DS5 (version B)

Exercice

Dans ce problème, n est un entier naturel non nul et $\mathbb{R}_n[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
On note $\mathscr{B} = (e_0, e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. On rappelle que $e_0(X) = 1$ et que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $e_k(X) = X^k$.

Partie 1 : étude d'une application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$.

On considère l'application φ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\varphi(P) = \sum\limits_{k=0}^{n} P^{(k)}$, où $P^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de P, avec la convention $P^{(0)} = P$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. ***a)*** Calculer $\varphi(e_0)$ et en déduire une valeur propre de φ.

b) Montrer : $\forall j \in [\![1, n]\!]\ ,\ \varphi(e_j) - e_j \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$.

c) En déduire que la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$ est triangulaire et que la seule valeur propre de φ est celle trouvée à la question précédente.

d) Montrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. ***a)*** Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, calculer $\varphi(P - P')$.

b) Déterminer φ^{-1}, puis écrire la matrice de φ^{-1} dans la base $\mathscr{B}$.

c) On donne le script **Python** suivant :

```
1 import numpy as np
2 import numpy.linalg as nla
3 n = int(input(“Entrer la valeur de n :“))
4 M = np.eye(n+1)
5 for k in range(n) :
6     M[k, k+1] = -(k+1)
7 A =  - - - - - -
8 print(A)
```

Compléter la sixième ligne de ce script pour qu'il affiche la matrice A de φ dans la base $\mathscr{B}$ lorsque la valeur de n est entrée par l'utilisateur.

Partie 2 : étude d'une autre application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$.

On désigne par x un réel quelconque.

4. a) Montrer que, pour tout entier naturel k, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^k\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$ est convergente.

b) En déduire que, si P est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} P(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$ est convergente.

5. a) Donner la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,dt$.

b) Établir que pour tout entier naturel k, on a : $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^k\,\mathrm{e}^{-t}\,dt \;=\; k!\sum_{i=0}^{k}\frac{x^i}{i!}\,\mathrm{e}^{-x}$.

6. Informatique.

a) On admet que si `u` est une liste, la commande **Python** `prod(u)` renvoie le produit des éléments de `u`.
Utiliser l'égalité obtenue à la question ***5.b)*** pour compléter le script **Python** suivant afin qu'il calcule et qu'il affiche la variable `s` contenant la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^k\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$, les valeurs de `x` et de `k` étant entrées par l'utilisateur.

```
k = int(input(“Entrer la valeur de k :“)
x = float(input(“Entrer la valeur de x :“)
p = np.prod([i for i in range(1,k+1)])
u =  - - - - - - -  ./  - - - - - -
s = p *  - - - - - - -  ⋆ np.exp(-x)
print(s)
```

b) **<u>Seulement pour les cubes</u>** :
Montrer, grâce à un changement de variable simple : $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^k\,\mathrm{e}^{-t}\,dt \;=\; \mathrm{e}^{-x}\int_0^{+\infty} (u+x)^k\,\mathrm{e}^{-u}\,du$.
En déduire la commande manquante du script **Python** suivant afin qu'il permette de calculer et d'afficher une valeur approchée de $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^k\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$ grâce à la méthode de Monte Carlo.

```
import numpy.random as nr
k = int(input(“Entrer la valeur de k :“)
x = float(input(“Entrer la valeur de x :“)
Z = nr.exponential(1, 100000)
s = np.exp(-x) * np.mean(  - - - - - -   )
print(s)
```

On considère maintenant l'application qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, associe la fonction $F = \Psi(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} P(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$$

7. ***a)*** Montrer que Ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner une relation entre F , F' et P.

c) Montrer que Ψ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

8. On considère un polynôme P non nul, vecteur propre de Ψ pour une valeur propre λ non nulle.

a) Utiliser la relation obtenue à la question ***7.b)*** pour établir : $P' = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda}\ P$.

b) En déduire, en considérant les degrés, que $\lambda = 1$ est la seule valeur propre possible de Ψ.

c) Montrer enfin que $\lambda = 1$ est bien la seule valeur propre de Ψ. (On ne demande pas le sous-espace propre associé).

9. ***a)*** Montrer que les endomorphismes φ et Ψ sont égaux.

b) En déduire que, si P est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ et s'il existe un réel a tel que pour tout réel x supérieur ou égal à a, on a $P(x) \geqslant 0$, alors :

$$\forall x \geqslant a,\ \sum_{i=0}^{n} P^{(i)}(x) \geqslant 0$$

Problème

Dans tout le problème, r désigne un entier naturel vérifiant $1 \leqslant r \leqslant 10$. Une urne contient 10 boules distinctes B_1, B_2, ... , B_{10}. Une expérience aléatoire consiste à y effectuer une suite de tirages d'une boule **avec remise**, chaque boule ayant la même probabilité de sortir à chaque tirage.
Cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Partie I : Etude du nombre de tirages nécessaires pour obtenir au moins une fois chacune des boules B_1, ... , B_r

On suppose que le nombre de tirages nécessaires pour obtenir au moins une fois chacune des boules B_1, ... , B_r définit une variable aléatoire Y_r sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. Cas particulier $r = 1$.
Montrer que la variable aléatoire Y_1 suit une loi géométrique ; préciser son paramètre, son espérance et sa variance.

2. On suppose que r est supérieur ou égal à 2.

a) Calculer la probabilité pour que les r boules B_1, B_2, ..., B_r sortent dans cet ordre aux r premiers tirages.

b) En déduire la probabilité $\mathbb{P}([Y_r = r])$.

c) Préciser l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable aléatoire Y_r.

3. On suppose encore que r est supérieur ou égal à 2. Pour tout entier i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant r$, on désigne par W_i la variable aléatoire représentant le nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, i boules distinctes parmi les boules B_1, B_2, ... , B_r soient sorties (en particulier, on a : $W_r = Y_r$). On pose :

$$\begin{cases} X_1 = W_1 \\ \forall i \in [\![2, r]\!], \ X_i = W_i - W_{i-1} \end{cases}$$

On admet que les variables aléatoires X_1, ..., X_r sont indépendantes.

a) Exprimer la variable aléatoire Y_r à l'aide des variables aléatoires X_1, ..., X_r.

b) Interpréter concrètement la variable aléatoire X_i pour tout i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant r$.

c) Montrer que, pour tout i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant r$, la variable aléatoire X_i suit une loi géométrique ; préciser son espérance et sa variance.

d) On pose : $S_1(r) = \sum\limits_{k=1}^{r} \dfrac{1}{k}$ et $S_2(r) = \sum\limits_{k=1}^{r} \dfrac{1}{k^2}$.
Exprimer l'espérance $\mathbb{E}(Y_r)$ et la variance $\mathbb{V}(Y_r)$ de Y_r à l'aide de $S_1(r)$ et de $S_2(r)$.

4. *a)* Si k est un entier naturel non nul, préciser le minimum et le maximum de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sur l'intervalle $[k, k+1]$ et en déduire un encadrement de l'intégrale $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt$.

b) Si r est supérieur ou égal à 2, donner un encadrement de $S_1(r)$ et en déduire la double inégalité :

$$10 \ln(r+1) \ \leqslant \ \mathbb{E}(Y_r) \ \leqslant \ 10 \big(\ln(r) + 1\big)$$

c) Si r supérieur ou égal à 2, établir par une méthode analogue à celle de la question précédente, la double inégalité :

$$1 - \frac{1}{r+1} \ \leqslant \ S_2(r) \ \leqslant \ 2 - \frac{1}{r}$$

En déduire un encadrement de $\mathbb{V}(Y_r)$.

Partie II : Etude du nombre de boules distinctes parmi les boules B_1, B_2, …, B_r tirées au moins une fois au cours des n premiers tirages

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on suppose que le nombre de boules distinctes parmi les boules B_1, B_2, …, B_r tirées au moins une fois au cours des n premiers tirages, définit une variable aléatoire Z_n sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On note $\mathbb{E}(Z_n)$ l'espérance de Z_n et on pose $Z_0 = 0$.
Pour tout entier naturel n non nul et pour tout entier naturel k, on note $p_{n,k}$ la probabilité de l'événement $[Z_n = k]$ et on pose : $p_{n,-1} = 0$.

5. Étude des cas particuliers $n = 1$ et $n = 2$.

a) Déterminer la loi de Z_1 et donner son espérance.

b) On suppose, dans cette question, que r est supérieur ou égal à 2.
Déterminer la loi de Z_2 et montrer que son espérance est donnée par : $\mathbb{E}(Z_2) = \dfrac{19\,r}{100}$

6. Établir, pour tout entier naturel n non nul et pour tout entier naturel k au plus égal à r, l'égalité :

$$10\,p_{n,k} \;=\; (10 - r + k)\,p_{n-1,k} + (r + 1 - k)\,p_{n-1,k-1} \qquad (*)$$

Vérifier que cette égalité reste vraie dans le cas où k est supérieur ou égal à $r + 1$.

7. Pour tout entier naturel non nul n, on définit le polynôme Q_n par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} Q_0(X) & = & 1 \\ Q_n(X) & = & \sum\limits_{k=0}^{n} p_{n,k}\, x^k \end{array}\right.$$

a) Préciser les polynômes Q_1 et Q_2.

b) Calculer $Q_n(1)$ et exprimer $Q_n'(1)$ en fonction de $\mathbb{E}(Z_n)$, où Q_n' désigne la dérivée du polynôme Q_n.

c) En utilisant l'égalité $(*)$, établir, pour tout réel x et pour tout entier naturel n non nul, la relation suivante :

$$10\,Q_n(x) \;=\; (10 - r + rx)\,Q_{n-1}(x) + x(1-x)\,Q_{n-1}'(x) \qquad (**)$$

d) En dérivant membre à membre l'égalité $(**)$, former, pour tout entier naturel n non nul, une relation entre les espérances $\mathbb{E}(Z_n)$ et $\mathbb{E}(Z_{n-1})$.
En déduire, pour tout entier naturel n, la valeur de $\mathbb{E}(Z_n)$ en fonction de n et de r.

8. ***a)*** Pour tout entier naturel n, le polynôme Q_n'' désigne la dérivée du polynôme Q_n'.
En utilisant une méthode semblable à celle de la question précédente, trouver pour tout entier naturel n non nul, une relation entre $Q_n''(1)$ et $Q_{n-1}''(1)$.
En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité suivante :

$$Q_n''(1) \;=\; r(r-1)\left(1 + \left(\frac{8}{10}\right)^n - 2\left(\frac{9}{10}\right)^n\right)$$

b) Calculer, pour tout entier naturel n, la variance de la variable aléatoire Z_n en fonction de n et de r.