DS5 (version A)

Exercice 1 /46

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice relativement à la base canonique $\mathscr{B} = (e_1,\ e_2,\ e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est I.

1. a) Déterminer $(A-I)^2$.

- **1 pt :** $(A-I)^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$

b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et de A.

- **1 pt :** $(A-I)^2 = A^2 - 2A + I$ **(car A et I commutent)**
- **1 pt :** $A^{-1} = -A + 2I$

2. On pose $A = N + I$.

a) Exprimer pour tout entier naturel n, la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et de N puis l'écrire comme combinaison linéaire de I et A.

- **1 pt :** $\forall k \geqslant 2, N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ **par récurrence immédiate**
- **1 pt :** I **et** N **commutent**
- **1 pt : Ecriture correcte du binôme de Newton + simplification de** I^j
- **1 pt : Découpage de la somme en deux (pour** $n \geqslant 1$**)**
- **1 pt : Utilisation de** $N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ **pour** $k \geqslant 2$ **et fin du calcul :** $A^n = I + nN$
- **1 pt : Cas** $n = 0$
- **1 pt :** $A^n = (1-n)I + nA$

0 pt à la question si la formule du binôme est fausse

b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$.

- **1 pt :** $A^{-1} = -A + 2I$ **et** $(1-(-1))I + (-1)A = -A + 2I$

0 pt à la question si il est écrit $A^{-1} = (1-(-1))I + (-1)A = -A + 2I$

3. a) Utiliser la première question pour déterminer la seule valeur propre de A.

- **1 pt :** $(X-1)^2$ **polynôme annulateur de** A **donc** $\mathrm{Sp}(A) \subset \{1\}$
- **1 pt :** $(A-I)$ **est non inversible donc** 1 **est bien une valeur propre de** A

b) En déduire si A est ou n'est pas diagonalisable.
$1^{\text{ère}}$ **méthode : par l'absurde**

- **0 pt : Ecriture correcte "A est diagonalisable"**
- **1 pt : conclusion** $A = I$**, ce qui est faux, donc** A **n'est pas diagonalisable**

$2^{\text{ème}}$ **méthode : par le calcul des dimensions des espaces propres de** A

- **1 pt :** $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

- **1 pt :** $\dim(E_1(A)) = 2 < 3$ **donc** A **n'est pas diagonalisable**

4. On pose $u_1 = (f - \mathrm{id})(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$.

a) Montrer que le rang de $f - \mathrm{id}$ est égal à 1.

- **1 pt :** $\mathrm{rg}(f - \mathrm{id}) = \mathrm{rg}(A - I) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
- **1 pt :** $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ **est libre donc** $\mathrm{rg}(f - \mathrm{id}) = 1$

b) Justifier que (u_1, u_2) est une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$.

- **1 pt : Calcul de** $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}((f - \mathrm{id})(u_1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **donc** $u_1 \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$
- **1 pt :** $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}((f - \mathrm{id})(u_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **donc** $u_2 \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$
- **1 pt : Thm du rang** $\Longrightarrow \dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})) = 2$
- **1 pt :** (u_1, u_2) **est libre**
- **1 pt :** $\mathrm{Card}((u_1, u_2)) = 2 = \dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}))$

5. ***a)*** Montrer que la famille (u_1, u_2, e_1) est une base de $\mathbb{R}^3$.

- **1 pt : Application de** $f - \mathrm{id}$ **pour obtenir** $\lambda_3 = 0$
- **1 pt :** (u_1, u_2) **est libre** $\Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$
- **1 pt :** $\mathrm{Card}((u_1, u_2, e_1)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

b) Déterminer la matrice T de f dans cette même base.

- **0,5 pt :** $f(u_1) = 1u_1 + 0u_2 + 0e_1$ **ou** $\mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,e_1)}(f(u_1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- **0,5 pt :** $f(u_2) = 0u_1 + 1u_2 + 0e_1$ **ou** $\mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,e_1)}(f(u_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $f(e_1) = 1u_1 + 0u_2 + 1e_1$ **ou** $\mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,e_1)}(f(e_1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier l'inversibilité de P puis écrire la relation existant entre les matrices A, T, P et P^{-1}.

- **1 pt :** $\text{rg}(P) = \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\right)$
- **1 pt : la réduite obtenue est inversible (triangulaire supérieure + coefficients diagonaux non nuls)**
- **1 pt : Formule de changement de base :** $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P_{\mathscr{B},(u_1,u_2,e_1)}\text{Mat}_{(u_1,u_2,e_1)}(f)P_{(u_1,u_2,e_1),\mathscr{B}}$
- **1 pt : On reconnait** $A = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$**,** $T = \text{Mat}_{(u_1,u_2,e_1)}(f)$ **et** $P = P_{\mathscr{B},(u_1,u_2,e_1)}$

7. On note $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{1,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$ la base canonique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on rappelle que pour tout $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$, la matrice $E_{i,j}$ n'a que des coefficients nuls sauf celui situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.

a) Montrer que l'ensemble E des matrices M qui commutent avec T, c'est-à-dire des matrices vérifiant l'égalité $MT = TM$, est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$. Vérifier que la dimension de E est égale à 5.

- **1 pt : écriture système associé à l'équation matricielle** $MT = TM$
- **1 pt : résolution système**
- **1 pt :** $E = \text{Vect}(\mathcal{F})$ **où** $\mathcal{F} = \big(E_{1,1} + E_{3,3},\ E_{1,2},\ E_{1,3},\ E_{2,2},\ E_{2,3}\big)$
- **1 pt :** $\mathcal{F}$ **est libre**
- **1 pt :** $\mathcal{F}$ **est une base de** E **donc** $\dim(E) = \text{Card}(\mathcal{F}) = 5$

b) Soit N une matrice quelconque de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Établir l'équivalence :

$$NA = AN \quad \Leftrightarrow \quad \big(P^{-1}NP\big)\,T \ = \ T\,\big(P^{-1}NP\big)$$

- **1 pt : Utilisation de** $A = PTP^{-1}$
- **1 pt : multiplication à gauche par** P^{-1} **et à droite par** P

c) En déduire que l'ensemble F des matrices qui commutent avec A est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $\big(P\,(E_{1,1}+E_{3,3})\,P^{-1}, P\,E_{1,2}\,P^{-1}, P\,E_{1,3}\,P^{-1}, P\,E_{2,2}\,P^{-1}, P\,E_{2,3}\,P^{-1}\big)$.

- **1 pt :** $N \in F \iff (P^{-1}NP)T = T(P^{-1}NP) \iff (P^{-1}NP) \in E$
- **1 pt :** $N \in F \iff \exists(\lambda_1, \dots, \lambda_5) \in \mathbb{R}^5, P^{-1}NP = \lambda_1 \cdot (E_{1,1} + E_{3,3}) + \lambda_2 \cdot E_{1,2} + \lambda_3 \cdot E_{1,3} + \lambda_4 \cdot E_{2,2} + \lambda_5 \cdot E_{2,3}$
- **1 pt :** $N \in F \iff N \in \text{Vect}\big(P\,(E_{1,1} + E_{3,3})\,P^{-1}, P\,E_{1,2}\,P^{-1}, P\,E_{1,3}\,P^{-1}, P\,E_{2,2}\,P^{-1}, P\,E_{2,3}\,P^{-1}\big)$

Exercice 2 /23

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \; f(x) = x - \ln(x)$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

- **1 pt : f dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{x-1}{x}$**
- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0,+\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.

- **2 pts : théorème de la bijection sur** $]0,1[$
- **1 pt : théorème de la bijection sur** $]1,+\infty[$
- **1 pt :** $f(1) \neq 2$

3. Montrer : $b \in [2,4]$. On donne : $\ln(2) \simeq 0,\,7$.
- **1 pt :** $f(2) \leqslant 2$
- **1 pt :** $f(4) \geqslant 2$
- **1 pt : restriction de f à $]1,+\infty[$ strictement croissante sur $]1,+\infty[$**

Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note Φ la fonction donnée par :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)} \, dt$$

4. Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $]0,+\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \; \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}$$

- **1 pt : $\dfrac{1}{f}$ admet une primitive G de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$**
- **1 pt :** $\Phi(x) = G(2x) - G(x)$
- **1 pt : Φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ (par composition)**
- **1 pt :** $\Phi'(x) = \dfrac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}$

5. En déduire les variations de Φ sur $]0,+\infty[$.

- **1 pt : $f(x) > 0$ et $f(2x) > 0$**
- **1 pt :** $\Phi'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(2) - \ln(x) > 0 \Leftrightarrow x < 2$

6. Montrer : $\forall x \in]0,+\infty[, \; 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x$.

- **1 pt : $0 \leqslant \dfrac{1}{f(t)} \leqslant 1$ par décroissance de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$**
- **1 pt : croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant**
- **1 pt :** $0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x$

7. a) Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.
On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

- 1 pt : théorème d'encadrement

b) Montrer : $\lim\limits_{x\to 0} \Phi'(x) = 0$.
On admet que la fonction Φ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.

- 1 pt

8. On donne $\Phi(2) \simeq 1,1$ et on admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = \ln(2) \simeq 0,7$.
Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

- 4 pts : 1 pt tangente en 0, 1 pt tangente en 2, 1 pt cohérence courbe Φ, 1 pt propreté

Problème /78

Le but du problème est l'étude du coefficient de corrélation linéaire de deux variables aléatoires qu'on aborde d'abord dans un cas particulier (**Partie I**), puis de façon générale (**Partie II**).

Partie I

1. **Calculs préliminaires**

a) On considère deux nombres entiers naturels q et n tels que $n \geqslant q$. En raisonnant par récurrence sur n, établir la formule suivante :

$$\sum_{k=q}^{n} \binom{k}{q} = \binom{n+1}{q+1}$$

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

b) En faisant $q = 1, 2, 3$, en déduire une expression factorisée des quatre sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} k \quad ; \quad \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2)$$

- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$
- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1)(k-2) = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4}$

On considère dans toute la suite de cette partie un nombre entier $n \geqslant 2$ et une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n.
On extrait de cette urne successivement et sans remise 2 jetons et on désigne alors par :

- N_1 la variable aléatoire indiquant le numéro du premier jeton tiré,
- N_2 la variable aléatoire indiquant le numéro du second jeton tiré,
- X la variable aléatoire indiquant le plus petit des numéros des 2 jetons tirés,
- Y la variable aléatoire indiquant le plus grand des numéros des 2 jetons tirés.

On note $\mathbb{E}(N_1)$ et $\mathbb{V}(N_1)$, $\mathbb{E}(N_2)$ et $\mathbb{V}(N_2)$, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$ les espérances et variances des quatre variables aléatoires N_1, N_2, X, Y.

2. **Lois conjointe et marginales des variables aléatoires N_1 et N_2.**

a) Déterminer les probabilités $\mathbb{P}([N_1 = i])$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, et $\mathbb{P}_{[N_1=i]}([N_2 = j])$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$, $j \neq i$.
En déduire : $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}([N_2 = j]) = \dfrac{1}{n}$. Puis comparer les lois de N_1 et N_2.

- **2 pts :**
  - × **1 pt : description expérience**
  - × **1 pt : description v.a.r.**
- **1 pt :** $\mathbb{P}_{[N_1=i]}([N_2 = j]) = \dfrac{1}{n-1}$ **si** $i \neq j$
- **3 pts :** $\mathbb{P}(\ [N_2 = j]\ ) = \dfrac{1}{n}$
  - × **1 pt : FPT sur** $(\ [N_1 = i]\ )_{i\in[\![1,n]\!]}$
  - × **1 pt :** $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(\ [N = i]\ ) \neq 0$
  - × **1 pt : fin calcul**
- **1 pt :** N_1 **et** N_2 **ont même loi**
  0 **si** $N_2(\Omega)$ **n'est pas justifié**

b) Calculer les espérances $\mathbb{E}(N_1)$ et $\mathbb{E}(N_2)$, les variances $\mathbb{V}(N_1)$ et $\mathbb{V}(N_2)$.

- **1 pt :** $\mathbb{E}(N_1) = \mathbb{E}(N_2) = \dfrac{n+1}{2}$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(N_1) = \mathbb{V}(N_2) = \dfrac{n^2-1}{12}$

c) Montrer, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$:

$$\mathbb{P}([N_1 = i] \cap [N_2 = j]) = \begin{cases} \dfrac{1}{n(n-1)} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et en déduire :

$$\mathbb{E}(N_1\, N_2) \ = \ \frac{(n+1)(3n+2)}{12}$$

En déduire la covariance et le coefficient de corrélation linéaire de N_1 et N_2.

- **2 pts :** $\mathbb{P}([N_1 = i] \cap [N_2 = j]) = \begin{cases} \dfrac{1}{n(n-1)} & \textbf{si } i \neq j \\ 0 & \textbf{si } i = j \end{cases}$
  - × **1 pt : cas** $i = j$
  - × **1 pt : cas** $i \neq j$
- **1 pt :** $N_1\, N_2$ **admet une espérance car v.a.r. finie**

- **5 pts :** $\mathbb{E}(N_1\, N_2) = \dfrac{(n+1)(3n+2)}{12}$
  × **1 pt : théorème de transfert**
  × **1 pt :** $\sum\limits_{j=1}^{n} j\ \mathbb{P}\left[N_1 = i\right] \cap \left[N_2 = j\right]) = \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} j\ \mathbb{P}([N_1 = i] \cap [N_2 = j])$
  × **1 pt :** $\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} j\ \mathbb{P}([N_1 = i] \cap [N_2 = j]) = \dfrac{n(n+1)}{2} - i$
  × **2 pts : fin calcul**
- **1 pt :** $\mathrm{Cov}(N_1, N_2) = -\dfrac{n+1}{12}$
- **1 pt :** $\rho(N_1, N_2) = \dfrac{\mathrm{Cov}(N_1, N_2)}{\sigma(N_1)\ \sigma(N_2)}$
- **1 pt :** $\rho(N_1, N_2) = -\dfrac{1}{n-1}$

d) Exprimer enfin sous forme factorisée la variance $\mathbb{V}(N_1 + N_2)$.

- **1 pt :** $N_1 + N_2$ **admet une variance**
- **1 pt :** $\mathbb{V}(N_1 + N_2) = \mathbb{V}(N_1) + 2\,\mathrm{Cov}(N_1, N_2) + \mathbb{V}(N_2)$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(N_1 + N_2) = \dfrac{(n+1)(n-2)}{6}$

3. **Lois conjointe, marginales et conditionnelles des variables aléatoires X et Y**

a) Montrer, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $1 \leqslant i < j \leqslant n$: $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \dfrac{2}{n(n-1)}$.
Que valent ces probabilités sinon ?

- **2 pts : cas $i < j$**
  × **1 pt :** $[X = i] \cap [Y = j] = \big(\ [N_1 = i] \cap [N_2 = j]\ \big) \ \cup\ \big(\ [N_1 = j] \cap [N_2 = i]\ \big)$
  × **1 pt :** $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \dfrac{2}{n(n-1)}$
  0 si incompatibilité non citée

  Démonstration par dénombrement possible.
- **1 pt : cas $i \geqslant j$ ($[X = i] \cap [Y = j] = \varnothing$)**

b) En déduire les probabilités $\mathbb{P}([Y = j])$ pour $2 \leqslant j \leqslant n$ et $\mathbb{P}([X = i])$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$.
(On vérifiera que les formules donnant $\mathbb{P}([Y = j])$ et $\mathbb{P}([X = i])$ restent valables si $j = 1$ ou $i = n$).

- **4 pts : loi de Y**
  × **1 pt :** $Y(\Omega) = [\![2, n]\!]$
  × **1 pt : FPT sur** $\big(\ [X = i]\ \big)_{i \in [\![1, n-1]\!]}$
  × **1 pt :** $\sum\limits_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \sum\limits_{i=1}^{j-1} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$
  × **1 pt :** $\mathbb{P}([Y = j]) = 2\ \dfrac{j-1}{n(n-1)}$
- **1 pt : toujours vérifié pour $j = 1$**
- **2 pts : loi de X**
  × **1 pt :** $X(\Omega) = [\![1, n-1]\!]$
  × **1 pt :** $\mathbb{P}([X = i]) = 2\ \dfrac{n-i}{n(n-1)}$
- **1 pt : toujours vérifié pour $i = n$**

c) Déterminer les probabilités $\mathbb{P}_{[Y=j]}([X=i])$ et $\mathbb{P}_{[X=i]}([Y=j])$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$, puis reconnaître la loi de X conditionnellement à $[Y=j]$ et la loi de Y conditionnellement à $[X=i]$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}_{[Y=j]}([X=i]) = \dfrac{1}{j-1}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}_{[X=i]}([Y=j]) = \dfrac{1}{n-i}$
- **2 pts : la loi de X conditionnellement à $[Y=j]$ est la loi $\mathcal{U}([\![1, j-1]\!])$**
  - × **1 pt : si $i \geqslant j$, $\mathbb{P}_{[Y=j]}([X=i]) = 0$**
  - × **1 pt : conclusion**
- **1 pt : la loi de Y conditionnellement à $[X=i]$ est la loi $\mathcal{U}([\![i+1, n]\!])$**

d) Comparer les lois des variables aléatoires $n+1-X$ et Y.
En déduire que $\mathbb{E}(n+1-X) = \mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(n+1-X) = \mathbb{V}(Y)$, puis en déduire les expressions de $\mathbb{E}(X)$ en fonction de $\mathbb{E}(Y)$ et de $\mathbb{V}(X)$ en fonction de $\mathbb{V}(Y)$.

- **3 pts : loi de $n+1-X$**
  - × **1 pt :** $(n+1-X)(\Omega) \subset [\![2, n[\![$
  - × **2 pts :** $\mathbb{P}([n+1-X=j]) = 2\ \dfrac{j-1}{n(n-1)}$ **(dont 1 pt pour $n+1-j \in [\![1, n-1]\!]$)**
- **1 pt : $n+1-X$ et Y ont même loi**
- **1 pt : $n+1-X$ et Y admettent une espérance car v.a.r. finies**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X) = n+1-\mathbb{E}(Y)$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y)$

4. **Espérances et variances des variables aléatoires X et Y**

a) Exprimer les espérances $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(X)$ en fonction de n.

- **2 pts :** $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{2\,(n+1)}{3}$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{3}$

b) Exprimer sous forme factorisée $\mathbb{E}\big(Y(Y-2)\big)$, puis $\mathbb{E}\left(Y^2\right)$, $\mathbb{V}(Y)$ et $\mathbb{V}(X)$ en fonction de n.

- **1 pt : Y^2 et $Y(Y-2)$ admettent une espérance**
- **2 pts :** $\mathbb{E}\big(Y(Y-2)\big) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Y^2) = \dfrac{(n+1)(3n+2)}{6}$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(X) = \dfrac{n+1)(n-2)}{18}$

5. **Covariance et coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X et Y**

a) Vérifier : $X + Y = N_1 + N_2$.
En déduire sous forme factorisée la variance de $X + Y$ et la covariance de X et Y.

- **1 pt :** $X + Y = N_1 + N_2$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(X+Y) = \dfrac{(n+1)(n-2)}{18}$
- **1 pt :** $\text{Cov}(X,Y) = \dfrac{1}{2}\,\big(\mathbb{V}(X+Y) - \mathbb{V}(X) - \mathbb{V}(Y)\big)$
- **1 pt :** $\text{Cov}(X,Y) = \dfrac{(n+1)(n-2)}{36}$

b) En déduire le coefficient de corrélation de X et Y.
On remarquera que le coefficient de corrélation linéaire de X et Y est indépendant de n.

- **1 pt :** $\rho(X,Y) = \dfrac{1}{2}$

Partie II

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur un même espace probabilisé et admettant des espérances $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$ et des variances $\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(Y)$ et on suppose $\mathbb{V}(X) > 0$ (on rappelle que $\mathbb{V}(X) = 0$ si et seulement si, avec une probabilité égale à 1, X est constante). La covariance des deux variables aléatoires X et Y (que celles-ci soient discrètes ou à densité) est alors le nombre réel défini par :

$$\text{Cov}(X,Y) \;=\; \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))\,(Y - \mathbb{E}(Y))\big) \quad \text{ou encore} \quad \text{Cov}(X,Y) \;=\; \mathbb{E}(X\,Y) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$$

6. **Covariance des variables aléatoires X et Y**

a) Exprimer $\text{Cov}(\lambda X + Y, \lambda X + Y)$ en fonction de $\mathbb{V}(\lambda X + Y)$ et en déduire la formule suivante pour tout nombre réel λ :

$$\mathbb{V}(\lambda X + Y) \;=\; \lambda^2\,\mathbb{V}(X) + 2\lambda\,\text{Cov}(X,Y) + \mathbb{V}(Y)$$

- **1 pt :** $\lambda\,X + Y$ **admet une variance**
- **1 pt :** $\mathbb{V}(\lambda\,X + Y) = \mathbb{V}(\lambda\,X) + 2\;\text{Cov}(\lambda\,X, Y) + \mathbb{V}(Y)$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(\lambda\,X) + 2\;\text{Cov}(\lambda\,X, Y) + \mathbb{V}(Y) = \lambda^2\,\mathbb{V}(X) + 2\lambda\;\text{Cov}(X,Y) + \mathbb{V}(Y)$

b) En déduire : $\big(\text{Cov}(X,Y)\big)^2 \;\leqslant\; \mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y)$.
A quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on l'égalité : $\big(\text{Cov}(X,Y)\big)^2 \;=\; \mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y)$?

- **1 pt : introduction de** $P : \lambda \mapsto \mathbb{V}(X)\,\lambda^2 + 2\;\text{Cov}(X,Y)\,\lambda + \mathbb{V}(Y)$
- **1 pt :** $P(\lambda) \geqslant 0$
- **1 pt :** $\Delta \leqslant 0$
- **2 pts : cas d'égalité ($\Rightarrow$) (si égalité dans Cauchy-Schwarz, alors Y transformée affine de X p.s.)**
  - × **1 pt : existence d'une unique racine de P (λ_0)**
  - × **1 pt :** $\mathbb{V}(\lambda_0\,X + Y) = 0 \Rightarrow \lambda_0\,X + Y$ **v.a.r. presque sûrement constante**
- **1 pt : cas d'égalité ($\Leftarrow$) (si Y transformée affine de X p.s., alors on a égalité dans Cauchy-Schwarz)**

7. Coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X et Y
On suppose dans cette question les variances $\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(Y)$ de X et Y strictement positives.

a) Exprimer le coefficient de corrélation linéaire ρ des variables aléatoires X et Y en fonction de $\text{Cov}(X, Y)$ et des écarts-types $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ des variables aléatoires X et Y et montrer que ρ appartient à $[-1, +1]$.
Préciser de plus à quelle condition nécessaire et suffisante ρ est égal à -1 ou $+1$.

- **2 pts :** $\mid \rho(X, Y) \mid \leqslant 1$
- **1 pt : cas où** $\rho(X, Y) \in \{-1, 1\}$

b) Donner la valeur de ρ lorsque les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

- **1 pt :** $\rho(X, Y) = 0$