DS5 (version A)

Exercice 1

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice relativement à la base canonique $\mathscr{B} = (e_1,\ e_2,\ e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est I.

1. ***a)*** Déterminer $(A - I)^2$.

b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et de A.

2. On pose $A = N + I$.

a) Exprimer pour tout entier naturel n, la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et de N puis l'écrire comme combinaison linéaire de I et A.

b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$.

3. ***a)*** Utiliser la première question pour déterminer la seule valeur propre de A.

b) En déduire si A est ou n'est pas diagonalisable.

4. On pose $u_1 = (f - \mathrm{id})(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$.

a) Montrer que le rang de $f - \mathrm{id}$ est égal à 1.

b) Justifier que (u_1, u_2) est une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$.

5. ***a)*** Montrer que la famille (u_1, u_2, e_1) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer la matrice T de f dans cette même base.

6. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier l'inversibilité de P puis écrire la relation existant entre les matrices A, T, P et P^{-1}.

7. On note $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$ la base canonique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on rappelle que pour tout $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$, la matrice $E_{i,j}$ n'a que des coefficients nuls sauf celui situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.

a) Montrer que l'ensemble E des matrices M qui commutent avec T, c'est-à-dire des matrices vérifiant l'égalité $MT = TM$, est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$. Vérifier que la dimension de E est égale à 5.

b) Soit N une matrice quelconque de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Établir l'équivalence :

$$NA = AN \quad \Leftrightarrow \quad \left(P^{-1}NP\right)T \ = \ T\left(P^{-1}NP\right)$$

c) En déduire que l'ensemble F des matrices qui commutent avec A est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $\left(P\,(E_{1,1}+E_{3,3})\,P^{-1}, P\,E_{1,2}\,P^{-1}, P\,E_{1,3}\,P^{-1}, P\,E_{2,2}\,P^{-1}, P\,E_{2,3}\,P^{-1}\right)$.

Exercice 2

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in\,]0,+\infty[,\ f(x) = x - \ln(x)$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in\,]0,+\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.

3. Montrer : $b \in [2,4]$. On donne : $\ln(2) \simeq 0,7$.

Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note Φ la fonction donnée par :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt$$

4. Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $]0,+\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in\,]0,+\infty[,\ \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}$$

5. En déduire les variations de Φ sur $]0,+\infty[$.

6. Montrer : $\forall x \in\,]0,+\infty[,\ 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x$.

7. ***a)*** Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.
On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

b) Montrer : $\lim\limits_{x\to 0} \Phi'(x) = 0$.
On admet que la fonction Φ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.

8. On donne $\Phi(2) \simeq 1,1$ et on admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = \ln(2) \simeq 0,7$.
Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

Problème

Le but du problème est l'étude du coefficient de corrélation linéaire de deux variables aléatoires qu'on aborde d'abord dans un cas particulier (**Partie I**), puis de façon générale (**Partie II**).

Partie I

1. **Calculs préliminaires**

a) On considère deux nombres entiers naturels q et n tels que $n \geqslant q$. En raisonnant par récurrence sur n, établir la formule suivante :

$$\sum_{k=q}^{n} \binom{k}{q} = \binom{n+1}{q+1}$$

b) En faisant $q = 1$, 2 , 3, en déduire une expression factorisée des quatre sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} k \quad ; \quad \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2)$$

On considère dans toute la suite de cette partie un nombre entier $n \geqslant 2$ et une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n.
On extrait de cette urne successivement et sans remise 2 jetons et on désigne alors par :

- N_1 la variable aléatoire indiquant le numéro du premier jeton tiré,
- N_2 la variable aléatoire indiquant le numéro du second jeton tiré,
- X la variable aléatoire indiquant le plus petit des numéros des 2 jetons tirés,
- Y la variable aléatoire indiquant le plus grand des numéros des 2 jetons tirés.

On note $\mathbb{E}(N_1)$ et $\mathbb{V}(N_1)$, $\mathbb{E}(N_2)$ et $\mathbb{V}(N_2)$, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$ les espérances et variances des quatre variables aléatoires N_1, N_2, X, Y.

2. **Lois conjointe et marginales des variables aléatoires N_1 et N_2.**

a) Déterminer les probabilités $\mathbb{P}([N_1 = i])$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, et $\mathbb{P}_{[N_1=i]}([N_2 = j])$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$, $j \neq i$.
En déduire : $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}([N_2 = j]) = \dfrac{1}{n}$. Puis comparer les lois de N_1 et N_2.

b) Calculer les espérances $\mathbb{E}(N_1)$ et $\mathbb{E}(N_2)$, les variances $\mathbb{V}(N_1)$ et $\mathbb{V}(N_2)$.

c) Montrer, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$:

$$\mathbb{P}([N_1 = i] \cap [N_2 = j]) = \begin{cases} \dfrac{1}{n(n-1)} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et en déduire :

$$\mathbb{E}(N_1 N_2) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}$$

En déduire la covariance et le coefficient de corrélation linéaire de N_1 et N_2.

d) Exprimer enfin sous forme factorisée la variance $\mathbb{V}(N_1 + N_2)$.

3. **Lois conjointe, marginales et conditionnelles des variables aléatoires X et Y**

a) Montrer, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $1 \leqslant i < j \leqslant n$: $\mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) = \dfrac{2}{n(n-1)}$.
Que valent ces probabilités sinon ?

b) En déduire les probabilités $\mathbb{P}([Y=j])$ pour $2 \leqslant j \leqslant n$ et $\mathbb{P}([X=i])$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$.
(On vérifiera que les formules donnant $\mathbb{P}([Y=j])$ et $\mathbb{P}([X=i])$ restent valables si $j=1$ ou $i=n$).

c) Déterminer les probabilités $\mathbb{P}_{[Y=j]}([X=i])$ et $\mathbb{P}_{[X=i]}([Y=j])$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$, puis reconnaître la loi de X conditionnellement à $[Y=j]$ et la loi de Y conditionnellement à $[X=i]$.

d) Comparer les lois des variables aléatoires $n+1-X$ et Y.
En déduire que $\mathbb{E}(n+1-X) = \mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(n+1-X) = \mathbb{V}(Y)$, puis en déduire les expressions de $\mathbb{E}(X)$ en fonction de $\mathbb{E}(Y)$ et de $\mathbb{V}(X)$ en fonction de $\mathbb{V}(Y)$.

4. **Espérances et variances des variables aléatoires X et Y**

a) Exprimer les espérances $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(X)$ en fonction de n.

b) Exprimer sous forme factorisée $\mathbb{E}\big(Y(Y-2)\big)$, puis $\mathbb{E}\left(Y^2\right)$, $\mathbb{V}(Y)$ et $\mathbb{V}(X)$ en fonction de n.

5. **Covariance et coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X et Y**

a) Vérifier : $X+Y = N_1 + N_2$.
En déduire sous forme factorisée la variance de $X+Y$ et la covariance de X et Y.

b) En déduire le coefficient de corrélation de X et Y.
On remarquera que le coefficient de corrélation linéaire de X et Y est indépendant de n.

Partie II

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur un même espace probabilisé et admettant des espérances $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$ et des variances $\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(Y)$ et on suppose $\mathbb{V}(X) > 0$ (on rappelle que $\mathbb{V}(X) = 0$ si et seulement si, avec une probabilité égale à 1, X est constante). La covariance des deux variables aléatoires X et Y (que celles-ci soient discrètes ou à densité) est alors le nombre réel défini par :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) \;=\; \mathbb{E}\big((X-\mathbb{E}(X))\,(Y-\mathbb{E}(Y))\big) \quad \text{ou encore} \quad \mathrm{Cov}(X,Y) \;=\; \mathbb{E}(X\,Y) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$$

6. **Covariance des variables aléatoires X et Y**

a) Exprimer $\mathrm{Cov}(\lambda X+Y, \lambda X+Y)$ en fonction de $\mathbb{V}(\lambda X+Y)$ et en déduire la formule suivante pour tout nombre réel λ :

$$\mathbb{V}(\lambda X+Y) \;=\; \lambda^2\,\mathbb{V}(X) + 2\lambda\,\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathbb{V}(Y)$$

b) En déduire : $\big(\mathrm{Cov}(X,Y)\big)^2 \;\leqslant\; \mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y)$.
A quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on l'égalité : $\big(\mathrm{Cov}(X,Y)\big)^2 \;=\; \mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y)$?

7. **Coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X et Y**
On suppose dans cette question les variances $\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(Y)$ de X et Y strictement positives.

a) Exprimer le coefficient de corrélation linéaire ρ des variables aléatoires X et Y en fonction de $\mathrm{Cov}(X,Y)$ et des écarts-types $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ des variables aléatoires X et Y et montrer que ρ appartient à $[-1,+1]$.
Préciser de plus à quelle condition nécessaire et suffisante ρ est égal à -1 ou $+1$.

b) Donner la valeur de ρ lorsque les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.