événements}$$

Ceci provient du fait qu'ajouter un nombre fini (ou infini dénombrable) de fois l'événement impossible $\varnothing$, ne modifie pas les propriétés de définition d'un systeme complet d'événements.
La nouvelle famille obtenue :

× est toujours constituée d'événements 2 à 2 incompatibles. En effet :

$$[Z_1 = 0] \cap [Z_1 = 1] = \varnothing, \quad [Z_1 = 0] \cap \varnothing = \varnothing, \quad [Z_1 = 1] \cap \varnothing = \varnothing, \quad \varnothing \cap \varnothing = \varnothing$$

× la réunion de tous les événements de la famille n'est pas modifiée. En effet :

$$[Z_1 = 0] \cup [Z_1 = 1] \cup \varnothing \cup \varnothing = [Z_1 = 0] \cup [Z_1 = 1] = \Omega$$

- Ainsi, la famille $\big([Z_{n-1} = i]\big)_{i\in[\![0,r]\!]}$ est un système complet d'événements.
  D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\big([Z_n = k]\big) \\
= \ & \sum_{i=0}^{r} \mathbb{P}\big([Z_{n-1} = i] \cap [Z_n = k]\big) \\
= \ & \mathbb{P}\big([Z_{n-1} = k-1] \cap [Z_n = k]\big) + \mathbb{P}\big([Z_{n-1} = k] \cap [Z_n = k]\big) && \textit{(en effet, pour tout } i \in [\![1,r]\!], \textit{ si } i \neq k-1 \ \texttt{OU} \ i \neq k, \textit{ on a : } [Z_{n-1} = i] \cap [Z_n = k] = \varnothing \ (\star)) \\
= \ & \mathbb{P}\big([Z_{n-1} = k-1]\big) \times \mathbb{P}_{[Z_{n-1}=k-1]}\big([Z_n = k]\big) + \mathbb{P}\big([Z_{n-1} = k]\big) \times \mathbb{P}_{[Z_{n-1}=k]}\big([Z_n = k]\big)
\end{aligned}$$

- Revenons à la propriété $(\star)$.
  Soit $i \in [\![1,r]\!]$. Alors si $i \neq k-1$ `OU` $i \neq k$, on a :

$$[Z_{n-1} = i] \cap [Z_n = k] = \varnothing$$

  En effet, on ne peut obtenir à la fois $i < k-1$ (respectivement $i > k$) boules distinctes parmi B_1, $\dots$, B_r au cours des $n-1$ premiers tirages et k boules distinctes parmi B_1, $\dots$, B_r en ajoutant le $n^{\text{ème}}$ tirage. Autrement dit, le $n^{\text{ème}}$ tirage peut amener au plus une nouvelle boule non encore apparue parmi les boules B_1, $\dots$, B_r.

- Précisons maintenant les différents éléments de l'égalité issue de la formule des probabilités totales.
  - × Tout d'abord :
$$\mathbb{P}_{[Z_{n-1}=k-1]}\big([Z_n = k]\big) = \frac{r+1-k}{10}$$
En effet, si l'événement $[Z_{n-1} = k-1]$ est réalisé, c'est qu'on a obtenu $k-1$ boules distinctes parmi les boules $B_1, \ldots, B_r$ lors des $n-1$ premiers tirages. Dans ce cas, l'événement $[Z_n = k]$ est réalisé si et seulement si on tire une boule non encore obtenue (parmi les boules $B_1, \ldots, B_r$) lors du $n^{\text{ème}}$ tirage.
Or, parmi les 10 boules de l'urne, il y a $r-(k-1)$ boules non encore obtenues.
$$\boxed{\mathbb{P}_{[Z_{n-1}=k-1]}\big([Z_n = k]\big) = \frac{r+1-k}{10}}$$
  - × Ensuite :
$$\mathbb{P}_{[Z_{n-1}=k]}([Z_n = k]) = \frac{10-r+k}{10}$$
En effet, si l'événement $[Z_{n-1} = k]$ est réalisé, c'est qu'on a obtenu k boules distinctes parmi les boules $B_1, \ldots, B_r$ lors des $n-1$ premiers tirages. Dans ce cas, l'événement $[Z_n = k]$ est alors réalisé si et seulement si :
    - on obtient une des k boules distinctes déjà obtenue lors du $n^{\text{ème}}$ tirage.

    OU - on obtient une boule parmi les boules $B_{r+1}, \ldots, B_{10}$ lors du $n^{\text{ème}}$ tirage.

    Parmi les 10 boules de l'urne, il y a donc $k + \big(10-(r+1)+1\big) = 10-r+k$ boules dont le tirage permet de réaliser $[Z_n = k]$.
$$\boxed{\mathbb{P}_{[Z_{n-1}=k]}([Z_n = k]) = \frac{10-r+k}{10}}$$
- Finalement :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([Z_n = k]\big) &= \mathbb{P}\big([Z_{n-1} = k-1]\big) \times \mathbb{P}_{[Z_{n-1}=k-1]}\big([Z_n = k]\big) + \mathbb{P}\big([Z_{n-1} = k]\big) \times \mathbb{P}_{[Z_{n-1}=k]}\big([Z_n = k]\big) \\ &= \frac{r-k+1}{10}\, p_{n-1,k-1} + \frac{10-r+k}{10}\, p_{n-1,k}\end{aligned}$$
$$\boxed{\text{Et ainsi : } 10\, p_{n,k} = (10-r+k)\, p_{n-1,k} + (r+1-k)\, p_{n-1,k-1}.}$$

- Il reste alors à démontrer que l'égalité $(*)$ est encore vérifiée si $k \geqslant r+1$.
Soit $k \in [\![r+1, +\infty[\![$. Deux cas se présentent.
  - × Si $k = r+1$ alors :
    - d'une part :
$$\begin{aligned}&(10-r+k)\, p_{n-1,k} + \cancel{(r+1-k)\, p_{n-1,k-1}} \\ =\ &(10-r+k)\, \mathbb{P}\big([Z_{n-1} = k]\big) \ = \ 0\end{aligned}$$
(car $[Z_{n-1} = k] = \varnothing$ puisque $k \notin [\![0, r]\!]$)
    - d'autre part :
$$10\, p_{n,k} = 10\, \mathbb{P}\big([Z_n = k]\big) \ = \ 0$$
(car $[Z_n = k] = \varnothing$ puisque $k \notin [\![0, r]\!]$)
$$\boxed{\text{L'égalité est donc vérifiée pour } k = r+1.}$$

× Si $k \geqslant r+2$ alors :

$$[Z_n = k] = [Z_{n-1} = k] = [Z_{n-1} = k-1] = \varnothing$$

car $k \notin [\![0, r]\!]$ et $k-1 \notin [\![0, r]\!]$. Ainsi :

$$p_{n,k} = p_{n-1,k} = p_{n-1,k-1} = 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi, l'égalité } (*) \text{ est aussi vérifiée pour } k \geqslant r+2.}$$

Commentaire

- Afin de démontrer l'égalité $(*)$, il convient tout d'abord d'écrire explicitement cette formule :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([Z_n = k]\big) &= \frac{10-r+k}{10} \times \mathbb{P}\big([Z_{n-1} = k]\big) + \frac{r+1-k}{10} \times \mathbb{P}\big([Z_{n-1} = k-1]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([Z_{n-1} = k]\big) \times \frac{10-r+k}{10} + \mathbb{P}\big([Z_{n-1} = k-1]\big) \times \frac{r+1-k}{10} \end{aligned}$$

  C'est cette forme qui doit faire penser à l'utilisation de la formule des probabilités totales selon le système complet d'événements associé à la v.a.r. Z_{n-1}.
- Pour démontrer une égalité entre probabilités, le procédé classique consiste à démontrer une égalité entre événements. Ici, on a préféré présenter le résultat en utilisant directement la formule des probabilités totales. Mais la démonstration de cette formule fait justement apparaître une égalité entre événements. Explicitons cette étape.
  Comme la famille $\big([Z_{n-1} = i]\big)_{i \in [\![0,r]\!]}$ est un système complet d'événements, on a :

$$\begin{aligned} [Z_n = k] &= \Omega \ \cap \ [Z_n = k] \\ &= \left(\bigcup_{i=0}^{r} [Z_{n-1} = i]\right) \ \cap \ [Z_n = k] \\ &= \bigcup_{i=0}^{r} \Big([Z_{n-1} = i] \cap [Z_n = k]\Big) \\ &= \big([Z_{n-1} = k-1] \cap [Z_n = k]\big) \\ &\quad \cup \ \big([Z_{n-1} = k] \cap [Z_n = k]\big) \end{aligned}$$

  (en effet, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, si $i \neq k-1$ `OU` $i \neq k$, on a : $[Z_{n-1} = i] \cap [Z_n = k] = \varnothing$)
- Il est à noter que cette dernière égalité :

$$[Z_n = k] \ = \ \big([Z_{n-1} = k-1] \cap [Z_n = k]\big) \ \cup \ \big([Z_{n-1} = k] \cap [Z_n = k]\big)$$

  peut aussi se démontrer de manière directe.
  En effet, l'événement $[Z_n = k]$ est réalisé si et seulement si après n tirages on a obtenu k boules distinctes parmi les boules $B_1, \ldots, B_r$. Cela se produit si et seulement si :
  - on a obtenu k boules distinctes parmi les boules $B_1, \ldots, B_r$ lors des $n-1$ premiers tirage et le tirage suivant n'en amène pas de nouvelle.
    Ainsi, $[Z_{n-1} = k-1] \cap [Z_n = k]$ est réalisé.

  `OU`
  - on a obtenu $k-1$ boules distinctes parmi les boules $B_1, \ldots, B_r$ lors des $n-1$ premiers tirage et le tirage suivant en amène une nouvelle.
    Ainsi, $[Z_{n-1} = k] \cap [Z_n = k]$ est réalisé.

□

7. Pour tout entier naturel non nul n, on définit le polynôme Q_n par :

$$\begin{cases} Q_0(X) & = & 1 \\ Q_n(X) & = & \sum\limits_{k=0}^{n} p_{n,k}\, X^k \end{cases}$$

a) Préciser les polynômes Q_1 et Q_2.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} Q_1(X) & = & \sum\limits_{k=0}^{1} p_{1,k}\, X^k & \textit{(par définition)} \\ & = & p_{1,0} + p_{1,1}\, X & \\ & = & \mathbb{P}\big(\,[Z_1 = 0]\,\big) + \mathbb{P}\big(\,[Z_1 = 1]\,\big)\, X & \\ & = & \dfrac{10-r}{10} + \dfrac{r}{10}\, X & \textit{(d'après la question \textbf{5.a)})} \end{array}$$

$$\boxed{Q_1(X) = \dfrac{10-r}{10} + \dfrac{r}{10}\, X}$$

- D'autre part :

$$\begin{array}{rcll} Q_2(X) & = & \sum\limits_{k=0}^{2} p_{2,k}\, X^k & \textit{(par définition)} \\ & = & p_{2,0} + p_{2,1}\, X + p_{2,2}\, X^2 & \\ & = & \mathbb{P}\big(\,[Z_2 = 0]\,\big) + \mathbb{P}\big(\,[Z_2 = 1]\,\big)\, X + \mathbb{P}\big(\,[Z_2 = 2]\,\big)\, X^2 & \\ & = & \dfrac{(10-r)^2}{100} + \dfrac{21r - 2r^2}{100}\, X + \dfrac{r\,(r-1)}{100}\, X^2 & \textit{(d'après la question \textbf{5.b)})} \end{array}$$

$$\boxed{Q_2(X) = \dfrac{(10-r)^2}{100} + \dfrac{21r - 2r^2}{100}\, X + \dfrac{r\,(r-1)}{100}\, X^2}$$

□

b) Calculer $Q_n(1)$ et exprimer $Q'_n(1)$ en fonction de $\mathbb{E}(Z_n)$, où Q'_n désigne la dérivée du polynôme Q_n.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} Q_n(1) & = & \sum\limits_{k=0}^{n} p_{n,k} & \textit{(par définition)} \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big(\,[Z_n = k]\,\big) \;=\; 1 & \textit{(car } \big(\,[Z_n = i]\,\big)_{i \in [\![0,n]\!]} \textit{ est un système complet d'événements } (\star)\textit{)} \end{array}$$

L'argument $(\star)$ résulte de la propriété : $Z_n(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$.
En effet, en n tirages on obtient forcément moins de n boules distinctes parmi B_1, $\dots$, B_r.

$$\boxed{\text{Ainsi : } Q_n(1) = 1.}$$

- Ensuite :
$$Q_n'(X) = \sum_{k=0}^{n} k \ p_{n,k} \ X^{k-1}$$
Ainsi :
$$\begin{aligned}
Q_n'(1) &= \sum_{k=0}^{n} k \ p_{n,k} && \textit{(par définition)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k \ \mathbb{P}\big([Z_n = k]\big) \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ k \in Z_n(\Omega)}}^{n} k \ \mathbb{P}\big([Z_n = k]\big) + \cancel{\sum_{\substack{k=0 \\ k \notin Z_n(\Omega)}}^{n} k \ \mathbb{P}\big([Z_n = k]\big)} \\
&= \sum_{k \,\in\, Z_n(\Omega) \cap [\![0,n]\!]} k \ \mathbb{P}\big([Z_n = k]\big) \\
&= \sum_{k \,\in\, Z_n(\Omega)} k \ \mathbb{P}\big([Z_n = k]\big) && \textit{(car } Z_n(\Omega) \cap [\![0,n]\!] = Z_n(\Omega) \textit{ puisque } Z_n(\Omega) \subset [\![0,n]\!]\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } Q_n'(1) = \mathbb{E}(Z_n).}$$

Commentaire

- Dans cette question, on illustre le fait que l'on peut généralement travailler avec une sur-approximation de l'ensemble image de la v.a.r. étudiée. Plus précisément, si on considère une v.a.r. X discrète admettant une espérance et qu'il existe une sur-approximation $\mathcal{H}$ de $X(\Omega)$ (c'est-à-dire un ensemble $\mathcal{H}$ tel que $X(\Omega) \subset \mathcal{H}$) alors :
  - × la famille $\big([X = i]\big)_{i \in \mathcal{H}}$ est un système complet d'événements.
    (cela a déjà donné lieu à une remarque)
  - × l'espérance de X peut s'écrire sous la forme :
  $$\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in \mathcal{H}} i \ \mathbb{P}\big([X = i]\big)$$
    (on le démontre en reprenant les arguments utilisés dans la rédaction de la question)
- Même si ce n'est pas utile, on peut donner une formule explicite pour $Z_n(\Omega)$. Cet ensemble image dépend de la situation de n par rapport à r :
  - × si on considère plus de r tirages (c'est-à-dire si $n \geqslant r$), alors Z_n peut prendre toutes les valeurs de l'ensemble $[\![0, r]\!]$.
  - × si on considère strictement moins de r tirages (c'est-à-dire si $n < r$), alors Z_n peut prendre toutes les valeurs de l'ensemble $[\![0, n]\!]$.

  Finalement : $Z_n(\Omega) = [\![0, \min(n, r)]\!]$.

□

c) En utilisant l'égalité $(*)$, établir, pour tout réel x et pour tout entier naturel n non nul, la relation suivante :
$$10\, Q_n(x) \;=\; (10 - r + rx)\; Q_{n-1}(x) + x\,(1-x)\; Q'_{n-1}(x) \qquad (**)$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{array}{rcll}
10\; Q_n(X) & = & 10 \sum\limits_{k=0}^{n} p_{n,k}\; X^k & \textit{(par définition de } Q_n\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n} (10\, p_{n,k})\; X^k & \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n} \big((10-r+k)\; p_{n-1,k} + (r+1-k)\; p_{n-1,k-1}\big)\; X^k & \textit{(d'après } \boldsymbol{6}\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n} (10-r)\; p_{n-1,k}\; X^k \;+\; \sum\limits_{k=0}^{n} k\, p_{n-1,k}\; X^k & \textit{(par linéarité de la somme)} \\
& + & \sum\limits_{k=0}^{n} r\, p_{n-1,k-1}\; X^k \;-\; \sum\limits_{k=0}^{n} (k-1)\, p_{n-1,k-1}\; X^k & \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n-1} (10-r)\; p_{n-1,k}\; X^k \;+\; \sum\limits_{k=0}^{n-1} k\, p_{n-1,k}\; X^k & \textit{(car } p_{n-1,n} = 0\textit{)} \\
& + & \sum\limits_{k=1}^{n} r\, p_{n-1,k-1}\; X^k \;-\; \sum\limits_{k=1}^{n} (k-1)\, p_{n-1,k-1}\; X^k & \textit{(car } p_{n-1,-1} = 0\textit{)} \\
& = & (10-r) \sum\limits_{k=0}^{n-1} p_{n-1,k}\; X^k \;+\; \left(\sum\limits_{k=0}^{n-1} k\, p_{n-1,k}\; X^{k-1}\right)\; X & \\
& + & r \sum\limits_{k=1}^{n} p_{n-1,k-1}\; X^k \;-\; \sum\limits_{k=1}^{n} (k-1)\, p_{n-1,k-1}\; X^k & \\
& = & (10-r)\; Q_{n-1}(X) \;+\; X\; Q'_{n-1}(X) & \textit{(par définition de } Q_{n-1}\textit{)} \\
& + & r \sum\limits_{j=0}^{n-1} p_{n-1,j}\; X^{j+1} \;-\; \sum\limits_{j=0}^{n-1} j\, p_{n-1,j}\; X^{j+1} & \textit{(par le décalage d'indice } j = k-1\textit{)} \\
& = & (10-r)\; Q_{n-1}(X) \;+\; X\; Q'_{n-1}(X) & \\
& + & r \left(\sum\limits_{j=0}^{n-1} p_{n-1,j}\; X^j\right)\; X \;-\; \left(\sum\limits_{j=0}^{n-1} j\, p_{n-1,j}\; X^{j-1}\right)\; X^2 & \textit{(par le décalage d'indice } j = k-1\textit{)} \\
& = & (10-r)\; Q_{n-1}(X) \;+\; X\, Q'_{n-1}(X) \;+\; r\, X\, Q_{n-1}(X) \;-\; X^2\; Q'_{n-1}(X) &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } 10\; Q_n(X) = (10 - r + r\,X)\; Q_{n-1}(X) + X\;(1-X)\; Q'_{n-1}\;(X).}$$

□

d) En dérivant membre à membre l'égalité $(**)$, former, pour tout entier naturel n non nul, une relation entre les espérances $\mathbb{E}(Z_n)$ et $\mathbb{E}(Z_{n-1})$.
En déduire, pour tout entier naturel n, la valeur de $\mathbb{E}(Z_n)$ en fonction de n et de r.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- En dérivant formellement l'égalité $(**)$, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} 10Q_n'(X) & = & (10 - r + r\,X)\ Q_{n-1}'(X) + r\,Q_{n-1}(X) + X(1-X)Q_{n-1}''(X) + (1-2X)\ Q_{n-1}'(X) \\ & = & r\,Q_{n-1}(X) + \big(11 - r + (r-2)\ X\big)\ Q_{n-1}'(X) + X(1-X)\ Q_{n-1}''(X) \end{array}$$

- On évalue l'égalité polynomiale précédente en 1, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} 10\ Q_n'(1) & = & r\,Q_{n-1}(1) + (11 - r + r - 2)\ Q_{n-1}'(1) + 1\,(1-1)\ Q_{n-1}''(1) \\ & = & r + 9\ Q_{n-1}'(1) \end{array}$$

- Et ainsi, d'après la question ***3.b)*** :

$$10\ \mathbb{E}(Z_n) = 9\ \mathbb{E}(Z_{n-1}) + r$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Z_n) = \frac{9}{10}\ \mathbb{E}(Z_{n-1}) + \frac{r}{10}}$$

- Notons $u_n = \mathbb{E}(Z_n)$. On constate que la suite $(\mathbb{E}(Z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.
  - × L'équation de point fixe associée à la suite (u_n) est :

$$x = \frac{9}{10}\,x + \frac{r}{10}$$

    Elle admet pour unique solution : $\lambda = r$.

  - × On écrit :

$$\begin{array}{rcccccl} u_{n+1} & = & \dfrac{9}{10} & \times & u_n & + & \dfrac{r}{10} \quad (L_1) \\ \lambda & = & \dfrac{9}{10} & \times & \lambda & + & \dfrac{r}{10} \quad (L_2) \end{array}$$

    et donc $u_{n+1} - \lambda \ = \ \dfrac{9}{10} \ \times \ (u_n - \lambda) \qquad (L_1)-(L_2)$

    Notons alors (v_n) la suite de terme général $v_n = u_n - \lambda$.
  - × La suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{9}{10}$.
    Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n \ = \ \left(\frac{9}{10}\right)^n \times v_0 \ = \ \left(\frac{9}{10}\right)^n \times (u_0 - \lambda) \ = \ \left(\frac{9}{10}\right)^n \times (\mathbb{E}(Z_0) - r) \ = \ -\left(\frac{9}{10}\right)^n r$$

    car $Z_0 = 0$ par définition. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \ = \ v_n + \lambda \ = \ -\left(\frac{9}{10}\right)^n r + r \ = \ r\ \left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n\right)$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Z_n) = r\ \left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n\right)}$$

□

8. a) Pour tout entier naturel n, le polynôme Q''_n désigne la dérivée du polynôme Q'_n.
En utilisant une méthode semblable à celle de la question précédente, trouver pour tout entier naturel n non nul, une relation entre $Q''_n(1)$ et $Q''_{n-1}(1)$.

En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité suivante :

$$Q''_n(1) \ = \ r(r-1) \ \left(1 + \left(\frac{8}{10}\right)^n - 2\left(\frac{9}{10}\right)^n\right)$$

Démonstration.

- On dérive formellement deux fois l'égalité $(**)$.

$$\begin{aligned} 10\ Q''_n(X) \ &= \quad r\,Q'_{n-1}(X) + (r-2)\,Q'_{n-1}(X) + (11 - r + (r-2)\,X)\ Q''_{n-1}(X) \\ &\quad + \ (1-2X)\ Q''_{n-1}(X) + X(1-X)\ Q^{(3)}_{n-1}(X) \\ &= \ 2\,(r-1)\ Q'_{n-1}(X) + (12 - r + (r-4)X)\ Q''_{n-1}(X) + X(1-X)\ Q^{(3)}_{n-1}(X) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{En évaluant en 1, on obtient : } 10\ Q''_n(1) = 2\,(r-1)\ Q'_{n-1}(1) + 8\,Q''_{n-1}(1).}$$

- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : Q''_n(1) = r(r-1)\left(1 + \left(\frac{8}{10}\right)^n - 2\left(\frac{9}{10}\right)^n\right)$.

  ▸ **Initialisation :**

  × D'une part : $Q_1(X) = \sum\limits_{k=0}^{1} p_{1,k}\ X^k = p_{1,0} + p_{1,1}\ X$.
  Donc $Q''_1(X) = 0$, d'où $Q''_1(1) = 0$.

  × D'autre part : $r(r-1)\ \left(1 + \left(\frac{8}{10}\right)^1 - 2\left(\frac{9}{10}\right)^1\right) = 0$.

  D'où $\mathcal{P}(1)$.

  ▸ **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ $\left(\text{ i.e. } Q''_{n+1}(1) = r(r-1)(1+\left(\frac{8}{10}\right)^{n+1} - 2\ \left(\frac{9}{10}\right)^{n+1})\ \right)$.

$$\begin{aligned} 10\,Q''_{n+1}(1) \ &= \ 2\ (r-1)\,Q'_n(1) + 8\ Q''_n(1) \\ &= \ 2\ (r-1)r\left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n\right) + 8\ Q''_n(X) && \textit{(d'après la question \textbf{3.d)})} \\ &= \ 2\ (r-1)r\left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n\right) + 8\ r(r-1)\left(1 + \left(\frac{8}{10}\right)^n - 2\left(\frac{9}{10}\right)^n\right) && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \ r(r-1)\left(2 - 2\left(\frac{9}{10}\right)^n + 8 + 8\left(\frac{8}{10}\right)^n\right) \\ &= \ r(r-1)\left(10 + \frac{8^{n+1}}{10^n} - 2\ \frac{9^{n+1}}{10^n}\right) \end{aligned}$$

  Ainsi : $Q''_{n+1}(1) = r(r-1)\left(1 + (\frac{8}{10})^{n+1} - 2\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}\right)$.

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ Q''_n(1) = r(r-1)(1 + (\frac{8}{10})^n - 2\left(\frac{9}{10}\right)^n).}$$ □

b) Calculer, pour tout entier naturel n, la variance de la variable aléatoire Z_n en fonction de n et de r.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- En dérivant $Q'_n(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} k\, p_{n,k} X^{k-1}$, on obtient : $Q''_n(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} k\,(k-1) p_{n,k} X^{k-2}$.
- On en déduit :

$$Q''_n(1) = \sum_{k=0}^{n} k\,(k-1)p_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} k^{\,2}\, p_{n,k} - \sum_{k=0}^{n} k p_{n,k} = \mathbb{E}(Z_n^2) - \mathbb{E}(Z_n)$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{E}(Z_n^2) = Q''_n(1) + \mathbb{E}(Z_n).}$$

- D'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$\mathbb{V}(Z_n) = \mathbb{E}(Z_n^2) - \big(\mathbb{E}(Z_n)\big)^2$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{V}(Z_n) \\
= \;& Q''_n(1) + \mathbb{E}(Z_n) - (\mathbb{E}(Z_n))^2 \\
= \;& Q''_n(1) + Q'_n(1) - (Q'_n(1))^2 \\
= \;& r(r-1)\left(1 + \left(\frac{8}{10}\right)^n - 2\,\left(\frac{9}{10}\right)^n\right) + r\left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n\right) - \left(r(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n)\right)^2 \quad \textit{(d'après les questions \textbf{3.d)} et \textbf{4.a)})} \\
= \;& r(r-1)\left(\frac{8}{10}\right)^n + r\left(\frac{9}{10}\right)^n - r^2\left(\frac{81}{100}\right)^n
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(Z_n) = r(r-1)\left(\frac{8}{10}\right)^n + r\left(\frac{9}{10}\right)^n - r^2\left(\frac{81}{100}\right)^n}$$

□