DS5 (version B)

Exercice /73

Dans ce problème, n est un entier naturel non nul et $\mathbb{R}_n[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
On note $\mathscr{B} = (e_0, e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. On rappelle que $e_0(X) = 1$ et que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $e_k(X) = X^k$.

Partie 1 : étude d'une application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$.

On considère l'application φ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\varphi(P) = \sum\limits_{k=0}^{n} P^{(k)}$, où $P^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de P, avec la convention $P^{(0)} = P$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

- **2 pts : φ linéaire (dont 1 pt pour argument « l'application dérivée $k^{\text{ème}}$ est linéaire)**
- **2 pts : φ à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$**
  - × **1 pt :** $\deg(P^{(k)}) \leqslant n - k$
  - × **1 pt :** $\deg\big(\varphi(P)\big) \leqslant \max\limits_{k \in [\![0,n]\!]} \big(\deg(P^{(k)}\big) = n$

2. a) Calculer $\varphi(e_0)$ et en déduire une valeur propre de φ.

- **1 pt :** $\varphi(e_0) = e_0$
- **1 pt :** $1 \in \mathrm{Sp}(\varphi)$

b) Montrer : $\forall j \in [\![1, n]\!]\ ,\ \varphi(e_j) - e_j \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$.

- **1 pt :** $\varphi(e_j) - e_j = \sum\limits_{k=1}^{n} e_j^{(k)}$
- **1 pt :** $\deg(e_j^{(k)}) = j - k$
- **1 pt :** $\deg\big(\varphi(e_j) - e_j\big) \leqslant \max\limits_{k \in [\![1,n]\!]} (j - k) = j - 1$

c) En déduire que la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$ est triangulaire et que la seule valeur propre de φ est celle trouvée à la question précédente.

- **1 pt : $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\varphi(e_j) = e_j + Q_j$, où $Q_j \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$**
- **1 pt : $\forall j \in [\![1, n]\!]$,** $\varphi(e_j) = \lambda_0^j \cdot e_0 + \lambda_1^j \cdot e_1 + \cdots + \lambda_{j-1}^j \cdot e_{j-1} + 1 \cdot e_j$
- **1 pt :** $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_0^1 & \lambda_0^2 & \lambda_0^3 & \cdots & & \lambda_0^{n-1} & \lambda_0^n \\ 0 & 1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & \cdots & & \lambda_1^{n-1} & \lambda_1^n \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_2^3 & \cdots & & \lambda_2^{n-1} & \lambda_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & \lambda_{n-2}^{n-1} & \lambda_{n-2}^n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda_{n-1}^n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{1\}$

d) Montrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

- **1 pt : φ bijective car $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$ inversible**
- **1 pt : φ bijective + endomorphisme**

3. a) Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, calculer $\varphi(P - P')$.

- **2 pts : $\varphi(P - P') = P$ (dont 1 pt pour le télescopage)**

b) Déterminer φ^{-1}, puis écrire la matrice de φ^{-1} dans la base $\mathscr{B}$.

- **1 pt : on pose $\psi : P \mapsto P - P'$**
- **1 pt : $\varphi \circ \psi = \text{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ d'après *3.a)***
- **1 pt : $\varphi^{-1} = \psi$**
- **1 pt : $\forall j \in [\![0, n]\!]$, $\varphi^{-1}(e_j) = e_j - e_j' = e_j - j\, e_{j-1}$**
- **1 pt : $A^{-1} = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & & & \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$**

c) On donne le script **Python** suivant :

```
1 import numpy as np
2 import numpy.linalg as nla
3 n = int(input("Entrer la valeur de n :"))
4 M = np.eye(n+1)
5 for k in range(n) :
6     M[k, k+1] = -(k+1)
7 A =  - - - - - -
8 print(A)
```

Compléter la sixième ligne de ce script pour qu'il affiche la matrice A de φ dans la base $\mathscr{B}$ lorsque la valeur de n est entrée par l'utilisateur.

- **2 pts : `A = nal.inv(M)`**

Partie 2 : étude d'une autre application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$.

On désigne par x un réel quelconque.

4. a) Montrer que, pour tout entier naturel k, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^k \, \mathrm{e}^{-t} \, dt$ est convergente.

- **1 pt : $t \mapsto t^k \, \mathrm{e}^{-t}$ continue sur $[x, +\infty[$**
- **3 pts : critère de négligeabilité sur $[1, +\infty[$ (1 pt par hypothèse)**
  -1 si critère non cité
- **1 pt : $\displaystyle\int_x^1 t^k \, \mathrm{e}^{-t} \, dt$ bien définie**

b) En déduire que, si P est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} P(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$ est convergente.

- **1 pt : combinaison linéaire d'intégrales convergentes**

5. ***a)*** Donner la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,dt$.

- **1 pt :** $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,dt = \mathrm{e}^{-x}$

  0 si l'élève ne fait le calcul sur un segment

b) Établir que pour tout entier naturel k, on a : $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^k\,\mathrm{e}^{-t}\,dt \;=\; k!\sum_{i=0}^{k}\frac{x^i}{i!}\,\mathrm{e}^{-x}$.

- **1 pt : initialisation**
- **3 pts : hérédité (IPP)**

6. Informatique.

a) On admet que si `u` est une liste, la commande **Python** `prod(u)` renvoie le produit des éléments de `u`.
Utiliser l'égalité obtenue à la question ***5.b)*** pour compléter le script **Python** suivant afin qu'il calcule et qu'il affiche la variable `s` contenant la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^k\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$, les valeurs de `x` et de `k` étant entrées par l'utilisateur.

```
k = int(input("Entrer la valeur de k :"))
x = float(input("Entrer la valeur de x :"))
p = np.prod([i for i in range(1,k+1)])
u = - - - - - - -  ./  - - - - - -
s = p *  - - - - - - -  * np.exp(-x)
print(s)
```

- **2 pts :** `u = [x**i / np.prod([j for j in range(1, i+1)]) for i in range(k+1)]`
- **1 pt :** `s = p * sum(u) * np.exp(-x)`

b) **Seulement pour les cubes** :

Montrer, grâce à un changement de variable simple : $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^k\,\mathrm{e}^{-t}\,dt \;=\; \mathrm{e}^{-x}\int_0^{+\infty} (u+x)^k\,\mathrm{e}^{-u}\,du$.

En déduire la commande manquante du script **Python** suivant afin qu'il permette de calculer et d'afficher une valeur approchée de $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^k\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$ grâce à la méthode de Monte Carlo.

```
import numpy.random as nr
k = int(input("Entrer la valeur de k :"))
x = float(input("Entrer la valeur de x :"))
Z = nr.exponential(1, 100000)
s = np.exp(-x) * np.mean(  - - - - - - -   )
print(s)
```

- **2 pts : changement de variable affine** $u = t - x$
- **4 pts :** `s = np.exp(-x) * np.mean( (Z + x)**k )`
  - **2 pts pour formule**
  - **2 pts pour explications avec Monte-Carlo**

On considère maintenant l'application qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, associe la fonction $F = \Psi(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} P(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$$

7. *a)* Montrer que Ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

- **1 pt : Ψ linéaire**
  0 si confusion d'objets
- **3 pts : Ψ à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$**
  - **1 pt :** $\big(\Psi(P)\big)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k\, \mathrm{e}^x \displaystyle\int_x^{+\infty} t^k\, \mathrm{e}^{-t}\, dt$ **(linéarité de l'intégrale car les intégrales convergent d'après *4.a)*)**
  - **1 pt :** $= \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k\, \cancel{\mathrm{e}^x} \left(k!\, \sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{x^i}{i!}\, \cancel{\mathrm{e}^{-x}}\right)$ **(d'après *5.b)*)**
  - **1 pt :** $= \sum\limits_{i=0}^{n} \left(\sum\limits_{k=i}^{n} \lambda_k\, \dfrac{k!}{i!}\right) x^i$

b) Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner une relation entre F , F' et P.

- **1 pt : $t \mapsto P(t)\,\mathrm{e}^{-t}$ continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive G de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.**
- **1 pt :** $F(x) = \mathrm{e}^x \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,dt - \big(G(x) - G(0)\big)\right)$
- **1 pt : F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$**
- **1 pt :** $F' = F - P$

c) Montrer que Ψ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

- **3 pts :** $\mathrm{Ker}(\Psi) = \{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}$
  - **1 pt :** $\{0_{\mathbb{R}_n[X]}\} \subset \mathrm{Ker}(\Psi)$
  - **2 pts :** $\mathrm{Ker}(\Psi) \subset \{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}$ **(1 pt pour $F = 0_{\mathbb{R}_n[X]} \Rightarrow F' = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$, 1 pt pour $0_{\mathbb{R}_n[X]} = F - P = P$)**
- **1 pt : Ψ bijectif (et donc automorphisme)**

8. On considère un polynôme P non nul, vecteur propre de Ψ pour une valeur propre λ non nulle.

a) Utiliser la relation obtenue à la question *7.b)* pour établir : $P' = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda}\, P$.

- **1 pt : P vecteur propre de Ψ donc $F = \lambda\, P$**
- **1 pt :** $\lambda\, P - P = F - P = F' = \lambda\, P'$
- **1 pt :** $P' = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda}\, P$ **car** $\lambda \neq 0$

b) En déduire, en considérant les degrés, que $\lambda = 1$ est la seule valeur propre possible de Ψ.

- **1 pt : raisonnement par l'absurde**
- **1 pt : si $\lambda \neq 1$, alors** $\deg\left(\dfrac{\lambda - 1}{\lambda}\right) = \deg(P)$
- **1 pt : d'après la qst précédente,** $\deg\left(\dfrac{\lambda - 1}{\lambda}\, P\right) = \deg(P') = \deg(P) - 1$
- **1 pt : absurde car** $P \neq 0_{\mathbb{R}_n[X]}$

c) Montrer enfin que $\lambda = 1$ est bien la seule valeur propre de Ψ. (On ne demande pas le sous-espace propre associé).

- **1 pt :** $\Psi(e_0) = e_0$ **(d'après *5.a)*)**
- **1 pt :** $e_0 \neq 0_{\mathbb{R}_n[X]}$

9. a) Montrer que les endomorphismes φ et Ψ sont égaux.

- **3 pts :** $\forall j \in [\![0, n]\!]$**,** $\varphi(e_j) = \Psi(e_j)$
  - $\times$ **1 pt :** $e_j^{(k)} = \dfrac{j!}{k!}\ e_k$ **(récurrence immédiate)**
  - $\times$ **1 pt :** $\varphi(e_j) = j!\ \sum\limits_{k=0}^{j} \dfrac{1}{k!}\ e_k$
  - $\times$ **1 pt : d'après *5.b)*,** $\Psi(e_j) = j!\ \sum\limits_{k=0}^{j} \dfrac{1}{k!}\ e_k$
- **1 pt : on en déduit** $\varphi = \Psi$

b) En déduire que, si P est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ et s'il existe un réel a tel que pour tout réel x supérieur ou égal à a, on a $P(x) \geqslant 0$, alors :

$$\forall x \geqslant a,\ \sum_{i=0}^{n} P^{(i)}(x) \geqslant 0$$

- **1 pt :** $\forall x \in [a, +\infty[$**,** $P(t)\ \mathrm{e}^{-t} \geqslant 0$
- **1 pt : positivité de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant**
- **1 pt :** $0 \leqslant \big(\Psi(P)\big)(x) = \big(\varphi(P)\big)(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} P^{(i)}(x)$

Problème /71

Dans tout le problème, r désigne un entier naturel vérifiant $1 \leqslant r \leqslant 10$. Une urne contient 10 boules distinctes B_1, B_2, ... , B_{10}. Une expérience aléatoire consiste à y effectuer une suite de tirages d'une boule **avec remise**, chaque boule ayant la même probabilité de sortir à chaque tirage.
Cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Partie I : Etude du nombre de tirages nécessaires pour obtenir au moins une fois chacune des boules B_1, ... , B_r

On suppose que le nombre de tirages nécessaires pour obtenir au moins une fois chacune des boules B_1, ... , B_r définit une variable aléatoire Y_r sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. Cas particulier $r = 1$.
Montrer que la variable aléatoire Y_1 suit une loi géométrique ; préciser son paramètre, son espérance et sa variance.

- **2 pts :** $Y_1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{1}{10}\right)$
  - × **1 pt : description expérience**
  - × **1 pt : description v.a.r.**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Y_1) = 10$ **et** $\mathbb{V}(Y_1) = 90$

2. On suppose que r est supérieur ou égal à 2.

a) Calculer la probabilité pour que les r boules $B_1, B_2, \ldots, B_r$ sortent dans cet ordre aux r premiers tirages.

- **1 pt :** $A = [T_1 = 1] \cap [T_2 = 2] \cap \cdots \cap [T_r = r]$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(A) = \left(\dfrac{1}{10}\right)^r$ **par indépendance des tirages**

b) En déduire la probabilité $\mathbb{P}([Y_r = r])$.

- **2 pts :** $\mathbb{P}(\ [Y_r = r]\ ) = \dfrac{r!}{10^r}$

c) Préciser l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable aléatoire Y_r.

- **1 pt :** $Y_r(\Omega) = [\![r, +\infty[\![$

3. On suppose encore que r est supérieur ou égal à 2. Pour tout entier i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant r$, on désigne par W_i la variable aléatoire représentant le nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, i boules distinctes parmi les boules B_1, B_2, ... , B_r soient sorties (en particulier, on a : $W_r = Y_r$). On pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 = W_1 \\ \forall i \in [\![2, r]\!],\ X_i = W_i - W_{i-1} \end{array} \right.$$

On admet que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_r$ sont indépendantes.

a) Exprimer la variable aléatoire Y_r à l'aide des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_r$.

- **2 pts :** $Y_r = \sum\limits_{i=1}^{r} X_i$ **(dont 1 pt pour le télescopage)** *b)* Interpréter concrètement la variable aléatoire X_i pour tout i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant r$.

- **1 pt : X_i est la v.a.r. correspondant au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une $i^{\text{ème}}$ boule non encore obtenue**

c) Montrer que, pour tout i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant r$, la variable aléatoire X_i suit une loi géométrique ; préciser son espérance et sa variance.

- **2 pts : $X_i \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{r-i+1}{10}\right)$**
  - × **1 pt : description expérience**
  - × **1 pt : description v.a.r.**
- **1 pt : $\mathbb{E}(X_i) = \dfrac{10}{r-i+1}$ et $\mathbb{V}(X_i) = 10 \ \dfrac{10-r+i-1}{(r-i+1)^2}$**

d) On pose : $S_1(r) = \sum\limits_{k=1}^{r} \dfrac{1}{k}$ et $S_2(r) = \sum\limits_{k=1}^{r} \dfrac{1}{k^2}$.
Exprimer l'espérance $\mathbb{E}(Y_r)$ et la variance $\mathbb{V}(Y_r)$ de Y_r à l'aide de $S_1(r)$ et de $S_2(r)$.

- **1 pt : $\mathbb{E}(Y_r) = 10\, S_1(r)$ (par linéarité de l'espérance)**
- **2 pts : $\mathbb{V}(Y_r) = 100\, S_2(r) - 10\, S_1(r)$ (dont 1 pt pour citer l'indépendance de $X_1, \cdots, X_r$)**

4. a) Si k est un entier naturel non nul, préciser le minimum et le maximum de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sur l'intervalle $[k, k+1]$ et en déduire un encadrement de l'intégrale $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt$.

- **1 pt : $\dfrac{1}{k} \geqslant \dfrac{1}{t} \geqslant \dfrac{1}{k+1}$**
- **1 pt : croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant**

b) Si r est supérieur ou égal à 2, donner un encadrement de $S_1(r)$ et en déduire la double inégalité :

$$10 \ln(r+1) \ \leqslant \ \mathbb{E}(Y_r) \ \leqslant \ 10 \left(\ln(r) + 1\right)$$

- **1 pt : sommation inégalité de droite de 1 à r et relation de Chasles**
- **1 pt : $S_1(r) \geqslant \ln(r+1)$**
- **1 pt : sommation inégalité de gauche de 1 à $(r-1)$**
- **1 pt : $S_1(r) \leqslant \ln(r) + 1$**
- **1 pt : $10 \ln(r+1) \leqslant \mathbb{E}(Y_r) \leqslant 10 \left(\ln(r)+1\right)$**

c) Si r supérieur ou égal à 2, établir par une méthode analogue à celle de la question précédente, la double inégalité :

$$1 - \frac{1}{r+1} \ \leqslant \ S_2(r) \ \leqslant \ 2 - \frac{1}{r}$$

En déduire un encadrement de $\mathbb{V}(Y_r)$.

- **1 pt : $\dfrac{1}{k^2} \geqslant \dfrac{1}{t^2} \geqslant \dfrac{1}{(k+1)^2}$**
- **1 pt : croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant**
- **1 pt : $1 - \dfrac{1}{r+1} \leqslant S_2(r)$**
- **1 pt : $S_2(r) \leqslant 2 - \dfrac{1}{r}$**
- **1 pt : $100 \left(1 - \dfrac{1}{r+1}\right) - 10 \left(\ln(r)+1\right) \leqslant \mathbb{V}(Y_r) \leqslant 100 \left(2 - \dfrac{1}{r}\right) - 10 \ln(r+1)$**

Partie II : Etude du nombre de boules distinctes parmi les boules B_1, B_2, ..., B_r tirées au moins une fois au cours des n premiers tirages

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on suppose que le nombre de boules distinctes parmi les boules B_1, B_2, ..., B_r tirées au moins une fois au cours des n premiers tirages, définit une variable aléatoire Z_n sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On note $\mathbb{E}(Z_n)$ l'espérance de Z_n et on pose $Z_0 = 0$.
Pour tout entier naturel n non nul et pour tout entier naturel k, on note $p_{n,k}$ la probabilité de l'événement $[Z_n = k]$ et on pose : $p_{n,-1} = 0$.

5. Étude des cas particuliers $n = 1$ et $n = 2$.

a) Déterminer la loi de Z_1 et donner son espérance.

- **1 pt :** $Z_1(\Omega) = \{0, 1\}$
- **1 pt :** $Z_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\mathbb{P}([Z_1 = 1])\right)$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Z_1 = 1]) = \dfrac{r}{10}$

b) On suppose, dans cette question, que r est supérieur ou égal à 2.
Déterminer la loi de Z_2 et montrer que son espérance est donnée par : $\mathbb{E}(Z_2) = \dfrac{19\,r}{100}$.

- **1 pt :** $Z_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$
- **3 pts :** $\mathbb{P}([Z_2 = 0]) = \dfrac{(10-r)^2}{100}$
  - $\times$ **1 pt : énoncé FPT** $\mathbb{P}([Z_2 = 0]) = \sum\limits_{i=0}^{1} \mathbb{P}([Z_1 = i] \cap [Z_2 = 0]) = \sum\limits_{i=0}^{1} \mathbb{P}([Z_1 = i])\ \mathbb{P}_{[Z_1=i]}([Z_2 = 0])$
  - $\times$ **1 pt :** $\mathbb{P}_{[Z_1=0]}([Z_2 = 0]) = \dfrac{10-r}{10}$ **et** $\mathbb{P}_{[Z_1=1]}([Z_2 = 0]) = 0$
  - $\times$ **1 pt : conclusion**
- **2 pts :** $\mathbb{P}([Z_2 = 2]) = \dfrac{r(r-1)}{100}$
  - $\times$ **1 pt : de même** $\mathbb{P}([Z_2 = 2]) = \sum\limits_{i=0}^{1} \mathbb{P}([Z_1 = i])\ \mathbb{P}_{[Z_1=i]}([Z_2 = 2])$
  - $\times$ **1 pt :** $\mathbb{P}_{[Z_1=0]}([Z_2 = 2]) = 0$ **et** $\mathbb{P}_{[Z_1=1]}([Z_2 = 2]) = \dfrac{r-1}{10}$ **et conclusion**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Z_2 = 1]) = 1 - \mathbb{P}([Z_2 = 1]) - \mathbb{P}([Z_2 = 0]) = \dfrac{21\,r - 2\,r^2}{100}$ **via SCE** $([Z_2 = i])_{i \in [\![0,2]\!]}$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Z_2) = \dfrac{19\,r}{100}$

6. Établir, pour tout entier naturel n non nul et pour tout entier naturel k au plus égal à r, l'égalité :

$$10\,p_{n,k} \;=\; (10 - r + k)\,p_{n-1,k} + (r + 1 - k)\,p_{n-1,k-1} \qquad (*)$$

Vérifier que cette égalité reste vraie dans le cas où k est supérieur ou égal à $r + 1$.

- **2 pts :** $\mathbb{P}([Z_n = k]) = \mathbb{P}([Z_{n-1} = k-1] \cap [Z_n = k]) + \mathbb{P}([Z_{n-1} = k] \cap [Z_n = k])$
  - $\times$ **soit par une démo directe :** $[Z_n = k]) = ([Z_{n-1} = k-1] \cap [Z_n = k]) \cup ([Z_{n-1} = k] \cap [Z_n = k])$ **+ incompatibilité**
  - $\times$ **soit par la FPT :** $\mathbb{P}([Z_n = k]) = \sum\limits_{i=0}^{r} \mathbb{P}([Z_{n-1} = i] \cap [Z_n = k])$ **+** $[Z_{n-1} = i] \cap [Z_n = k] = \varnothing$ **sauf si** $i = k-1$ **ou** $i = k$
- **1 pt :** $\mathbb{P}_{[Z_{n-1}=k-1]}([Z_n = k]) = \dfrac{r+1-k}{10}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}_{[Z_{n-1}=k]}([Z_n = k]) = \dfrac{10-r+k}{10}$

- **1 pt :** $\mathbb{P}(\,[Z_n = k]\,) = \mathbb{P}(\,[Z_{n-1} = k-1]\,)\,\mathbb{P}_{[Z_{n-1}=k-1]}(\,[Z_n = k]\,) + \mathbb{P}(\,[Z_{n-1} = k]\,)\,\mathbb{P}_{[Z_{n-1}=k]}(\,[Z_n = k]\,)$
- **1 pt : conclure**
- **1 pt : égalité toujours vraie si** $k \geqslant r+1$

7. Pour tout entier naturel non nul n, on définit le polynôme Q_n par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Q_0(X) & = & 1 \\ Q_n(X) & = & \sum\limits_{k=0}^{n} p_{n,k}\, x^k \end{array} \right.$$

a) Préciser les polynômes Q_1 et Q_2.

- **1 pt :** $Q_1(X) = \dfrac{10-r}{10} + \dfrac{r}{10}\, X$
- **1 pt :** $Q_2(X) = \dfrac{(10-r)^2}{100} + \dfrac{21\,r - 2\,r^2}{100}\, X + \dfrac{r(r-1)}{100}\, X^2$

b) Calculer $Q_n(1)$ et exprimer $Q'_n(1)$ en fonction de $\mathbb{E}(Z_n)$, où Q'_n désigne la dérivée du polynôme Q_n.

- **1 pt :** $Q_n(1) = 1$ **car** $([Z_n = k])_{k \in [\![0,n]\!]}$ **est un SCE**
- **2 pts :** $Q'_n(1) = \mathbb{E}(Z_n)$ **dont 1 pt pour** $Z_n(\Omega) = [\![0, r]\!]$

c) En utilisant l'égalité $(*)$, établir, pour tout réel x et pour tout entier naturel n non nul, la relation suivante :

$$10\, Q_n(x) \;=\; (10 - r + rx)\, Q_{n-1}(x) + x(1-x)\, Q'_{n-1}(x) \qquad (**)$$

- **1 pt :** $10\, Q_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \big((10-r+k)\, p_{n-1,k} + (r+1-k)\, p_{n-1,k-1} \big)\, x^k$ **(d'après *6.*)**
- **1 pt :** $= (10-r) \sum\limits_{k=0}^{n-1} p_{n-1,k}\, x^k + x \sum\limits_{k=0}^{n-1} k\, p_{n-1,k}\, x^{k-1} + r \sum\limits_{k=1}^{n} p_{n-1,k-1}\, x^k - \sum\limits_{k=1}^{n} (k-1)\, p_{n-1,k-1}\, x^k$ **(car** $p_{n-1,n} = p_{n-1,1} = 0$**)**
- **1 pt :** $= (10-r) \sum\limits_{k=0}^{n-1} p_{n-1,k}\, x^k + x \sum\limits_{k=0}^{n-1} k\, p_{n-1,k}\, x^{k-1} + r \sum\limits_{k=0}^{n-1} p_{n-1,k}\, x^{k+1} - \sum\limits_{k=0}^{n-1} k\, p_{n-1,k}\, x^{k+1}$
- **1 pt :** $= (10-r)\, Q_{n-1}(x) + x\, Q'_{n-1}(x) + x\, r\, Q_{n-1}(x) - x^2\, Q'_{n-1}(x)$

d) En dérivant membre à membre l'égalité $(**)$, former, pour tout entier naturel n non nul, une relation entre les espérances $\mathbb{E}(Z_n)$ et $\mathbb{E}(Z_{n-1})$.
En déduire, pour tout entier naturel n, la valeur de $\mathbb{E}(Z_n)$ en fonction de n et de r.

- **1 pt : dérivation** $(**)$ **:** $10\, Q'_n(x) = r\, Q_{n-1}(x) + (11 - r + (r-2)\, x)\, Q'_{n-1}(x) + x\,(1-x)\, Q''_{n-1}(x)$
- **1 pt :** $10\,\mathbb{E}(Z_n) = 9\,\mathbb{E}(Z_{n-1}) + r$ **(d'après *7.b)*)**
- **3 pts :** $\mathbb{E}(Z_n) = r\left(1 - \left(\dfrac{9}{10}\right)^n\right)$
  - × **1 pt : résolution de l'équation de point fixe** ($\ell = r$)
  - × **1 pt :** $u_n = \mathbb{E}(Z_n) - r$ **est géométrique de raison** $\dfrac{9}{10}$
  - × **1 pt :** $u_0 = -r$

8. a) Pour tout entier naturel n, le polynôme Q''_n désigne la dérivée du polynôme Q'_n.
En utilisant une méthode semblable à celle de la question précédente, trouver pour tout entier naturel n non nul, une relation entre $Q''_n(1)$ et $Q''_{n-1}(1)$.
En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité suivante :

$$Q''_n(1) \;=\; r(r-1)\left(1 + \left(\frac{8}{10}\right)^n - 2\left(\frac{9}{10}\right)^n\right)$$

- **1 pt : deux dérivations de** $(**)$ **:** $10\, Q_n''(x) = 2\,(r-1)\, Q_{n-1}'(x) + \big(12-r+(r-4)\,x\big)\, Q_{n-1}''(x) + x\,(1-x)\, Q_{n-1}^{(3)}(x)$
- **1 pt :** $10\, Q_n''(1) = 2\,(r-1)\, Q_{n-1}'(1) + 8\, Q_{n-1}''(1)$
- **3 pts :** $Q_n''(1) = r\,(r-1)\, \left(1 + \left(\dfrac{8}{10}\right)^n - 2\, \left(\dfrac{9}{10}\right)^n\right)$
  - × **1 pt : initialisation**
  - × **2 pts : hérédité (dont 1 pt pour utilisation *7.d)*)**

b) Calculer, pour tout entier naturel n, la variance de la variable aléatoire Z_n en fonction de n et de r.

- **1 pt :** $Q_n''(x) = \sum\limits_{k=2}^{n} k\,(k-1)\, p_{n,k}\, x^{k-2}$
- **1 pt :** $Q_n''(1) = \mathbb{E}(Z_n^2) - \mathbb{E}(Z_n)$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(Z_n) = Q_n''(1) + Q_n'(1) - \big(Q_n'(1)\big)^2$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(Z_n) = r\,(r-1)\, \left(\dfrac{8}{10}\right)^n + r\, \left(\dfrac{9}{10}\right)^n - r^2\, \left(\dfrac{9}{10}\right)^{2n}$ **(d'après *7.d)* et *8.a)*)**