DS5 (version A)

Exercice 1 (EDHEC 2019)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice relativement à la base canonique $\mathscr{B} = (e_1,\ e_2,\ e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est I.

1. a) Déterminer $(A - I)^2$.

Démonstration.

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(A-I)^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}}$$

□

b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et de A.

Démonstration.

- Calculons tout d'abord :

$$(A-I)^2 = A^2 - 2A + I \quad \textit{(car la matrice } I \textit{ commute avec } A\textit{, matrice de même ordre)}$$

- Ainsi, d'après la question précédente :

$$\begin{array}{rrcl} & A^2 - 2A + I & = & 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\ \text{donc} & -A^2 + 2A & = & I \\ \text{et} & A(-A + 2I) & = & I \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } A \text{ est inversible d'inverse } A^{-1} = -A + 2I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.}$$

□

2. On pose $A = N + I$.

Commentaire

Autrement dit, on note $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice définie par : $N = A - I$.

a) Exprimer pour tout entier naturel n, la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et de N puis l'écrire comme combinaison linéaire de I et A.

Démonstration.

- On a démontré en question ***1.a)*** : $N^2 = \big(A - I\big)^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

  On en déduit, par une récurrence immédiate, que pour tout $k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
  (ou alors on remarque : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = N^2\ N^{k-2} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\ N^{k-2} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$)

- Les matrices I et N commutent (car I commute avec toutes les matrices du même ordre).
- Soit $n \geqslant 1$. D'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
A^n &= (N+I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (I)^{n-k} (N)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I\, N^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k && \textit{(car : } \forall j \in \mathbb{N},\ I^j = I\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} N^k + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} N^k && \textit{(ce découpage est valable car } n \geqslant 1\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} N^k && \textit{(car : } \forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\textit{)} \\
&= \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{1} N^1 \\
&= I + n\,N
\end{aligned}$$

- De plus : $I - 0 \cdot N = I$ et $A^0 = I$.
  La formule précédente reste valable pour $n = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^n = I + n\,N.}$$

Commentaire

- La « relation de Chasles » stipule que pour tout $(m, p, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leqslant p \leqslant n$:

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$

  (la somme la plus à droite est nulle si $p = n$)
  où (u_n) est une suite quelconque de réels ou de matrices.
- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 0$ et $p = 1$.
  L'argument $n \geqslant 1$ est donc essentiel pour découper la somme.
  Le cas $n = 0$ doit donc être traité à part.
- Ici, la matrice N vérifie : $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Elle est dite nilpotente d'indice 2 (ce terme n'est pas au programme et il est préférable de ne pas l'utiliser dans une copie). Si elle avait été nilpotente d'ordre 3, il aurait fallu traiter à part les cas $n = 0$ et $n = 1$ (le découpage de la somme est alors valable pour $n \geqslant 2$).

- Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = I + n\,N = I + n\,(A - I) = (1-n)\,I + n\,A$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = (1-n)\,I + n\,A}$$

□

b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $A^{-1} = 2\,I - A$ d'après la question ***1.b)***.
- D'autre part : $(1 - (-1))\,I + (-1)\,A = 2\,I - A$.

$$\boxed{\text{La formule précédente est aussi valable pour } n = -1.}$$

□

3. a) Utiliser la première question pour déterminer la seule valeur propre de A.

Démonstration.

- D'après la question précédente, le polynôme $Q(X) = (X - 1)^2$ est un polynôme annulateur de la matrice A. Ainsi : $\text{Sp}(A) \subset \{\text{racines de } Q\} = \{1\}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \text{Sp}(A) \subset \{1\} \text{ et } 1 \text{ est l'unique valeur propre possible de } A.}$$

Commentaire

- Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possède `TOUJOURS` un polynôme annulateur non nul Q.
  On peut même démontrer (ce n'est pas au programme en ECE) qu'il existe toujours un tel polynôme de degré (au plus) n.
- Si Q est un polynôme annulateur de A alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le polynôme $\alpha\,Q$ est toujours un polynôme annulateur de A puisque :

$$(\alpha\,Q)(A) \ = \ \alpha\,Q(A) \ = \ 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$

  Cela suffit à démontrer que A possède une infinité de polynômes annulateurs.
  On peut en obtenir d'autres. Par exemple $R(X) = (X-5)\,Q(X)$ est un polynôme annulateur de A puisque :

$$R(A) \ = \ (A - 5\,I)\,Q(A) \ = \ 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$

  Il faut donc parler `D'UN` polynôme annulateur d'une matrice.
- Les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas forcément toutes valeurs propres de A.
  Si c'était le cas, A aurait une infinité de valeurs propres (elle en possède au plus n). Par exemple, comme $R(X) = (X - 5)\,Q(X)$ est un polynôme annulateur, un tel raisonnement permettrait de démontrer que 5 est aussi valeur propre.

- Démontrons que 1 est valeur propre de A.

$$A - I \ = \ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

  Cette matrice est non inversible car possède 2 colonnes colinéaires ($C_2 = -C_1$).

$$\boxed{\text{On en déduit que 1 est l'unique valeur propre de } A.}$$

□

b) En déduire si A est ou n'est pas diagonalisable.

Démonstration.
Démontrons que A n'est pas diagonalisable. On procède par l'absurde.
Supposons que A est diagonalisable.
Il existe donc une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A telles que $A = PDP^{-1}$.
Or 1 est la seule valeur propre de A. Ainsi $D = I$ et :

$$A \ = \ P\, I_3\, P^{-1} \ = \ P\, I_3\, P^{-1} \ = \ I_3$$

Absurde !

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

□

4. On pose $u_1 = (f - \mathrm{id})(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$.
a) Montrer que le rang de $f - \mathrm{id}$ est égal à 1.

Démonstration.

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{rg}(f - \mathrm{id}) & = & \mathrm{rg}(A - I) \\ & = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\right) \\ & = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \ = \ \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \ = \ 1 \end{array}$$

La dernière égalité est vérifié car la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est libre (constituée uniquement d'un vecteur non nul).

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{rg}(f - \mathrm{id}) = 1.}$$

□

b) Justifier que (u_1, u_2) est une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$.

Démonstration.
Notons $E_1 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U_1 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1)$, $U_2 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_2)$.

- Remarquons tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1) & = & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\Big((f - \mathrm{id})(e_1)\Big) \\ & = & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f - \mathrm{id}\big) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_1) \\ & = & \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id})\big) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_1) \qquad \textit{(par linéarité de } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\cdot)\textit{)} \\ & = & \big(A - I\big)\ E_1 \ = \ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \ = \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big((-1, -2, 1)\big) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Par isomorphisme de représentation, } u_1 = (-1, -2, 1).}$$

Puis : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\Big((f-\mathrm{id})(u_1)\Big) = \big(A-I\big)\, U_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big((0,0,0)\big).$

$$\boxed{\text{Ainsi : } (f-\mathrm{id})(u_1) = 0_{\mathbb{R}^3}, \text{ c'est-à-dire : } u_1 \in \mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}).}$$

Commentaire

On pouvait ici opter pour une présentation plus élégante :

$$\begin{aligned} (f-\mathrm{id})\,(u_1) &= (f-\mathrm{id})\,\Big((f-\mathrm{id})(e_1)\Big) \\ &= (f-\mathrm{id})^2\,(e_1) \;=\; 0_{\mathbb{R}^3} \qquad \begin{array}{l} \textit{(car } (f-\mathrm{id})^2 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)} \\ \textit{puisque } (A-I)^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\textit{)} \end{array} \end{aligned}$$

La présentation choisie est plus calculatoire. Cela a un intérêt : on obtient la valeur de u_1.

- Ensuite :

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big((f-\mathrm{id})(u_2)\big) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f-\mathrm{id}\big) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(u_1\big) \\ &= (A-I)\,(E_1+E_3) \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big((0,0,0)\big) \end{aligned}$$

On en déduit, par isomorphisme de représentation : $(f-\mathrm{id})(u_2) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } u_2 \in \mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}).}$$

Commentaire

- L'énoncé ne donne pas directement accès à f mais à A, sa matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$. La base $\mathscr{B}$ étant fixée, l'application $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$, appelée parfois isomorphisme de représentation, permet de traduire les propriétés énoncées dans le monde des espaces vectoriels en des propriétés énoncées dans le monde matriciel.
  Voici quelques correspondances dans le cas général :

$$\begin{aligned} E \text{ espace vectoriel de dimension } n &\longleftrightarrow \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ f: E \to E \text{ endomorphisme} &\longleftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ f \text{ bijectif} &\longleftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ inversible} \end{aligned}$$

  Ou encore, dans le cas précis de l'exercice :

$$\begin{aligned} f &\longleftrightarrow A \\ f-\mathrm{id} &\longleftrightarrow A-I \\ (f-\mathrm{id})(u_2) = 0_{\mathbb{R}^3} &\longleftrightarrow (A-I) \times U_2 = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

  Il est très fréquent que les énoncés de concours requièrent de savoir traduire une propriété d'un monde à l'autre. Il est donc indispensable d'être à l'aise sur ce mécanisme.

- Enfin, par théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc} \dim\left(\mathbb{R}^3\right) & = & \dim\Big(\text{Ker}\left(f-\text{id}\right)\Big) & + & \text{rg}\left(f-\text{id}\right) \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ 3 & & & & 1 \end{array}$$

  On en déduit : $\dim\big(\text{Ker}\left(f-\text{id}\right)\big) \ = \ 3-1 \ = \ 2$.

$$\boxed{\dim\big(\text{Ker}\left(f-\text{id}\right)\big) \ = \ 2}$$

- La famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2)$ est :
  - × libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires ($(-1,-2,1)$ et $(1,0,1)$).
  - × de cardinal $\text{Card}\left(\mathcal{F}\right) = 2 = \dim\big(\text{Ker}\left(f-\text{id}\right)\big)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la famille } \mathcal{F} \text{ est une base de Ker}\left(f-\text{id}\right).}$$

Commentaire

- On peut aussi déterminer le noyau de $f - \text{id}$ par résolution de systèmes.
  Détaillons cette méthode.
- Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Notons $U = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl}
u \in \text{Ker}\left(f-\text{id}\right) & \Longleftrightarrow & \left(f-\text{id}\right)(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
& \Longleftrightarrow & (A-I)\,U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & z & = & 0 \\ -2\,x & + & 2\,y & + & 2\,z & = & 0 \\ x & - & y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2\,L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \ x \ = \ y \ + \ z \right.
\end{array}$$

  Finalement, on obtient l'expression de $\text{Ker}(f)$ suivante :

$$\begin{array}{rcl}
\text{Ker}\left(f-\text{id}\right) & = & \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y + z\} \\
& = & \{(y+z, y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \\
& = & \{y \cdot (1,\, 1,\, 0) + z \cdot (1,\, 0,\, 1) + \ \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \\
& = & \text{Vect}\left((1,1,0), (1,0,1)\right)
\end{array}$$

- On remarque que la famille génératrice trouvée n'est pas celle qui est présente dans l'énoncé. Cependant, comme : $(-1,-2,1) = -2 \cdot (1,1,0) + (1,0,1)$, on a :

$$\text{Vect}\left((1,1,0),(1,0,1)\right) \ = \ \text{Vect}\left((-1,-2,1),(1,0,1)\right) \ = \ \text{Vect}\left(u_1, u_2\right)$$

□

5. a) Montrer que la famille (u_1, u_2, e_1) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration.

- Montrons que la famille (u_1, u_2, e_1) est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.
  Supposons : $\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 \cdot e_1 \ = \ 0_{\mathbb{R}^3}$ $(*)$.
  - Par linéarité de $f - \mathrm{id}$, on obtient, en appliquant $f - \mathrm{id}$ de part et d'autre de l'égalité :

$$\lambda_1 \cdot \cancel{(f - \mathrm{id})(u_1)} + \lambda_2 \cdot \cancel{(f - \mathrm{id})(u_2)} + \underbrace{\lambda_3 \cdot (f - \mathrm{id})(e_1)}_{\lambda_3 \cdot u_1} \ = \ \underbrace{(f - \mathrm{id})\big(0_{\mathbb{R}^3}\big)}_{0_{\mathbb{R}^3}}$$

  En effet, comme u_1 et u_2 sont deux éléménts de $\mathrm{Ker}\big(f - \mathrm{id}\big)$ alors :

$$(f - \mathrm{id})(u_1) \ = \ 0_{\mathbb{R}^3} \ = \ (f - \mathrm{id})(u_2)$$

$$\boxed{\text{Comme } \lambda_3 \cdot u_1 = 0_{\mathbb{R}^3} \text{ et } u_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3}, \text{ alors : } \lambda_3 = 0.}$$

  - L'égalité $(*)$ se réécrit alors : $\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$.
  Or, d'après la question précédente, la famille (u_1, u_2) est libre.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lambda_1 = \lambda_2 = 0.}$$

$$\boxed{\text{Finalement, } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \text{ et la famille } (u_1, u_2, e_1) \text{ est bien libre.}}$$

Commentaire

- Il était une nouvelle fois possible de procéder par résolution de système.
  Détaillons ce point.
- Montrons que la famille (u_1, u_2, e_1) est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons : $\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 \cdot e_1 \ = \ 0_{\mathbb{R}^3}$.

  Les équivalences suivantes sont vérifiées.

$$\begin{array}{cl}
 & \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 \cdot e_1 = 0_{\mathbb{R}^3} \\
\iff & \lambda_1 \cdot (-1, -2, 1) + \lambda_2 \cdot (1, 0, 1) + \lambda_3 \cdot (1, 0, 0) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
\iff & (-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \ -2\,\lambda_1, \ \lambda_1 + \lambda_2) \ = \ (0, 0, 0) \\
\iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ -2\,\lambda_1 & & & & & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \end{array} \right. \\
\underset{\iff}{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2\,L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & - & 2\,\lambda_2 & - & 2\,\lambda_3 & = & 0 \\ & & 2\,\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \\
\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & - & 2\,\lambda_2 & & & = & 0 \\ & & & - & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \\
\iff & \{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \\
 & \textit{(par remontées successives)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } (u_1, u_2, e_1) \text{ est une famille libre de } \mathbb{R}^3.}$$

- On a alors :
  - × la famille (u_1, u_2, e_1) est une famille libre,
  - × $\text{Card}\big((u_1, u_2, e_1)\big) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } (u_1, u_2, e_1) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

Commentaire

- Le terme **cardinal** est réservé aux ensembles finis. La famille (u_1, u_2, e_1) est un ensemble qui contient 3 vecteurs. Elle est donc finie, de cardinal 3 (ce qu'on note $\text{Card}((u_1, u_2, e_1)) = 3$).
- $\text{Vect}\,(u_1, u_2, e_1)$ est l'espace vectoriel constitué de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs (u_1, u_2, e_1). C'est un ensemble **infini** de vecteurs, on ne peut parler de son cardinal. Par contre, si l'on dispose d'une base (u_1, u_2, e_1) d'un espace vectoriel, tout vecteur se décompose de manière unique sur cette base. Ceci permet de donner une représentation finie de cet ensemble infini.
- Les notations : $\cancel{\text{Card}\big(\text{Vect}\,(u_1, u_2, e_1)\big)}$ et $\cancel{\dim((u_1, u_2, e_1))}$ n'ont aucun sens !

□

b) Déterminer la matrice T de f dans cette même base.

Démonstration.

- $f(u_1) = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot e_1$ car $u_1 \in \text{Ker}(f - \text{id}) = E_1(f)$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \text{Mat}_{(u_1,u_2,e_1)}\big(f(u_1)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

- $f(u_2) = 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + 0 \cdot e_1$ car $u_2 \in \text{Ker}(f - \text{id}) = E_1(f)$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \text{Mat}_{(u_1,u_2,e_1)}\big(f(u_2)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

- Rappelons que par définition : $u_1 = (f - \text{id})(e_1) = f(e_1) - e_1$.
  On en déduit : $f(e_1) = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 1 \cdot e_1$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \text{Mat}_{(u_1,u_2,e_1)}\big(f(e_1)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \text{Mat}_{(u_1,u_2,e_1)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T.}$$

Commentaire

- Rappelons tout d'abord que déterminer la matrice représentative de f dans la base (u_1, u_2, e_1) consiste à exprimer l'image par f des vecteurs u_1, u_2, e_1 suivant cette même base (u_1, u_2, e_1).
- Pour résoudre la question, on se sert ici une nouvelle fois de la correspondance entre le monde des espaces vectoriels et le monde matriciel.
  Ou peut ajouter la correspondance suivante à celle déjà évoquée :

$$\text{expression de } f(u_1) \text{ dans } (u_1, u_2, e_1) \quad \longleftrightarrow \quad \text{expression de } AU_1 \text{ dans } (U_1, U_2, E_1)$$

Commentaire

- Comme on l'a vu dans la question ***3.b)***, l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable. Il n'existe donc pas de base dans laquelle la matrice représentant f est diagonale.
- Dans ce cas, on se rabat sur une propriété plus faible : existe-t-il une base dans laquelle la représentation matricielle de f serait triangulaire supérieure ? Cette propriété est beaucoup plus simple à obtenir notamment si l'on accepte d'utiliser des matrices dont les coefficients sont complexes (hors de notre portée en ECE).
  On parle alors de **trigonaliser** (on dit aussi **triangulariser**) la matrice A.
- Considérer un espace vectoriel E de dimesnion finie.
  Si un endomorphisme $f : E \to E$ est triangularisable, comment le triangularise-t-on ?
  Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ les valeurs propres de f. On cherche alors une base de chaque sous-espace propre $E_{\lambda_i}(f)$ et on considère la famille obtenue en concaténant toutes ces bases.
  Cette famille `N'EST PAS` une base de E. Si tel était le cas, on aurait formé une base de vecteurs prores et donc E serait diagonalisable.
  Par contre, cette famille est libre. On peut alors la compléter en une base de E.
  Sans entrer dans les détails, on peut faire en sorte (en choisissant correctement les vecteurs qu'on ajoute) que la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$ soit triangulaire supérieure.
- C'est la méthode développée dans cette question. Ici, f n'a qu'une valeur propre. Le sous-espace propre $E_1(f)$ a pour base la famille (u_1, u_2). On complète alors cette famille en ajoutant e_1. La matrice représentative de f dans la base (u_1, u_2, e_1) obtenue est triangulaire supérieure. □

6. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Justifier l'inversibilité de P puis écrire la relation existant entre les matrices A, T, P et P^{-1}.

Démonstration.

- Notons $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, e_1)$. Rappelons tout d'abord :
$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1), \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_2), \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_1)$$
  On en conclut que $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$.
$$\boxed{\text{Comme } P \text{ est une matrice de passage, } P \text{ est inversible.}}$$

Commentaire

On pouvait aussi effectuer un calcul de rang plus classique.

- 1ère méthode :
$$\mathrm{rg}(P) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{rg}\,(U_1, U_2, E_2) = 3$$
  En effet, la famille (U_1, U_2, E_2) est libre car la famille (u_1, u_2, e_2) l'est en tant que base de $\mathbb{R}^3$.
- 2ème méthode :
$$\mathrm{rg}(P) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{=}} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right) \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$$
  La réduite obtenue est triangulaire supérieure et à coefficients diagonaux tous non nuls.
  Elle est donc inversible et il en est de même de la matrice initiale P.

- Notons $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, e_1)$. D'après la formule de changement de base :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} & \times & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) & \times & P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ A & = & P & \times & T & \times & P^{-1} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } A = P\,T\,P^{-1}.}$$

□

7. On note $(E_{1,1},\ E_{1,2},\ E_{1,3},\ E_{2,1},\ E_{2,2},\ E_{2,3},\ E_{3,1},\ E_{3,2},\ E_{3,3})$ la base canonique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on rappelle que pour tout $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$, la matrice $E_{i,j}$ n'a que des coefficients nuls sauf celui situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.

a) Montrer que l'ensemble E des matrices M qui commutent avec T, c'est-à-dire des matrices vérifiant l'égalité $MT = TM$, est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(E_{1,1} + E_{3,3},\ E_{1,2},\ E_{1,3},\ E_{2,2},\ E_{2,3})$. Vérifier que la dimension de E est égale à 5.

Commentaire

Le concepteur a décidé ici de décrire les ensembles dont on doit démontrer l'égalité avec des phrases mathématiques plutôt qu'avec des symboles. Il faut savoir lire l'égalité souhaitée si elle est énoncée sous la forme suivante :

$$\{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid MT = TM\} \ = \ \mathrm{Vect}\,(E_{1,1} + E_{3,3},\ E_{1,2},\ E_{1,3},\ E_{2,2},\ E_{2,3})$$

Démonstration.

Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Il existe donc $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_9) \in \mathbb{R}^9$ tel que : $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}$.

- On a alors :

$$\begin{aligned} MT = TM \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_1 + a_3 \\ a_4 & a_5 & a_4 + a_6 \\ a_7 & a_8 & a_7 + a_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_7 & a_2 + a_8 & a_3 + a_9 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a_1 & = & a_1 + a_7 \\ a_2 & = & a_2 + a_8 \\ a_1 + a_3 & = & a_3 + a_9 \\ a_4 + a_6 & = & a_6 \\ a_7 + a_9 & = & a_9 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a_7 & = & 0 \\ a_8 & = & 0 \\ a_1 & = & a_9 \\ a_4 & = & 0 \\ a_7 & = & 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Commentaire

On peut aussi poser $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de sorte que : $T = I + R$. On a alors :

$$MT = TM \ \Leftrightarrow \ M\,(I + R) = (I + R)\,M \ \Leftrightarrow \ \cancel{M} + MR = \cancel{M} + RM \ \Leftrightarrow \ MR = RM$$

Cela permet d'obtenir plus rapidement les équations au-dessus.

On en conclut :

$$\begin{array}{rl} & \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid MT = TM\} \\ = & \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix} \mid a_1 = a_9 \quad \text{et} \quad a_4 = a_7 = a_8 = 0 \right\} \ = \ \left\{ \begin{pmatrix} a_9 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_5 & a_6 \\ 0 & 0 & a_9 \end{pmatrix} \mid (a_2, a_3, a_5, a_6, a_9) \in \mathbb{R}^5 \right\} \\ = & \{a_9 \cdot (E_{1,1} + E_{3,3}) + a_2 \cdot E_{1,2} + a_3 \cdot E_{1,3} + a_5 \cdot E_{2,2} + a_6 \cdot E_{2,3} \mid (a_2, a_3, a_5, a_6, a_9) \in \mathbb{R}^5\} \\ = & \mathrm{Vect}\,(E_{1,1} + E_{3,3},\ E_{1,2},\ E_{1,3},\ E_{2,2},\ E_{2,3}) \end{array}$$

$$\boxed{E = \mathrm{Vect}\,(E_{1,1} + E_{3,3},\ E_{1,2},\ E_{1,3},\ E_{2,2},\ E_{2,3})}$$

- Montrons que la famille $\mathcal{F} = \big(E_{1,1} + E_{3,3},\ E_{1,2},\ E_{1,3},\ E_{2,2},\ E_{2,3}\big)$ est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) \in \mathbb{R}^5$.
  Supposons : $\lambda_1 \cdot (E_{1,1} + E_{3,3}) + \lambda_2 \cdot E_{1,2} + \lambda_3 \cdot E_{1,3} + \lambda_4 \cdot E_{2,2} + \lambda_5 \cdot E_{2,3} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
  Ce qui se réécrit :

$$\lambda_1 \cdot E_{1,1} + \lambda_1 \cdot E_{3,3} + \lambda_2 \cdot E_{1,2} + \lambda_3 \cdot E_{1,3} + \lambda_4 \cdot E_{2,2} + \lambda_5 \cdot E_{2,3} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$

  Or, la famille $\big(E_{1,1},\ E_{3,3},\ E_{1,2},\ E_{1,3},\ E_{2,2},\ E_{2,3}\big)$ est libre comme sous-famille de la base canonique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ (qui est elle-même libre). On en déduit :

$$\lambda_1 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la famille } \mathcal{F} \text{ est libre.}}$$

- La famille $\mathcal{F}$ est :
  - × libre.
  - × génératrice de E.

  On en déduit que $\mathcal{F}$ est une base de E.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \dim(E) = \mathrm{Card}\,(\mathcal{F}) = 5.}$$

□

b) Soit N une matrice quelconque de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Établir l'équivalence :

$$NA = AN \quad \Leftrightarrow \quad \big(P^{-1}NP\big)\,T \ = \ T\,\big(P^{-1}NP\big)$$

Démonstration.

$$\begin{array}{rll} & NA = AN & \\ \Leftrightarrow & N\left(PTP^{-1}\right) = \left(PTP^{-1}\right)N & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{6.}}\textit{)} \\ \Leftrightarrow & P^{-1}\,N\,PTP^{-1} = \left(P^{-1}P\right)TP^{-1}\,N & \textit{(en multipliant à gauche par } P^{-1}\textit{)} \\ \Leftrightarrow & P^{-1}\,N\,PT\left(P^{-1}P\right) = TP^{-1}\,N\,P & \textit{(en multipliant à droite par } P^{-1}\textit{)} \\ \Leftrightarrow & \left(P^{-1}NP\right)T = T\left(P^{-1}NP\right) & \end{array}$$

$$\boxed{NA = AN \ \Leftrightarrow\ \big(P^{-1}NP\big)\,T = T\,\big(P^{-1}NP\big)}$$

□

c) En déduire que l'ensemble F des matrices qui commutent avec A est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $\big(P\,(E_{1,1}+E_{3,3})\,P^{-1}, P\,E_{1,2}\,P^{-1}, P\,E_{1,3}\,P^{-1}, P\,E_{2,2}\,P^{-1}, P\,E_{2,3}\,P^{-1}\big)$.

Commentaire

Ici aussi, le concepteur a préféré décrire les ensembles plutôt que de les écrire avec des symboles mathématiques. On aurait pu écrire l'égalité souhaitée sous la forme suivante.

$$\begin{array}{rcl} F & = & \{N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid NA = AN\} \\ & = & \operatorname{Vect}\big(P\,(E_{1,1}+E_{3,3})\,P^{-1}, P\,E_{1,2}\,P^{-1}, P\,E_{1,3}\,P^{-1}, P\,E_{2,2}\,P^{-1}, P\,E_{2,3}\,P^{-1}\big) \end{array}$$

Démonstration.

$$\begin{array}{cll} & N \in F & \\ \Leftrightarrow & NA = AN & \textit{(par définition de } F\textit{)} \\ \Leftrightarrow & \big(P^{-1}NP\big)\,T = T\,\big(P^{-1}NP\big) & \textit{(d'après la question précédente)} \\ \Leftrightarrow & P^{-1}NP \in E = \operatorname{Vect}(E_{1,1}+E_{3,3},\ E_{1,2},\ E_{1,3},\ E_{2,2},\ E_{2,3}) & \textit{(par définition de } E \textit{ et question } \textbf{\textit{7.a)}}\textit{)} \\ \Leftrightarrow & \exists (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5) \in \mathbb{R}^5, & \\ & P^{-1}NP = \lambda_1 \cdot (E_{1,1}+E_{3,3}) + \lambda_2 \cdot E_{1,2} + \lambda_3 \cdot E_{1,3} + \lambda_4 \cdot E_{2,2} + \lambda_5 \cdot E_{2,3} & \\ \Leftrightarrow & \exists (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5) \in \mathbb{R}^5, & \\ & N = P\,\Big(\lambda_1 \cdot (E_{1,1}+E_{3,3}) + \lambda_2 \cdot E_{1,2} + \lambda_3 \cdot E_{1,3} + \lambda_4 \cdot E_{2,2} + \lambda_5 \cdot E_{2,3}\Big)\,P^{-1} & \\ \Leftrightarrow & \exists (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5) \in \mathbb{R}^5, & \\ & N = \lambda_1 \cdot P\,(E_{1,1}+E_{3,3})\,P^{-1} + \lambda_2 \cdot P\,E_{1,2}\,P^{-1} + \lambda_3 \cdot P\,E_{1,3}\,P^{-1} + \lambda_4 \cdot P\,E_{2,2}\,P^{-1} + \lambda_5 \cdot P\,E_{2,3}\,P^{-1} & \\ \Leftrightarrow & N \in \operatorname{Vect}\big(P\,(E_{1,1}+E_{3,3})\,P^{-1}, P\,E_{1,2}\,P^{-1}, P\,E_{1,3}\,P^{-1}, P\,E_{2,2}\,P^{-1}, P\,E_{2,3}\,P^{-1}\big) & \end{array}$$

$\boxed{\text{On a bien : } F \ = \ \operatorname{Vect}\big(P\,(E_{1,1}+E_{3,3})\,P^{-1}, P\,E_{1,2}\,P^{-1}, P\,E_{1,3}\,P^{-1}, P\,E_{2,2}\,P^{-1}, P\,E_{2,3}\,P^{-1}\big).}$

Commentaire

- Résumons le procédé mis en place lors de la question ***7***. On souhaite déterminer l'ensemble F des matrices qui commutent avec A (cet ensemble s'appelle le **commutant de** A). Pour ce faire, on commence par déterminer E, l'ensemble des matrices qui commutent avec la matrice triangulaire supérieure T (question ***7.a)***).
  Puis, en question ***7.b)***, on établit un lien entre E et F : $N \in F \quad \Leftrightarrow \quad \big(P^{-1}NP\big) \in E$.
  Cela permet enfin de déterminer F en ***7.a)***.
- Cette question ***7*** illustre un procédé fréquent en mathématiques. Déterminer F de manière directe est difficile. Procéder comme en ***7.a)*** n'est pas judicieux. En effet, si l'on essaie de déterminer par équivalence les contraintes que la propriété $AN = NA$ impose sur les coefficients d'une matrice N quelconque, on obtient un système qui est difficile à résoudre. Il faut noter que la complexité de cette résolution provient de l'aspect de la matrice A. Déterminer le commutant d'une matrice diagonale est plutôt simple. On se pose donc la question de savoir si la matrice A admet un représentant sous forme diagonale. Plus formellement, on cherche s'il existe une base dans laquelle l'endomorphisme f est diagonalisable. Ici, on seulement réussi à exhibé une base dans laquelle la matrice représentative T de f est particulièrement simple ($T = I + R$). On peut donc déterminer le commutant de T. Et en déduire, par les étapes décrites dans le point précédent, le commutant de A.
- On retiendra cette idée générale : lorsqu'on cherche des propriétés sur f, il est souvent préférable d'utiliser la représentation de f la plus simple à manipuler. □

Exercice 2 (EML 2018)

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in \,]0, +\infty[, \;\; f(x) = x - \ln(x)$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$.
- Soit $x \in \,]0, +\infty[$.

$$f'(x) \;=\; 1 - \frac{1}{x} \;=\; \frac{x-1}{x}$$

Alors, comme $x > 0$, la quantité $f'(x)$ **est** du signe de $x - 1$. Ainsi :

$$f'(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; x - 1 > 0 \;\Leftrightarrow\; x > 1$$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
Variations de f	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

- Détaillons les éléments de ce tableau.
  - Tout d'abord : $f(1) = 1 - \ln(1) = 1$.
  - Ensuite : $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$.

$$\boxed{\text{Donc : } \lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty.}$$

  - Enfin, soit $x \in \,]0, +\infty[$:

$$f(x) \;=\; x - \ln(x) \;=\; x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$$

De plus, par croissances comparées : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.}$$

□

2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in \,]0, +\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.

Démonstration.

- La fonction f est :
  - × continue sur $]0, 1[$ (car dérivable sur $]0, 1[$),
  - × strictement décroissante sur $]0, 1[$.

  Ainsi f réalise une bijection de $]0, 1[$ dans $f(]0, 1[)$. Or :

$$f(]0, 1[) \;=\; \left]\lim_{x \to 1^-} f(x), \; \lim_{x \to 0} f(x)\right[\;=\;]1, +\infty[$$

  Or $2 \in \,]1, +\infty[$.
  Donc l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $]0, 1[$, notée a.

- La fonction f est :
  - $\times$ continue sur $]1,+\infty[$ (car dérivable sur $]1,+\infty[$),
  - $\times$ strictement croissante sur $]1,+\infty[$.

  Ainsi f réalise une bijection de $]1,+\infty[$ dans $f(]1,+\infty[)$. Or :
  $$f(]1,+\infty[) \ = \left] \lim_{x\to 1^-} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x) \right[=]1,+\infty[$$
  Or $2 \in \,]1,+\infty[$.
  Donc l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $]1,+\infty[$, notée b.
- Enfin, $f(1) = 1$ et donc 1 n'est pas solution de $f(x) = 2$.

Finalement, l'équation $f(x) = 2$ admet exactement 2 solutions sur $]0,+\infty[$ notées a et b telles que $0 < a < 1 < b$.

Commentaire

- Il est important dans cette question d'avoir parfaitement en tête toutes les hypothèses du théorème de la bijection. En particulier, la fonction f doit être **strictement monotone** sur l'intervalle considéré.
- On ne pouvait donc pas appliquer le théorème de la bijection directement sur l'intervalle $]0,+\infty[$, mais il fallait découper cet intervalle en plusieurs sous-intervalles sur lesquels f est strictement monotone (ici $]0,1[$ et $]1,+\infty[$).

□

3. Montrer : $b \in [2,4]$. On donne $\ln(2) \simeq 0,\,7$.

Démonstration.
Remarquons :
- $\times$ $f(2) = 2 - \ln(2) \leqslant 2$.
- $\times$ $f(b) = 2$.
- $\times$ $f(4) = 4 - \ln(4) = 4 - \ln(2^2) = 4 - 2\ln(2) = 2(2 - \ln(2))$.
  De plus, $\ln(2) \simeq 0,7$, donc : $2 - \ln(2) \simeq 1,3$ et $2(2-\ln(2)) \simeq 2,6$.
  D'où : $f(4) \geqslant 2$.

Ainsi :
$$\begin{array}{ccccc} f(2) & \leqslant & 2 & \leqslant & f(4) \\ & & \parallel & & \\ & & f(b) & & \end{array}$$
Or, d'après le théorème de la bijection, la fonction $f^{-1} :]1,+\infty[\to]1,+\infty[$ est strictement croissante (*(de même monotonie que* f). En appliquant f^{-1} de part et d'autre, on obtient :
$$f^{-1}\big(f(2)\big) \ \leqslant \ f^{-1}\big(f(b)\big) \ \leqslant \ f^{-1}\big(f(4)\big)$$

On en déduit : $2 \leqslant b \leqslant 4$.

Commentaire

L'indication de l'énoncé $\ln(2) \simeq 0,7$ ne permet pas de savoir si $0,7$ est une sur ou sous-approximation de $\ln(2)$. Il n'est d'ailleurs pas indiqué l'erreur de précision commise par une telle approximation. Il s'agit d'une valeur approchée à 10^{-1} près et on a l'encadrement : $0,6 \leqslant \ln(2) \leqslant 0,8$. Cette information serait certainement préférable pour résoudre plus rigoureusement cette question.

□

Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note Φ la fonction donnée par :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)} \, dt$$

4. Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in \,]0, +\infty[, \ \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}$$

Démonstration.

- La fonction $\dfrac{1}{f}$ est continue sur $]0, +\infty[$ en tant qu'inverse d'une fonction continue sur $]0, +\infty[$ qui ne s'annule pas sur cet intervalle (en effet, d'après le tableau de variations de f en question ***1.*** : $\forall x \in \,]0, +\infty[, \ f(x) \geqslant 1$).

$$\boxed{\text{La fonction } \frac{1}{f} \text{ admet donc une primitive } G \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[.}$$

- On obtient alors :

$$\forall x \in \,]0, +\infty[, \ \Phi(x) = G(2x) - G(x)$$

Or la fonction $x \mapsto G(2x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ car elle est la composée $G \circ h$ où :

× $h : x \mapsto 2x$ est :
  - de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$,
  - telle que $h(]0, +\infty[) \subset \,]0, +\infty[$.

× G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, } \Phi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[\text{ (donc dérivable sur }]0, +\infty[) \\ \text{en tant que différence de fonctions de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[.\end{array}}$$

- Soit $x \in \,]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
\Phi'(x) &= 2\,G'(2x) - G'(x) \ = \ 2\,\frac{1}{f(2x)} - \frac{1}{f(x)} \\
&= \frac{2}{2x - \ln(2x)} - \frac{1}{x - \ln(x)} \ = \ \frac{2(\cancel{x} - \ln(x)) - (\cancel{2x} - \ln(2x))}{(2x - \ln(2x))(x - \ln(x))} \\
&= \frac{-2\ln(x) + \ln(2) + \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))} \ = \ \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \,]0, +\infty[, \ \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}}$$

□

5. En déduire les variations de Φ sur $]0,+\infty[$.

Démonstration.

- Soit $x \in]0,+\infty[$. D'après la question précédente, on a :

$$\Phi'(x) = \frac{\ln(2)-\ln(x)}{(x-\ln(x))(2x-\ln(2x))} = \frac{\ln(2)-\ln(x)}{f(x)\,f(2x)}$$

Or, d'après la question ***1.*** : $f(x) > 0$ et $f(2x) > 0$.
La quantité $\Phi'(x)$ est donc du signe de $\ln(2)-\ln(x)$. Or :

$$\begin{aligned}\Phi'(x) > 0 \ &\Leftrightarrow\ \ln(2)-\ln(x) > 0 \ \Leftrightarrow\ \ln(2) > \ln(x) \\ &\Leftrightarrow\ 2 > x\end{aligned}$$

(car la fonction $\ln$ *est strictement croissante sur* $]0,+\infty[$*)*

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		2		$+\infty$
Signe de $\Phi'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de Φ		$\nearrow$	$\Phi(2)$	$\searrow$	

□

6. Montrer : $\forall x \in]0,+\infty[,\ 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x$.

Démonstration.
Soit $x \in]0,+\infty[$.

- D'après la question ***1.***, pour tout $t \in]0,x]$: $f(t) \geqslant 1$.
On en déduit, par décroissance de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$:

$$\forall t \in]0,x],\ 0 \leqslant \frac{1}{f(t)} \leqslant 1$$

- Par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ($x \leqslant 2x$ car $x \geqslant 0$) :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_x^{2x} 0\ dt & \leqslant & \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\ dt & \leqslant & \displaystyle\int_x^{2x} 1\ dt \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ 0 & & \Phi(x) & & (2x-x)\times 1 \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall x \in]0,+\infty[,\ 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x.}$$

Commentaire

- Le schéma de résolution de cette question est plutôt classique.
  Afin d'encadrer une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$:
  1) on cherche d'abord à encadrer l'intégrande, c'est-à- dire montrer :
  $$\forall t \in [a, b],\ m \leqslant f(t) \leqslant M$$
  où m et M sont deux réels à déterminer grâce à l'étude de la fonction f,
  2) on utilise ensuite la croissance de l'intégration (si les bornes a et b sont dans l'ordre croissant, c'est-à-dire $a \leqslant b$) pour conclure :
  $$m(b-a) = \int_a^b m\ dt \ \leqslant\ \int_a^b f(t)\ dt \ \leqslant\ \int_a^b M\ dt = M(b-a)$$
- La difficulté de la question vient du fait que l'on compare une quantité $\Phi(x)$ qui s'écrit comme une intégrale à la quantité x qui n'est pas naturellement donnée sous la forme d'une intégrale. Dès qu'il s'agit de démontrer une inégalité dans laquelle l'un des membres est une intégrale, il y a fort à parier qu'on puisse écrire l'autre membre sous forme intégrale (avec les mêmes bornes). On peut alors utiliser l'idée exposée dans le point précédent.
- L'idée à retenir est que pour comparer deux intégrales, on commence systématiquement par comparer les deux intégrandes.

□

7. a) Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.
On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

Démonstration.
D'après la question précédente : $\forall x \in \,]0, +\infty[,\ 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x$.
Or :

× $\lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$.
× $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$.

Donc, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{x\to 0} \Phi(x) = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } \Phi \text{ est prolongeable par continuité et que ce prolongement, toujours noté } \Phi, \text{ vérifie } \Phi(0) = 0.}$$

□

b) Montrer : $\lim\limits_{x\to 0} \Phi'(x) = 0$.
On admet que la fonction Φ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.

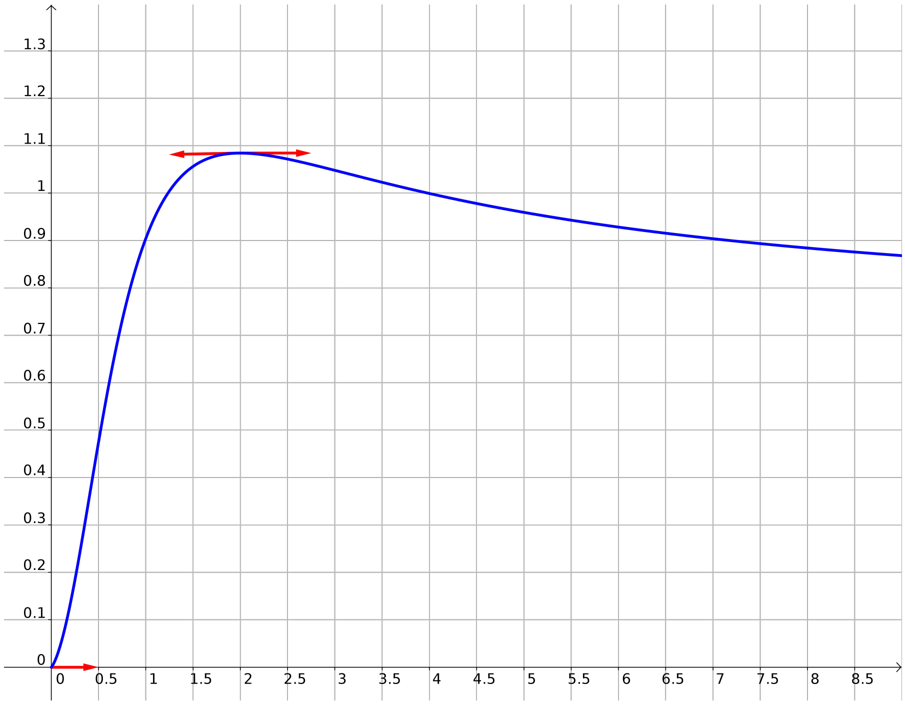
Démonstration.
D'après la question ***8.*** :
$$\forall x \in \,]0, +\infty[,\ \Phi'(x) = \frac{2}{f(2x)} - \frac{1}{f(x)}$$
Or, d'après la question ***1.*** : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.
Comme $\lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$, par composition, on a aussi : $\lim\limits_{x\to 0} f(2x) = +\infty$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{x\to 0} \Phi'(x) = 0.}$$

□

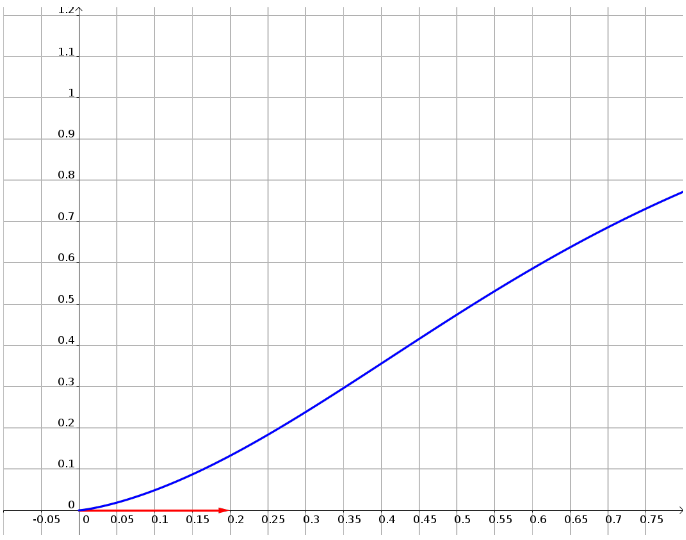
8. On donne $\Phi(2) \simeq 1,1$ et on admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = \ln(2) \simeq 0,7$.
Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

Démonstration.



Commentaire

Sur le graphe précédent, la tangente à l'origine ne semble pas être correcte.
En effet, comme son étymologie (le verbe latin « tangere ») l'indique, une tangente doit **toucher** la courbe, ce qui ne paraît pas être le cas ici. Cela est simplement dû à l'échelle de la figure : si on zoome sur l'origine du repère, on obtient le graphe suivant :



Sur une copie, il faut bien évidemment accentuer les tangentes à la courbe. $\square$

Problème (ESSEC 2001)

Le but du problème est l'étude du coefficient de corrélation linéaire de deux variables aléatoires qu'on aborde d'abord dans un cas particulier (**Partie I**), puis de façon générale (**Partie II**).

Partie I

1. Calculs préliminaires

a) On considère deux nombres entiers naturels q et n tels que $n \geqslant q$. En raisonnant par récurrence sur n, établir la formule suivante :

$$\sum_{k=q}^{n} \binom{k}{q} = \binom{n+1}{q+1}$$

Démonstration.

Montrons par récurrence : $\forall n \geqslant q,\ \mathcal{P}(n)$, où $\mathcal{P}(n)$: $\displaystyle\sum_{k=q}^{n} \binom{k}{q} = \binom{n+1}{q+1}$.

▸ **Initialisation** :

- D'une part : $\displaystyle\sum_{k=q}^{q} \binom{k}{q} = \binom{q}{q} = 1$.
- D'autre part : $\displaystyle\binom{q+1}{q+1} = 1$

D'où $\mathcal{P}(q)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \geqslant q$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$) et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ $\left(i.e.\ \displaystyle\sum_{k=q}^{n+1} \binom{k}{q} = \binom{n+2}{q+1}\right)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=q}^{n+1} \binom{k}{q} &= \left(\sum_{k=q}^{n} \binom{k}{q}\right) + \binom{n+1}{q} \\
&= \binom{n+1}{q+1} + \binom{n+1}{q} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \binom{n+2}{q+1} && \textit{(d'après la formule du triangle de Pascal)}
\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \geqslant q,\ \sum_{k=q}^{n} \binom{k}{q} = \binom{n+1}{q+1}.}$$

□

b) En faisant $q = 1, 2 , 3$, en déduire une expression factorisée des quatre sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} k \quad ; \quad \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2)$$

Démonstration.

- Si $q = 1$, on trouve, à l'aide de la formule précédente :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{1} = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{2!\ (n-1)!} = \frac{(n+1)\,n}{2}$$

$$\boxed{\text{Or } \binom{k}{1} = k. \text{ Donc } \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}}$$

- Si $q = 2$, on trouve, à l'aide de la formule précédente :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3} = \frac{(n+1)!}{3!\ (n-2)!} = \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{3 \times 2}$$

$$\boxed{\text{Or } \binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}. \text{ Donc : } \sum_{k=1}^{n} k(k-1) = 2 \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{2} = \frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{3}.}$$

- Si $q = 3$, on trouve, à l'aide de la formule précédente :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{3} = \binom{n+1}{4} = \frac{(n+1)!}{4!\ (n-3)!} = \frac{(n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)}{4 \times 3 \times 2}$$

$$\boxed{\text{Or } \binom{k}{3} = \frac{k(k-1)(k-2)}{3 \times 2}. \text{ Donc : } \sum_{k=1}^{n} k(k-1)(k-2) = \frac{(n-2)\,(n-1)\,n\,(n+1)}{4}.}$$

□

On considère dans toute la suite de cette partie un nombre entier $n \geqslant 2$ et une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n.
On extrait de cette urne successivement et sans remise 2 jetons et on désigne alors par :

- N_1 la variable aléatoire indiquant le numéro du premier jeton tiré,
- N_2 la variable aléatoire indiquant le numéro du second jeton tiré,
- X la variable aléatoire indiquant le plus petit des numéros des 2 jetons tirés,
- Y la variable aléatoire indiquant le plus grand des numéros des 2 jetons tirés.

On note $\mathbb{E}(N_1)$ et $\mathbb{V}(N_1)$, $\mathbb{E}(N_2)$ et $\mathbb{V}(N_2)$, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$ les espérances et variances des quatre variables aléatoires N_1, N_2, X, Y.

Commentaire

- Si on confond jeton et numéro associé, alors l'ensemble des jetons est l'ensemble $[\![1, n]\!]$. Dans ce cas, l'ensemble Ω des résultats possibles de l'expérience est l'ensemble des 2-uplets (c'est-à-dire des couples) d'éléments distincts de $[\![1, n]\!]$.
- Comme Ω est un ensemble fini, on choisit $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
- Enfin, on munit $(\Omega, \mathscr{A})$ de la probabilité uniforme notée $\mathbb{P}$.

2. **Lois conjointe et marginales des variables aléatoires N_1 et N_2.**

a) Déterminer les probabilités $\mathbb{P}([N_1 = i])$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, et $\mathbb{P}_{[N_1=i]}([N_2 = j])$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$, $j \neq i$.
En déduire : $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}([N_2 = j]) = \dfrac{1}{n}$. Puis comparer les lois de N_1 et N_2.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :
  - × La première partie de l'expérience (premier tirage) consiste en un choix effectué de manière équiprobable parmi n issues (en l'occurrence les jetons de l'urne) numérotés de 1 à n.
  - × La v.a.r. N_1 prend la valeur du numéro obtenu lors de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en déduit : } N_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!]).}$$

- Soit $i \in [\![1,n]\!]$ et soit $j \in [\![1,n]\!]$ tel que $j \neq i$.
  Si l'événement $[N_1 = i]$ est réalisé, c'est que le premier tirage a fourni le jeton numéro i. Dans ce cas, l'événement $[N_2 = j]$ est réalisé si et seulement si le deuxième tirage, qui s'effectue dans l'urne initiale privée du jeton i, a fourni le jeton numéro j.
  Les jetons étant tirés de manière équiprobable, on en conclut : $\mathbb{P}_{[N_1=i]}\big([N_2 = j]\big) = \dfrac{1}{n-1}$.

$$\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!],\ \forall j \in [\![1,n]\!],\ i \neq j \ \Rightarrow\ \mathbb{P}_{[N_1=i]}\big([N_2 = j]\big) = \frac{1}{n-1}}$$

Commentaire

On a évidemment : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}_{[N_1=i]}\big([N_2 = i]\big) = 0$. En effet, si le jeton numéro i est tiré lors du premier tirage, il ne peut l'être lors du second.

- Soit $j \in [\![1,n]\!]$.
  La famille $\big([N_1 = i]\big)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements.
  D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big([N_2 = j]\big) \\
= \ & \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big([N_1 = i] \cap [N_2 = j]\big) \\
= \ & \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big([N_1 = i]\big) \times \mathbb{P}_{[N_1=i]}\big([N_2 = j]\big) && \textit{(car : } \forall i \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}\big([N_1 = i]\big) \neq 0\textit{)} \\
= \ & \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \mathbb{P}([N_1 = i]) \times \mathbb{P}_{[N_1=i]}([N_2 = j]) \ + \sum_{\substack{i=1 \\ i= j}}^{n} \mathbb{P}([N_1 = i]) \times \mathbb{P}_{[N_1=i]}([N_2 = j]) \\
= \ & \Big(\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \frac{1}{n}\ \frac{1}{n-1}\Big) + \cancel{\mathbb{P}\big([N_1 = j]\big) \times \mathbb{P}_{[N_1=j]}\big([N_2 = j]\big)} && \textit{(car } \mathbb{P}_{[N_1=j]}\big([N_2 = j]\big) = 0\textit{)} \\
= \ & (n-1)\ \frac{1}{n}\ \frac{1}{n-1} \ = \ \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall j \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}\big([N_2 = j]\big) = \frac{1}{n}}$$

Commentaire

- Même si ce n'était pas l'esprit du sujet (comme le démontre le « en déduire »), il était possible de proposer une démonstration par dénombrement de cette question. Détaillons le procédé ci-dessous.
- Soit $j \in [\![1,n]\!]$.
  Un 2-tirage réalisant l'événement $[N_2 = j]$ est un couple d'entiers distincts dont le deuxième élément est j. Un tel 2-tirage est entièrement déterminé par :
  – le premier numéro de ce couple (c'est un numéro de $[\![1,n]\!]$ qui n'est pas j) : $\binom{n-1}{1} = n-1$ possibilités.
  – le deuxième numéro de ce couple (c'est j) : 1 possibilité.

  Il y a donc $n-1$ tels 2-tirages. Ainsi :

$$\mathbb{P}\big([N_2 = j]\big) = \frac{\text{Card}\big([N_2 = j]\big)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\cancel{n-1}}{n\,\cancel{(n-1)}} = \frac{1}{n}$$

- Remarquons enfin :
  × $N_1\big(\Omega\big) = [\![1, n]\!]$.
  En effet, le 1er tirage peut fournir n'importe quel numéro de jeton de $[\![1, n]\!]$.
  × $N_2\big(\Omega\big) = [\![1, n]\!]$.
  En effet, le 2nd tirage fournit forcément un numéro de jeton (ainsi $N_2(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$) et :
  – le 2-tirage $(2, 1)$ réalise l'événement $[N_2 = 1]$,
  – le 2-tirage $(1, 2)$ réalise l'événement $[N_2 = 2]$,
  – le 2-tirage $(1, 3)$ réalise l'événement $[N_2 = 3]$,
  – ...
  – le 2-tirage $(1, n)$ réalise l'événement $[N_2 = n]$.

  Les v.a.r. N_1 et N_2 ont même ensemble image ($N_1(\Omega) = [\![1, n]\!] = N_2(\Omega)$) et sont telles que :

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}([N_1 = j]) = \frac{1}{n} = \mathbb{P}([N_2 = j])$$

$$\boxed{N_1 \text{ et } N_2 \text{ suivent toutes les deux la loi uniforme sur } [\![1, n]\!].}$$

Commentaire

- C'est toujours un bon réflexe de déterminer les ensembles images des v.a.r. considérés car cela permet de guider la rédaction. En particulier, il est important de savoir si l'on travaille sur des v.a.r. finies (de telles v.a.r. admettent des moments à tous les ordres) ou des v.a.r. non finies (dans ce cas, on devra systématiquement démontrer l'existence des moments). D'autre part :
  × l'ensemble image peut permettre de conclure quant à la loi d'une v.a.r. X.
  En effet si $X\big(\Omega\big) = \{0, 1\}$ alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ où $p = \mathbb{P}\big(\,[X = 1]\,\big)$.
  × l'ensemble image peut permettre d'écarter des possibilités de lois pour X.
  Par exemple, si X est une v.a.r. finie alors X ne peut pas suivre une loi géométrique ou une loi de Poisson.
- C'est pourquoi on a précisé dans cette question les ensembles image $N_1\big(\Omega\big)$ et $N_2\big(\Omega\big)$. En réalité, cette précaution n'est pas nécessaire pour répondre à la question posée.
  En effet, si X et Y sont deux v.a.r. **discrètes**, alors :

$$X \text{ et } Y \text{ ont même loi} \ \Leftrightarrow\ \forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}\big(\,[X = x]\,\big) = \mathbb{P}\big(\,[Y = x]\,\big)$$

  (en particulier, ces probabilités sont nulles si x n'appartient pas aux ensembles image des v.a.r. considérées)
- On insiste sur le fait que la propriété précédente n'est vérifiée que pour les v.a.r. discrètes. Rappelons au passage que si X est une v.a.r. à densité alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathbb{P}\big(\,[X = x]\,\big) = 0$. Ainsi, si X et Y sont deux v.a.r. à densité on a toujours :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}\big(\,[X = x]\,\big) = 0 = \mathbb{P}\big(\,[Y = x]\,\big)$$

  mais cela n'apporte pas d'information sur les lois de X et de Y.
- Notons enfin qu'à une question du type « comparer les lois des v.a.r. N_1 et N_2 », la seule réponse possible est que les v.a.r. N_1 et N_2 ont même loi. C'est donc dans ce sens qu'il faudra traiter la question. □

b) Calculer les espérances $\mathbb{E}(N_1)$ et $\mathbb{E}(N_2)$, les variances $\mathbb{V}(N_1)$ et $\mathbb{V}(N_2)$.

Démonstration.
D'après la question précédente, N_1 et N_2 suivent toutes les deux la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{E}(N_1) = \frac{n+1}{2} = \mathbb{E}(N_2) \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(N_1) = \frac{n^2-1}{12} = \mathbb{V}(N_2).}$$

Commentaire

Remarquons que les v.a.r. N_1 et N_2 suivent la même loi.

- Leurs **moments** sont donc égaux. En effet, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{E}(N_1^r) \ = \ \sum_{k=1}^{n} k^r \ \mathbb{P}([N_1 = k]) \ = \ \sum_{k=1}^{n} k^r \ \mathbb{P}([N_2 = k]) \ = \ \mathbb{E}(N_2^r)$$

(les v.a.r. N_1 et N_2 admettent des moments à tout ordre car ce sont des v.a.r. finies)

- On prendra garde à ne pas commettre l'erreur grossière d'en conclure que les **v.a.r.** N_1 et N_2 sont égales. En effet, pour le 2-tirage $\omega = (2, 1)$:

$$N_1(\omega) = 2 \ \neq \ 1 = N_2(\omega)$$

Il existe donc $\omega \in \Omega$ tel que : $N_1(\omega) \neq N_2(\omega)$. Ainsi, les v.a.r. N_1 et N_2 sont distinctes. □

c) Montrer, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$:

$$\mathbb{P}([N_1 = i] \cap [N_2 = j]) = \begin{cases} \dfrac{1}{n(n-1)} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et en déduire :

$$\mathbb{E}(N_1\, N_2) \ = \ \frac{(n+1)(3n+2)}{12}$$

En déduire la covariance et le coefficient de corrélation linéaire de N_1 et N_2.

Démonstration.
Soient $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, n]\!]$. Remarquons tout d'abord :

$$\begin{array}{cl} & \text{L'événément } [N_1 = i] \cap [N_2 = j] \text{ est réalisé} \\ \Leftrightarrow & \text{L'événément } [N_1 = i] \text{ est réalisé} \quad \text{et} \quad \text{l'événement } [N_2 = j] \text{ est réalisé} \\ \Leftrightarrow & \text{On obtient le jeton } i \text{ au } 1^{\text{er}} \text{ tirage} \quad \text{et} \quad \text{on obtient le jeton } j \text{ au } 2^{\text{nd}} \text{ tirage} \end{array}$$

Deux cas se présentent alors :

- si $i = j$, alors :

$$[N_1 = i] \cap [N_2 = j] = \varnothing$$

En effet, on ne peut pas tirer le jeton j lors du second tirage s'il l'a déja été lors du premier.
Ainsi : $\mathbb{P}([N_1 = i] \cap [N_2 = j]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

- si $i \neq j$, alors d'après ***2.a)*** :

$$\mathbb{P}([N_1 = i] \cap [N_2 = j]) = \mathbb{P}([N_1 = i])\ \mathbb{P}_{[N_1=i]}([N_2 = j]) = \frac{1}{n}\ \frac{1}{n-1}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } 1 \leqslant i \leqslant n \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant n : \mathbb{P}([N_1 = i] \cap [N_2 = j]) = \begin{cases} \dfrac{1}{n(n-1)} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}}$$

- Les v.a.r. N_1 et N_2 admettent un moment d'ordre 2 car ce sont des v.a.r. finies.
On en déduit que le produit $N_1\,N_2$ admet une espérance.

Commentaire

- Dans le cas général :

$$\left.\begin{array}{l} \times\ X \text{ admet un moment d'ordre 2} \\ \times\ Y \text{ admet un moment d'ordre 2} \end{array}\right\} \Rightarrow\ X\,Y \text{ admet une espérance}$$

- On rappelle le cas particulier où X et Y sont indépendantes :

$$\left.\begin{array}{l} \times\ X \text{ admet une espérance} \\ \times\ Y \text{ admet une espérance} \\ \times\ X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \end{array}\right\} \Rightarrow\ X\,Y \text{ admet une espérance}$$

- D'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N_1N_2) &= \sum_{i\in N_1(\Omega)} \left(\sum_{j\in N_2(\Omega)} i \times j\ \mathbb{P}([N_1 = i] \cap [N_2 = j]) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} i \times j\ \mathbb{P}([N_1 = i] \cap [N_2 = j]) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} i \left(\sum_{j=1}^{n} j\ \mathbb{P}([N_1 = i] \cap [N_2 = j]) \right) \end{aligned}$$

Or, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{n} j \, \mathbb{P}\big([N_1 = i] \cap [N_2 = j] \big) \\
= \ & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} j \, \mathbb{P}([N_1 = i] \cap [N_2 = j]) \ + \ \sum_{\substack{j=1 \\ j = i}}^{n} j \, \mathbb{P}([N_1 = i] \cap [N_2 = j]) \\
= \ & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} j \, \mathbb{P}([N_1 = i] \cap [N_2 = j]) \ + \ i \, \cancel{\mathbb{P}([N_1 = i] \cap [N_2 = i])} \\
= \ & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} j \, \frac{1}{n(n-1)} \\
= \ & \frac{1}{n(n-1)} \Big(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} j \Big) \\
= \ & \frac{1}{n(n-1)} \left(\Big(\sum_{j=1}^{n} j \Big) \ - \ i \right) \\
= \ & \frac{1}{n(n-1)} \left(\frac{n \, (n+1)}{2} \ - \ i \right)
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N_1 \, N_2) \ &= \ \sum_{i=1}^{n} i \left(\frac{1}{n(n-1)} \left(\frac{n \, (n+1)}{2} \ - \ i \right) \right) \\
&= \ \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} i \left(\frac{n \, (n+1)}{2} \ - \ i \right) \\
&= \ \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \frac{n \, (n+1)}{2} \, i \ - \ \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= \ \frac{1}{\cancel{n}(n-1)} \frac{\cancel{n} \, (n+1)}{2} \sum_{i=1}^{n} i \ - \ \frac{1}{\cancel{n}(n-1)} \frac{\cancel{n} \, (n+1) \, (2n+1)}{6} \\
&= \ \frac{1}{n-1} \frac{n+1}{2} \frac{n(n+1)}{2} \ - \ \frac{1}{n-1} \frac{(n+1) \, (2n+1)}{6} \\
&= \ \frac{1}{24} \frac{n+1}{n-1} \, (6 \, n \, (n+1) - 4 \, (2n+1)) \\
&= \ \frac{1}{24} \frac{n+1}{n-1} \, \big(6 \, n^2 - 2n - 4\big) \\
&= \ \frac{1}{12} \frac{n+1}{n-1} \, \big(3 \, n^2 - n - 2\big) \\
&= \ \frac{1}{12} \frac{n+1}{\cancel{n-1}} \, (3n+2) \, \cancel{(n-1)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(N_1 N_2) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}}$$

- D'après le théorème de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(N_1, N_2) &= \mathbb{E}(N_1 N_2) - \mathbb{E}(N_1)\ \mathbb{E}(N_2) \\ &= \frac{(n+1)(3n+2)}{12} - \frac{n+1}{2}\ \frac{n+1}{2} \\ &= \frac{(n+1)}{12}\ \big(3n+2-3(n+1)\big) \\ &= -\frac{n+1}{12}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{Cov}(N_1, N_2) = -\frac{n+1}{12}}$$

- Enfin, par définition :

$$\begin{aligned}\rho(N_1, N_2) &= \frac{\mathrm{Cov}(N_1, N_2)}{\sqrt{\mathbb{V}(N_1)\mathbb{V}(N_2)}} \\ &= \frac{-\frac{n+1}{12}}{\sqrt{\left(\frac{n^2-1}{12}\right)^2}} \\ &= \frac{-\frac{n+1}{12}}{\left|\frac{n^2-1}{12}\right|} \\ &= -\frac{n+1}{12}\,\frac{12}{n^2-1} \\ &= -\frac{\cancel{n+1}}{12}\,\frac{12}{(n-1)\ \cancel{(n+1)}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\rho(N_1, N_2) = -\frac{1}{n-1}}$$

□

d) Exprimer enfin sous forme factorisée la variance $\mathbb{V}(N_1 + N_2)$.

Démonstration.

- La v.a.r. $N_1 + N_2$ admet une variance en tant que somme de v.a.r. qui en admettent une.
- De plus :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(N_1 + N_2) &= \mathbb{V}(N_1) + 2\,\mathrm{Cov}(N_1, N_2) + \mathbb{V}(N_2) \\ &= 2\,\frac{n^2-1}{12} - 2\,\frac{n+1}{12} \\ &= \frac{(n+1)(n-1)}{6} - \frac{n+1}{6} \\ &= \frac{n+1}{6}(n-1-1)\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(N_1 + N_2) = \frac{(n+1)(n-2)}{6}}$$

□

3. **Lois conjointe, marginales et conditionnelles des variables aléatoires X et Y**

a) Montrer, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $1 \leqslant i < j \leqslant n$: $\mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) = \dfrac{2}{n(n-1)}$.
Que valent ces probabilités sinon ?

Démonstration.
Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Remarquons tout d'abord :

$$\begin{array}{cl} & \text{L'événément } [X=i] \cap [Y=j] \text{ est réalisé} \\ \Leftrightarrow & \text{L'événément } [X=i] \text{ est réalisé} \quad \text{et} \quad \text{l'événement } [Y=j] \text{ est réalisé} \\ \Leftrightarrow & \text{Le plus petit numéro des 2 jetons est } i \quad \text{et} \quad \text{le plus grand numéro des 2 jetons est } j \\ \Leftrightarrow & \begin{array}{rl} & \text{Le jeton } i \text{ est obtenu au } 1^{\text{er}} \text{ tirage et le jeton } j \text{ est obtenu au } 2^{\text{nd}} \\ \text{ou} & \text{le jeton } j \text{ est obtenu au } 1^{\text{er}} \text{ tirage et le jeton } i \text{ est obtenu au } 2^{\text{nd}} \end{array} \quad (*) \end{array}$$

Deux cas se présentent alors.

- Si $i \geqslant j$, alors :
$$[X=i] \cap [Y=j] = \varnothing$$
En effet, le plus petit jeton tiré ne peut être :
  - × strictement plus grand que le plus grand jeton tiré,
  - × égal au plus grand jeton tiré puisque les tirages ont lieu sans remise.

  Ainsi : $\mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
- Si $i < j$, alors d'après $(*)$:
$$[X=i] \cap [Y=j] \ = \ \big([N_1=i] \cap [N_2=j] \big) \cup \big([N_1=j] \cap [N_2=i] \big)$$
Les deux événements composant cette union sont incompatibles. On en déduit :
$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) & = & \mathbb{P}([N_1=i] \cap [N_2=j]) + \mathbb{P}([N_1=j] \cap [N_2=i]) & \\ & = & \dfrac{1}{n(n-1)} + \dfrac{1}{n(n-1)} & \textit{(d'après } \textbf{2.c)}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement } \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n \\ \dfrac{2}{n(n-1)} & \text{si } 1 \leqslant i < j \leqslant n \end{cases}}$$

Commentaire

- Il était possible de proposer une démonstration par dénombrement de cette question dans le cas $i > j$. Détaillons le procédé ci-dessous.
- Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i < j$.
Un 2-tirage réalisant l'événement $[X=i] \cap [Y=j]$ est un couple d'entiers distincts dont le plus petit élément est i et le plus grand élément est j. Un tel 2-tirage est entièrement déterminé par :
  - la position du plus petit élément de ce couple ($1^{\text{ère}}$ ou $2^{\text{ème}}$ coordonnée du couple) : 2 possibilités.
  - la position du plus grand élément de ce couple : 1 possibilité restante.

  Il y a donc 2 tels 2-tirages ((i,j) et (j,i)). Ainsi :
$$\mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) \ = \ \frac{\text{Card}([X=i] \cap [Y=j])}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{2}{n\,(n-1)}$$

□

b) En déduire les probabilités $\mathbb{P}([Y = j])$ pour $2 \leqslant j \leqslant n$ et $\mathbb{P}([X = i])$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$.
(on vérifiera que les formules donnant $\mathbb{P}([Y = j])$ et $\mathbb{P}([X = i])$ restent valables si $j = 1$ ou $i = n$)

Démonstration.

- Déterminons la loi de Y.

  × Tout d'abord : $Y(\Omega) = [\![2, n]\!]$.
  En effet, $Y(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$ (car Y prend la valeur d'un numéro de jeton) et :
  - le 2-tirage $(1, 2)$ réalise l'événement $[Y = 2]$,
  - le 2-tirage $(1, 3)$ réalise l'événement $[Y = 3]$,
  - $\cdots$
  - le 2-tirage $(1, n)$ réalise l'événement $[Y = n]$.
  - l'événement $[Y = 1]$ n'est jamais réalisé.
    En effet, l'événement $[Y = 1]$ est réalisé si et seulement si le plus grand numéro des jetons tirés est 1. Dans ce cas, comme les tirages s'effectuent sans remise, l'autre jeton porte donc un numéro strictement plus petit que 1, ce qui est impossible.

  × Soit $j \in [\![2, n]\!]$.
  La famille $([X = i])_{i \in [\![1, n-1]\!]}$ forme un système complet d'événements.
  Par formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([Y = j]) & = & \sum\limits_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) & \\
& = & \sum\limits_{\substack{i = 1 \\ i < j}}^{n-1} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) + \cancel{\sum\limits_{\substack{j = 1 \\ i \geqslant j}}^{n-1} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])} & \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{j-1} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) & \textit{(d'après la question précédente)} \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{j-1} \dfrac{2}{n(n-1)} & \textit{(toujours d'après la question précédente)} \\
& = & 2\, \dfrac{j-1}{n(n-1)} &
\end{array}$$

$$\boxed{Y(\Omega) = [\![2, n]\!] \text{ et : } \forall j \in [\![2, n]\!],\ \mathbb{P}([Y = j]) = 2\, \dfrac{j-1}{n(n-1)}.}$$

  × Dans le cas où $j = 1$:
  - d'une part : $[Y = 1] = \varnothing$ (comme expliqué plus haut). D'où : $\mathbb{P}([Y = 1]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
  - d'autre part : $2\, \dfrac{1-1}{n(n-1)} = 0$.

$$\boxed{\text{La formule obtenue reste valable dans le cas où } j = 1.}$$

Commentaire

On pouvait aussi remarquer que le découpage de la somme dans la deuxième égalité est aussi valable pour $j = 1$. En effet, dans ce cas, la deuxième somme est nulle car on somme sur un ensemble vide d'indices.

- Déteminons la loi de X.

  $\times$ Tout d'abord : $X(\Omega) = [\![1, n-1]\!]$.
  En effet, $X(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$ (car X prend la valeur d'un numéro de jeton) et :
  - le 2-tirage $(1, n)$ réalise l'événement $[X = 1]$,
  - le 2-tirage $(2, n)$ réalise l'événement $[X = 2]$,
  - $\cdots$
  - le 2-tirage $(n-1, n)$ réalise l'événement $[X = n-1]$.
  - l'événement $[X = n]$ n'est jamais réalisé.
    En effet, l'événement $[X = n]$ est réalisé si et seulement si le plus petit numéro des jetons tirés est n. Dans ce cas, comme les tirages s'effectuent sans remise, l'autre jeton porte donc un numéro strictement plus grand que n, ce qui est impossible.

  $\times$ Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$.
  La famille $([Y = j])_{j \in [\![2,n]\!]}$ forme un système complet d'événements.
  Par formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([X = i]) & = & \sum\limits_{j=2}^{n} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) & \\
& = & \sum\limits_{\substack{j=2 \\ j>i}}^{n} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) + \cancel{\sum\limits_{\substack{j=2 \\ j \leqslant i}}^{n} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])} & \\
& = & \sum\limits_{j=i+1}^{n} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) & \textit{(d'après la question précédente)} \\
& = & \sum\limits_{j=i+1}^{n} \dfrac{2}{n(n-1)} & \textit{(toujours d'après la question précédente)} \\
& = & 2 \, \dfrac{\big(n - (i+1) + 1\big)}{n(n-1)} &
\end{array}$$

$$\boxed{X(\Omega) = [\![1, n-1]\!] \text{ et : } \forall i \in [\![1, n-1]\!],\ \mathbb{P}([X = i]) = 2 \, \dfrac{n-i}{n(n-1)}}$$

  $\times$ Dans le cas où $i = n$:
  - d'une part : $[X = n] = \varnothing$ (comme expliqué plus haut). D'où : $\mathbb{P}([X = n]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
  - d'autre part : $2 \, \dfrac{n-n}{n(n-1)} = 0$.

$$\boxed{\text{La formule obtenue reste valable dans le cas où } i = n.}$$

Commentaire

On pouvait aussi remarquer que le découpage de la somme dans la deuxième égalité est aussi valable pour $i = n$. En effet, dans ce cas, la deuxième somme est nulle car on somme sur un ensemble vide d'indices.

□

c) Déterminer les probabilités $\mathbb{P}_{[Y=j]}([X = i])$ et $\mathbb{P}_{[X=i]}([Y = j])$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$, puis reconnaître la loi de X conditionnellement à $[Y = j]$ et la loi de Y conditionnellement à $[X = i]$.

Démonstration.

- Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que : $1 \leqslant i < j \leqslant n$.
  - Tout d'abord : $\mathbb{P}([Y = j]) \neq 0$. Ainsi $\mathbb{P}_{[Y=j]}([X = i])$ est bien définie.
  - De plus, par définition de la probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}_{[Y=j]}([X = i]) \;=\; \frac{\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])}{\mathbb{P}([Y = j])} \;=\; \frac{\frac{2}{n(n-1)}}{\frac{2(j-1)}{n(n-1)}} \;=\; \frac{\cancel{2}}{\cancel{n(n-1)}} \times \frac{\cancel{n(n-1)}}{\cancel{2}\,(j-1)} = \frac{1}{j-1}$$

$$\boxed{\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \text{ tel que } i < j : \mathbb{P}_{[Y=j]}([X = i]) = \frac{1}{j-1}}$$

- Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que : $1 \leqslant i < j \leqslant n$.
  - Tout d'abord : $\mathbb{P}([X = i]) \neq 0$. Ainsi $\mathbb{P}_{[X=i]}([Y = j])$ est bien définie.
  - De plus, par définition de la probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}_{[X=i]}([Y = j]) \;=\; \frac{\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])}{\mathbb{P}([X = i])} \;=\; \frac{\frac{2}{n(n-1)}}{\frac{2(n-i)}{n(n-1)}} \;=\; \frac{\cancel{2}}{\cancel{n(n-1)}} \times \frac{\cancel{n(n-1)}}{\cancel{2}\,(n-i)} = \frac{1}{n-i}$$

$$\boxed{\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \text{ tel que } i < j : \mathbb{P}_{[X=i]}([Y = j]) = \frac{1}{n-i}}$$

- Soit $j \in Y(\Omega) = [\![2, n]\!]$.
  Déterminons maintenant la loi de X conditionnellement à l'événement $[Y = j]$.
  - D'après la question ***3.b)*** : $X(\Omega) = [\![1, n-1]\!]$.
  - Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$. Deux cas se présentent :
    - si $i < j$, alors d'après ce qui précède :

$$\mathbb{P}_{[Y=j]}([X = i]) \;=\; \frac{1}{j-1}$$

    - si $i \geqslant j$, alors d'après ***3.a)*** :

$$\mathbb{P}_{[Y=j]}([X = i]) \;=\; \frac{\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])}{\mathbb{P}([Y = j])} \;=\; \frac{0}{\mathbb{P}([Y = j])} \;=\; 0$$

  En résumé :

$$\mathbb{P}_{[Y=j]}\big([X = i]\big) \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{j-1} & \text{si } i \in [\![1, j-1]\!] \\ 0 & \text{si } i \geqslant j \end{cases}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la loi de } X \text{ conditionnellement à l'événement } [Y = j] \text{ est la loi } \mathcal{U}([\![1, j-1]\!]).}$$

- Soit $i \in X(\Omega) = [\![1, n-1]\!]$.
  Déterminons la loi de Y conditionnellement à l'événement $[X = i]$.
  × D'après la question ***3.b)*** : $Y(\Omega) = [\![2, n]\!]$.
  × Soit $j \in [\![2, n]\!]$. Deux cas se présentent :
    - si $j > i$, alors d'après ce qui précède :
$$\mathbb{P}_{[X=i]}([Y = j]) \;=\; \frac{1}{n-i}$$
    - si $j \leqslant i$, alors d'après ***3.a)*** :
$$\mathbb{P}_{[X=i]}([Y = j]) \;=\; \frac{\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])}{\mathbb{P}([X = i])} \;=\; \frac{0}{\mathbb{P}([X = i])} \;=\; 0$$

  En résumé :
$$\mathbb{P}_{[X=i]}\big([Y = j]\big) \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{n-i} & \text{si } j \in [\![i+1, n]\!] \\ 0 & \text{si } j \leqslant i \end{cases}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la loi de } Y \text{ conditionnellement à l'événement } [X = i] \text{ est la loi } \mathcal{U}([\![i+1, n]\!]).}$$
□

d) Comparer les lois des variables aléatoires $n + 1 - X$ et Y.
En déduire que $\mathbb{E}(n + 1 - X) = \mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(n + 1 - X) = \mathbb{V}(Y)$, puis en déduire les expressions de $\mathbb{E}(X)$ en fonction de $\mathbb{E}(Y)$ et de $\mathbb{V}(X)$ en fonction de $\mathbb{V}(Y)$.

Démonstration.

- Commençons par déterminer $(n + 1 - X)(\Omega)$.
  Notons $h : x \mapsto n + 1 - x$, de telle sorte que : $n + 1 - X = h(X)$.
  On rappelle : $X(\Omega) = [\![1, n-1]\!]$. On en déduit :
$$(n+1-X)(\Omega) \;=\; \big(h(X)\big)(\Omega) \;=\; h\big(X(\Omega)\big) \;=\; h([\![1, n-1]\!]) \;\subset\; [\![1, n-1]\!]$$
  En effet, soit $k \in [\![1, n-1]\!]$:
  × $h(k) = n + 1 - k \in \mathbb{Z}$,
  × de plus :
$$\begin{array}{ll} \text{comme} & 1 \leqslant k \leqslant n-1 \\ \text{alors} & -1 \geqslant -k \geqslant -n+1 \\ \text{donc} & n \geqslant (n+1) - k \geqslant 2 \\ \text{d'où} & n \geqslant h(k) \geqslant 2 \end{array}$$
$$\boxed{\text{Et ainsi : } (n+1-X)(\Omega) \subset [\![2, n]\!].}$$

Commentaire

On a affaire ici à une transformée affine de la v.a.r. X. La fonction h est donc particulièrement simple. De ce fait, il est possible de déterminer $(n + 1 - X)(\Omega)$ en faisant agir, étape par étape, h sur $X(\Omega)$. Plus précisément :
$$\begin{array}{ll} \text{Comme} & X(\Omega) = [\![1, n-1]\!] \\ \text{alors} & (-X)(\Omega) = [\![-n+1, -1]\!] \\ \text{donc} & (n+1-X)(\Omega) = [\![2, n]\!] \end{array}$$

- Soit $j \in [\![2, n]\!]$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big([n+1-X=j]\big) & = & \mathbb{P}\big([-X=-n-1+j]\big) & \\ & = & \mathbb{P}\big([X=n+1-j]\big) & \\ & = & 2\,\dfrac{n-(n+1-j)}{n(n-1)} & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{3.b)}} \textit{ et car } n+1-j \in [\![1, n-1]\!]) \\ & = & 2\,\dfrac{j-1}{n(n-1)} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall j \in [\![2, n]\!],\ \mathbb{P}\big([n+1-X=j]\big) = 2\,\dfrac{j-1}{n(n-1)} = \mathbb{P}\big([Y=j]\big).}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } Y \text{ et } n+1-X \text{ ont la même loi.}}$$

Commentaire

- Ce résultat n'est pas surprenant. Encore une fois, la question « comparer le lois de deux v.a.r. » n'attend qu'une seule réponse, à savoir que ces deux v.a.r. suivent la même loi.
- On rappelle aussi que cela ne signifie en aucun cas que les v.a.r. Y et $n+1-X$ sont égales. Ce n'est pas le cas. Pour le 2-tirage $\omega = (2, 1)$, on a $X(\omega) = 1$ et $Y(\omega) = 2$ et donc :
$$Y(\omega) = 2 \neq n = n+1-X(\omega) = (n+1-X)(\omega)$$

- Les v.a.r. $n+1-X$ et Y admettent des moments à tous les ordres car elles sont finies. En particulier, elles admettent une espérance et une variance.

$$\boxed{\text{Comme } N+1-X \text{ et } Y \text{ ont même loi, on a : } \mathbb{E}(n+1-X) = \mathbb{E}(Y) \text{ et } \mathbb{V}(n+1-X) = \mathbb{V}(Y).}$$

- De plus :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(Y) & = & \mathbb{E}(n+1-X) & \\ & = & \mathbb{E}(n+1) - \mathbb{E}(X) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ & = & n+1-\mathbb{E}(X) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{D'où : } \mathbb{E}(X) = n+1-\mathbb{E}(Y).}$$

- Enfin :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{V}(Y) & = & \mathbb{V}(n+1-X) & \\ & = & (-1)^2\ \mathbb{V}(X) & \textit{(par propriété de la variance)} \\ & = & \mathbb{V}(X) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y).}$$

Commentaire

Il convient de rappeler que l'opérateur variance n'est en aucun cas linéaire. Il ne faut donc surtout pas écrire l'égalité suivante :

$$\mathbb{V}(n+1-X) \cancel{=} \mathbb{V}(n+1) - \mathbb{V}(X)$$

□

4. **Espérances et variances des variables aléatoires X et Y**

a) Exprimer les espérances $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(X)$ en fonction de n.

Démonstration.
Par définition de l'espérance :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{j \in Y(\Omega)} j \ \mathbb{P}([Y=j]) \\
&= \sum_{j=1}^{n} j \ \frac{2(j-1)}{n(n-1)} \\
&= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=1}^{n} j(j-1) \\
&= \frac{2}{n\cancel{(n-1)}} \ \frac{\cancel{(n-1)}\, n\, (n+1)}{3} && \textit{(d'après les formules du début d'énoncé)} \\
&= \frac{2}{3}\,(n+1)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } \mathbb{E}(Y) = \frac{2\,(n+1)}{3} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X) = n+1-\frac{2\,(n+1)}{3} = \frac{n+1}{3}.}$$

□

b) Exprimer sous forme factorisée $\mathbb{E}\big(Y(Y-2)\big)$, puis $\mathbb{E}\left(Y^2\right)$, $\mathbb{V}(Y)$ et $\mathbb{V}(X)$ en fonction de n.

Démonstration.

- Les v.a.r. Y^2 et $Y(Y-2)$ sont des v.a.r. finies comme produits de deux v.a.r. finies. Elles admettent donc des moments à tous les ordres.
- Par le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(Y(Y-2)\big) &= \sum_{j \in Y(\Omega)} j(j-2) \ \mathbb{P}([Y=j]) && \textit{(par théorème de transfert)} \\
&= \sum_{1}^{n} j(j-2) \ \frac{2(j-1)}{n(n-1)} \\
&= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=1}^{n} j(j-1)(j-2) \\
&= \frac{2}{n\cancel{(n-1)}} \ \frac{(n+1)\, n\, \cancel{(n-1)}\, (n-2)}{4} && \textit{(d'après les formules du début d'énoncé)} \\
&= \frac{(n+1)(n-2)}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y(Y-2)) = \frac{(n+1)(n-2)}{2}}$$

- Comme $Y = Y(Y-2) + 2Y$, on a : :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y^2) &= \mathbb{E}\big(Y(Y-2)+2Y\big) \\
&= \mathbb{E}\big(Y(Y-2)\big) + 2\,\mathbb{E}(Y) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
&= \frac{(n+1)(n-2)}{2} + \frac{4}{3}\,(n+1) \\
&= \frac{n+1}{6}\,(3(n-2)+8) \\
&= \frac{n+1}{6}\,(3n-6+8) \\
&= \frac{(n+1)(3n+2)}{6}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y^2) = \frac{(n+1)(3n+2)}{6}}$$

- Enfin :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(Y) &= \mathbb{E}\big(Y^2\big) - \big(\mathbb{E}(Y)\big)^2 && \textit{(par la formule de Kœnig-Huygens)} \\
&= \frac{(n+1)(3n+2)}{6} - \frac{4}{9}\,(n+1)^2 \\
&= \frac{n+1}{18}\,\big(3\,(3n+2) - 8\,(n+1)\big) \\
&= \frac{n+1}{18}\,(9n+6-8n-8) \\
&= \frac{(n+1)(n-2)}{18}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(Y) = \frac{(n+1)(n-2)}{18}}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y) = \frac{(n+1)(n-2)}{18}.}$$

□

5. Covariance et coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X et Y

a) Vérifier : $X + Y = N_1 + N_2$.
En déduire sous forme factorisée la variance de $X+Y$ et la covariance de X et Y.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord : $X + Y = N_1 + N_2$.
En effet, la somme des deux jetons tirés peut s'écrire comme la somme du plus grand jeton tiré et du plus petit jeton tiré.

$$\boxed{\text{Ainsi, d'après la quesiton } \textbf{\textit{2.c)}} : \mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(N_1+N_2) = \frac{(n+1)(n-2)}{6}.}$$

- La v.a.r. $X+Y$ admet un moment d'ordre 2 en tant que somme de v.a.r. X et Y qui admettent chacune un moment d'ordre 2. On a alors :

$$\mathbb{V}(X+Y) \;=\; \mathbb{V}(X) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathbb{V}(Y)$$

Commentaire

On peut utiliser cette formule sans démonstration. Rappelons toutefois :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X+Y) &= \mathrm{Cov}(X+Y, X+Y) \\
&= \mathrm{Cov}(X, X+Y) + \mathrm{Cov}(Y, X+Y) && \textit{(par linéarité à gauche)} \\
&= \mathrm{Cov}(X,X) + \mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(Y,Y) + \mathrm{Cov}(Y,X) && \textit{(par linéarité à droite)} \\
&= \mathrm{Cov}(X,X) + \mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(Y,Y) + \mathrm{Cov}(Y,X) \\
&= \mathrm{Cov}(X,X) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(Y,Y)
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y) &= \frac{1}{2}\left(\, \mathbb{V}(X+Y) - \mathbb{V}(X) - \mathbb{V}(Y) \,\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{(n+1)(n-2)}{6} - 2\,\frac{(n+1)(n-2)}{18}\right) \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{(n+1)(n-2)}{36}(6-4) \\
&= \frac{(n+1)(n-2)}{36}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{(n+1)(n-2)}{36}}$$

□

b) En déduire le coefficient de corrélation de X et Y.
On remarquera que le coefficient de corrélation linéaire de X et Y est indépendant de n.

Démonstration.
Les v.a.r. X et Y

$$\begin{aligned}
\rho(X,Y) &= \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y)}} \\
&= \frac{\frac{(n+1)(n-2)}{36}}{\sqrt{\left(\frac{(n+1)(n-2)}{18}\right)^2}} \\
&= \frac{(n+1)(n-2)}{36}\;\frac{18}{(n+1)(n-2)} \;=\; \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \rho(X,Y) = \frac{1}{2} \text{ et donc } \rho(X,Y) \text{ est bien indépendant de } n.}$$

□

Partie II

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur un même espace probabilisé et admettant des espérances $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$ et des variances $\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(Y)$ et on suppose $\mathbb{V}(X) > 0$ (on rappelle que $\mathbb{V}(X) = 0$ si et seulement si, avec une probabilité égale à 1, X est constante). La covariance des deux variables aléatoires X et Y (que celles-ci soient discrètes ou à densité) est alors le nombre réel défini par :

$$\text{Cov}(X,Y) \;=\; \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))\,(Y - \mathbb{E}(Y))\big) \quad \text{ou encore} \quad \text{Cov}(X,Y) \;=\; \mathbb{E}(X\,Y) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$$

6. **Covariance des variables aléatoires X et Y**

a) Exprimer $\text{Cov}(\lambda X + Y, \lambda X + Y)$ en fonction de $\mathbb{V}(\lambda X + Y)$ et en déduire la formule suivante pour tout nombre réel λ :

$$\mathbb{V}(\lambda X + Y) \;=\; \lambda^2\,\mathbb{V}(X) + 2\lambda\,\text{Cov}(X,Y) + \mathbb{V}(Y)$$

Démonstration.

- La v.a.r. $\lambda\,X + Y$ admet une variance comme combinaison linéaire de v.a.r. admettant une variance. On a alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\lambda X + Y) &= \mathbb{V}(\lambda X) + 2\ \text{Cov}(\lambda X, Y) + \mathbb{V}(Y) \\ &= \lambda^2\ \mathbb{V}(X) + 2\,\lambda\ \text{Cov}(X,Y) + \mathbb{V}(Y) \end{aligned}$$

(par propriété de la variance et linéarité à gauche de la variance)

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{V}(\lambda X + Y) = \lambda^2\ \mathbb{V}(X) + 2\,\lambda\ \text{Cov}(X,Y) + \mathbb{V}(Y)}$$

□

b) En déduire : $\big(\text{Cov}(X,Y)\big)^2 \;\leqslant\; \mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y)$.
À quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on l'égalité : $\big(\text{Cov}(X,Y)\big)^2 \;=\; \mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y)$?

Démonstration.

- On note f la fonction polynomiale définie par :

$$f : \lambda \mapsto \mathbb{V}(X)\,\lambda^2 + 2\,\text{Cov}(X,Y)\,\lambda + \mathbb{V}(Y)$$

La fonction f est une fonction polynomiale de degré 2 en λ.
On note P le polynôme de degré 2 associé.

- D'après la question précédente :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda) = \mathbb{V}(\lambda\,X + Y)$$

Or une variance est toujours positive. Ainsi : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda) \geqslant 0$.

- La fonction f étant positive, le polynôme associé P est de signe constant.
Son discriminant Δ est donc négatif ou nul. Or :

$$\Delta \;=\; \big(2\,\text{Cov}(X,Y)\big)^2 - 4\,\mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y) \;=\; 4\left(\big(\text{Cov}(X,Y)\big)^2 - \mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y)\right)$$

On en déduit :

$$\begin{array}{ll} \text{comme} & \Delta \leqslant 0 \\ \text{alors} & 4\left(\big(\text{Cov}(X,Y)\big)^2 - \mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y)\right) \leqslant 0 \\ \text{donc} & \big(\text{Cov}(X,Y)\big)^2 - \mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y) \leqslant 0 \end{array}$$

$$\boxed{\text{D'où : } \big(\text{Cov}(X,Y)\big)^2 \leqslant \mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y).}$$

- Déteminons maintenant sous quelle condition a lieu l'égalité de l'énoncé.

($\Rightarrow$) Supposons : $\big(\text{Cov}(X,Y)\big)^2 = \mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y)$.

$$\begin{array}{ll} \text{Alors} & \big(\text{Cov}(X,Y)\big)^2 - \mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y) = 0 \\ \text{donc} & 4\,\big(\text{Cov}(X,Y)\big)^2 - \mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y) = 0 \\ \text{d'où} & \Delta = 0 \end{array}$$

On en déduit que le polynôme P admet une unique racine. Il existe donc $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{array}{ll} & P(\lambda_0) = 0 \\ \text{ainsi} & \mathbb{V}(\lambda_0\, X + Y) = 0 \\ \text{d'où} & \lambda_0\, X + Y \text{ constante presque sûrement} \\ \text{alors} & \text{il existe } \mu_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } \lambda_0\, X + Y = \mu_0 \text{ presque sûrement} \\ \text{enfin} & \text{il existe } \mu_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } Y = -\lambda_0\, X + \mu_0 \text{ presque sûrement} \end{array}$$

On a démontré : $\big(\text{Cov}(X,Y)\big)^2 = \mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y) \quad \Rightarrow$ La v.a.r. Y est une transformée affine de X, presque sûrement

($\Leftarrow$) Réciproquement, supposons que la v.a.r. Y est une transformée affine de X presque sûrement. Il existe donc $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $Y = a\,X + b$ presque sûrement. Ainsi :

× d'une part :

$$\begin{array}{rcll} \big(\text{Cov}(X,Y)\big)^2 & = & \big(\text{Cov}(X, a\,X+b)\big)^2 & \\ & = & \big(a\,\text{Cov}(X,X) + \text{Cov}(X,b)\big)^2 & \textit{(par linéarité à droite de la covariance)} \\ & = & \big(a\,\mathbb{V}(X) + 0\big)^2 & \\ & = & a^2\,\big(\mathbb{V}(X)\big)^2 & \end{array}$$

× d'autre part :

$$\mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y) \;=\; \mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(a\,X+b) \;=\; \mathbb{V}(X) \times a^2\,\mathbb{V}(X) \;=\; a^2\,\big(\mathbb{V}(X)\big)^2$$

On en déduit bien : $\big(\text{Cov}(X,Y)\big)^2 = \mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y)$.

On a démontré : $\big(\text{Cov}(X,Y)\big)^2 = \mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y) \quad \Leftarrow$ La v.a.r. Y est une transformée affine de X, presque sûrement

Finalement l'égalité $\big(\text{Cov}(X,Y)\big)^2 = \mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y)$ est vérifiée si et seulement si la v.a.r. Y est une transformée affine de X presque sûrement.

Commentaire

L'inégalité $\big(\text{Cov}(X,Y)\big)^2 \leqslant \mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y)$ est connue sous le nom d'inégalité de Cauchy-Schwarz. Sa démonstration n'est pas explicitement au programme mais requiert uniquement des outils présents dans le programme. Ainsi, cette démonstration peut faire l'objet de questions dans les énoncés de concours (c'est régulièrement le cas). Il est donc vivement conseillé d'avoir travaillé ce raisonnement avant les écrits. De manière générale, cet énoncé et sa démonstration font partie de la culture mathématique qu'il est bon d'avoir en se présentant aux concours.

□

7. Coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X et Y

On suppose dans cette question les variances $\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(Y)$ de X et Y strictement positives.

a) Exprimer le coefficient de corrélation linéaire ρ des variables aléatoires X et Y en fonction de $\mathrm{Cov}(X,Y)$ et des écarts-types $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ des variables aléatoires X et Y et montrer que ρ appartient à $[-1,+1]$.
Préciser de plus à quelle condition nécessaire et suffisante ρ est égal à -1 ou $+1$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{Tout d'abord, par définition : } \rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.}$$

- D'après la question précédente :

$$\begin{array}{lll} & \big(\mathrm{Cov}(X,Y)\big)^2 \leqslant \mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y) & \\ \text{alors} & \dfrac{\big(\mathrm{Cov}(X,Y)\big)^2}{\mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y)} \leqslant 1 & \textit{(car } \mathbb{V}(X) > 0 \textit{ et } \mathbb{V}(Y) > 0\textit{)} \\ \text{d'où} & \sqrt{\dfrac{\big(\mathrm{Cov}(X,Y)\big)^2}{\mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y)}} \leqslant 1 & \textit{(par croissance de la fonction } x \mapsto \sqrt{x} \textit{ sur } [0,+\infty[\textit{)} \end{array}$$

Or :

$$\sqrt{\frac{\big(\mathrm{Cov}(X,Y)\big)^2}{\mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y)}} = \frac{\sqrt{\big(\mathrm{Cov}(X,Y)\big)^2}}{\sqrt{\mathbb{V}(X)}\,\sqrt{\mathbb{V}(Y)}} = \frac{|\mathrm{Cov}(X,Y)|}{\sigma(X)\,\sigma(Y)} = \left|\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)}\right| = |\rho(X,Y)|$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } |\rho(X,Y)| \leqslant 1, \text{ ou encore } \rho(X,Y) \in [-1,1].}$$

- Enfin :

$$\begin{array}{rcl} \rho(X,Y) \in \{-1,1\} & \Leftrightarrow & \big(\rho(X,Y)\big)^2 = 1 \\ & \Leftrightarrow & \left(\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)}\,\sqrt{\mathbb{V}(Y)}}\right)^2 = 1 \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{\big(\mathrm{Cov}(X,Y)\big)^2}{\mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y)} = 1 \\ & \Leftrightarrow & \big(\mathrm{Cov}(X,Y)\big)^2 = \mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y) \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, d'après la question } \textbf{\textit{6.b)}}, \rho(X,Y) \in \{-1,1\} \text{ si et seulement si} \\ \text{la v.a.r. } Y \text{ est une transformée affine de } X \text{ presque surement.}\end{array}}$$

□

b) Donner la valeur de ρ lorsque les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Démonstration.
Si les v.a.r. X et Y sont indépendantes, alors : $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$. On en déduit :

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)} = 0$$

$$\boxed{\text{Si } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes, alors : } \rho(X,Y) = 0.}$$

□

Commentaire

Il est possible d'être encore plus précis en question ***7.b)***.
Rappelons que d'après la question ***6.b)*** :

$$\begin{aligned} \rho(X,Y) \in \{-1,1\} \quad &\Leftrightarrow \quad \big(\rho(X,Y)\big)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \big(\mathrm{Cov}(X,Y)\big)^2 = \mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y) \\ &\Leftrightarrow \quad \text{il existe } \mu_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } Y = -\lambda_0\, X + \mu_0 \text{ presque sûrement} \end{aligned}$$

où λ_0 est l'unique racine du polynôme P. Cette racine a pour expression : $\lambda_0 = \dfrac{-\cancel{2}\,\mathrm{Cov}(X,Y)}{\cancel{2}\,\mathbb{V}(X)}$.
Ce que l'on peut écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \lambda_0 \quad &= \quad -\ \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathbb{V}(X)} \\ &= \quad -\ \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathbb{V}(X)}\ \frac{\sigma(X)\,\sigma(Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)} \\ &= \quad -\ \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)}\ \frac{\sigma(X)\,\sigma(Y)}{\mathbb{V}(X)} \\ &= \quad -\rho(X,Y)\ \frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)} \qquad\qquad \textit{(car } \mathbb{V}(X) = \big(\sigma(X)\big)^2\textit{)} \end{aligned}$$

On en déduit finalement, d'après ce qui précède :

$$\boxed{\rho(X,Y) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{il existe } \mu_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } Y = \frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}\ X + \mu_0 \text{ presque sûrement}}$$

(dans ce cas, la v.a.r. Y est une transformée affine strictement croissante de X)

$$\boxed{\rho(X,Y) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{il existe } \mu_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } Y = -\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}\ X + \mu_0 \text{ presque sûrement}}$$

(dans ce cas, la v.a.r. Y est une transformée affine strictement décroissante de X)