DS4 (version B)

Exercice

On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. Soit f l'application définie sur E qui associe à tout polynôme $P \in E$, le polynôme $f(P)$ défini par :

$$\big(f(P)\big)(X) = -3\,X\,P(X) + X^2\,P'(X), \text{ où } P' \text{ est la dérivée du polynôme } P$$

1. ***a)*** Rappeler la dimension de E.

b) Montrer que f est un endomorphisme de E.

c) Déterminer la matrice M de f dans 1a base canonique de E.

d) La matrice M est-elle inversible ?
Seulement pour les cubes : Est-elle diagonalisable ? Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, M^n.

e) Préciser le noyau $\text{Ker}(f)$ de f ainsi qu'une base de $\text{Ker}(f)$.

f) Déterminer l'image $\text{Im}(f)$ de f.

2. On note id_E et 0_E respectivement, l'endomorphisme identité et l'endomorphisme nul de E, et pour tout endomorphisme v de E, on pose $v^0 = \text{id}_E$ et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $v^k = v \circ v^{k-1}$.
Soit u et g deux endomorphismes de E tels que : $u^4 = 0_E$, $u^3 \neq 0_E$ et $g = \text{id}_E + u + u^2 + u^3$.

a) Soit P un polynôme de E tel que $P \notin \text{Ker}\left(u^3\right)$.
Montrer que la famille $\left(P, u(P), u^2(P), u^3(P)\right)$ est une base de E.

b) Montrer que g est un automorphisme de E. Déterminer l'automorphisme réciproque g^{-1} en fonction de u.

c) Établir l'égalité : $\text{Ker}(u) = \text{Ker}\left(g - \text{id}_E\right)$.

d) **Seulement pour les cubes** : Montrer que 1 est la seule valeur propre de g.

Problème

Dans ce problème, on s'intéresse à un modèle, inspiré du modèle de Cori, de propagation d'un virus au sein d'une population.
La **Partie 1** introduit des outils théoriques permettant de définir et d'étudier ce modèle.
Les **Parties 2** et 3 concernent cette étude. Si l'on fait abstraction des définitions, des notations et de la question *15*, la **Partie 3** est indépendante des **Parties 1** et **2**.

Partie 1 - Lois composées

On considère :

× un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et J un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}_+$;

× une variable aléatoire Y sur cet espace à valeurs dans J.

× une famille $(X_t)_{t\in J}$ de variables aléatoires sur cet espace **à valeurs dans** $\mathbb{N}$ et **indépendantes de** Y telles que pour tout $t \in J$:

$$X_t \text{ suit la loi } \mu(t)$$

$\mu(t)$ désignant une loi de probabilité de paramètre t.

On définit la variable aléatoire Z sur cet espace par :

$$\forall \omega \in \Omega, \text{ si } Y(\omega) = t \text{ alors } Z(\omega) = X_t(\omega)$$

et on dit que Z suit la loi $\mu(Y)$.
On considère dans cette partie une telle variable Z qui suit la loi $\mu(Y)$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit aussi la fonction f_k de J dans $[0,1]$ par :

$$f_k(t) \; = \; \mathbb{P}(\,[X_t = k]\,)$$

1. *Un exemple avec* ***Python***. On considère le script **Python** suivant :

```
import random as rd
def X(t) :
    r = 1
    while rd.random() > ... :
        r = ...
    return r

Y = rd.random()
Z = ...
print(Z)
```

En considérant les notations précédentes avec $J =]0,1[$ et en notant Y la variable aléatoire dont Y est une simulation, compléter le script précédent pour que Z soit une simulation d'une variable aléatoire qui suit la loi géométrique $\mathcal{G}(Y)$.

• *Cas où Y est discrète.* On suppose dans les questions ***2.*** et ***3.*** que Y est discrète.

2. ***a)*** Soit $y \in Y(\Omega)$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(\,[Z = k] \cap [Y = y]\,) \; = \; f_k(y)\; \mathbb{P}(\,[Y = y]\,)$$

et si $\mathbb{P}(\,[Y = y]\,) \neq 0$:

$$\mathbb{P}_{[Y=y]}(\,[Z = k]\,) \; = \; f_k(y)$$

b) En déduire :

$$\mathbb{P}(\,[Z = k]\,) \;=\; \mathbb{E}\big(f_k(Y)\big) \qquad (1)$$

c) *Un exemple où* $J = \mathbb{N}^*$. Soit $p \in \,]0,1[$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ et si la loi de Y est définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(\,[Y = n]\,) \;=\; n\,p^2\,(1-p)^{n-1}$$

montrer que Z suit la loi géométrique de paramètre p.

3. On suppose que pour tout $t \in J$, $\mathbb{E}(X_t)$ existe. On note $g(t)$ cette espérance et on suppose que $\mathbb{E}\big(g(Y)\big)$ existe.

a) Démontrer :

$$\mathbb{E}\big(g(Y)\big) \;=\; \sum_{y \in Y(\Omega)} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} k\, f_k(y)\; \mathbb{P}(\,[Y = n]\,) \right)$$

b) En admettant que l'on peut inverser l'ordre des sommes, montrer que $\mathbb{E}(Z)$ existe et :

$$\mathbb{E}(Z) \;=\; \mathbb{E}\big(g(Y)\big) \qquad (2)$$

- *On admet que les résultats établis dans les questions* ***2.*** *et* ***3.****, en particulier* (1) *et* (2)*, sont encore vrais lorsque Y n'est plus discrète.*

Partie 2 - Le modèle de Cori

On considère une population d'effectif infini dans laquelle un individu donné est infecté le jour 0 par un virus contagieux.
Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :

× tout individu infecté par le virus est immédiatement contagieux et sa contagiosité ne dure que $(d+1)$ jours, du jour n où il est infecté jusqu'au jour $(n+d)$ $(n \in \mathbb{N})$;

× une fois infectés, les individus présentent un même profil de contagiosité donné par un $(d+1)$-uplet $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ qui dépend généralement de facteurs biologiques.

Pour tout $k \in [\![0,d]\!]$, on dit que α_k est la contagiosité de tout individu ayant éte infecté k jours plus tôt. Autrement dit, on peut considérer que α_k, lié à la nature du virus, détermine la proportion d'individus contaminés par un individu infecté, parmi tous ceux avec lesquels il est en contact k jours après sa contamination.

Finalement, les réels α_0, α_1, ..., α_d sont tels que, pour tout $k \in [\![0,d]\!]$, $\alpha_k \in \,]0,1[$ et on note $\alpha = \sum\limits_{k=0}^{d} \alpha_k$, ce qui signifie que α est la contagiosité globale d'un individu infecté sur toute la période où il est infecté.
On utilise les notations et définitions de la **Partie 1** avec $J = \mathbb{R}^+$.
On suppose que les variables aléatoires qui interviennent par la suite sont définies sur l'espace $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note R_n la variable aléatoire qui désigne le nombre moyen de contacts réalisés le jour n par un individu contagieux ce jour-là.
  On suppose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence de $\mathbb{E}(R_n)$ et on pose $r_n = \mathbb{E}(R_n)$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Z_n la variable aléatoire égale au nombre total d'individus qui sont infectés et donc deviennent contagieux le n-ième jour. Par exemple, $Z_0 = 1$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note I_n la variable aléatoire égale à la contagiosité globale de la population le n-ième jour, définie par :

$$I_n \;=\; \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k\, Z_{n-k} \qquad (*)$$

- On suppose enfin que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n et R_n sont indépendantes et que si l'on pose $Y_n = R_n\, I_n$, on a :

$$Z_{n+1} \text{ suit la loi } \mathcal{P}\left(Y_n\right)$$

où $\mathcal{P}$ désigne la loi de Poisson. Ainsi la loi de Z_{n+1} ne dépend que des lois de R_n et de I_n.

4. Donner une justification de $(*)$.

5. ***a)*** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathbb{E}(I_n)$ existe. Montrer que $\mathbb{E}(Y_n)$ existe et en utilisant un résultat de la **Partie 1**, montrer que $\mathbb{E}(Z_{n+1})$ existe et vaut $r_n\, \mathbb{E}(I_n)$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = \mathbb{E}(Z_n)$ existe et vérifie la relation de récurrence :

$$z_{n+1} \;=\; r_n \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k\, z_{n-k} \qquad (3)$$

6. *Programmation de z_n avec **Python**.*
On suppose que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = \dfrac{n+2}{n+1}$.
On note Δ la liste $[\alpha_0,\ \cdots,\ \alpha_d]$.
Écrire une fonction **Python** d'entête `def z(Delta,n)` qui calcule z_n si `Delta` représente la liste Δ.

7. Soit $(U_n)_{n\geqslant 0}$, $(V_n)_{n\geqslant 0}$, deux suites d'événements tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(U_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(V_n) = 1$.
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(U_n \cap V_n) = 1$.

- On rappelle que l'on dit qu'un événement A est presque sûr lorsque $\mathbb{P}(A) = 1$.

8. On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \bigcap\limits_{k=n}^{+\infty} [Z_k = 0]$ et B l'événement « la contamination s'éteint au bout d'un nombre fini de jours ».

a) Démontrer : $\mathbb{P}(B) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

b) En distinguant les cas où $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right)$ est nulle ou pas, établir, pour tout $p \geqslant d$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+p} [Z_k = 0]\right) \;=\; \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right)$$

puis : $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right)$.

c) En déduire que B est presque sûr si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\,[Z_n = 0]\,) = 1$.

d) Montrer que cela équivaut aussi au fait que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers 0.

9. ***a)*** Montrer, en utilisant un résultat de la **Partie 1**, que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(\,[Z_{n+1} = 0]\,) \;=\; \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-Y_n}\right)$$

b) On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$. En déduire que B est presque sûr (on pourra montrer que pour tout x reel, $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 - x$).

Partie 3 - Limite du nombre moyen de contaminations journalières

Dans cette partie, on conserve les notations de la **Partie 2** et on s'intéresse au comportement asymptotique de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la relation (3) et $z_0 = 1$, sous trois hypothèses différentes concernant la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Pour tout réel x, on identifie x et la matrice carrée d'ordre 1 dont l'unique coefficient est x.
Pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, on pose $a_k = \dfrac{\alpha_k}{\alpha}$.

10. On suppose, dans cette question, qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\rho \in]0, 1[$ tels que, pour tout $n \geqslant N$, $r_n\,\alpha \leqslant \rho$. On note (H_1) cette hypothèse.

a) Que vaut $\displaystyle\lim_{t\to 1} \sum_{k=0}^{d} a_k\, t^{d-k}$?

En déduire qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $\theta^{d+1} \geqslant \rho \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k\, \theta^{d-k}\right)$ (on pourra raisonner par l'absurde).

- On pose $M = \displaystyle\max_{k\in[\![N,N+d]\!]} \frac{z_k}{\theta^k}$.

b) Démontrer, pour tout $n \geqslant N$: $z_n \leqslant M\,\theta^n$.

c) En déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} z_n = 0$.

On montrerait de même que s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\rho > 1$ tels que, pour tout $n \geqslant N$, $r_n\,\alpha \geqslant \rho$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} z_n = +\infty$. On note (H_2) cette hypothèse.

- On suppose, dans les questions ***13.*** à ***16.*** , que **la suite** $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est constante de valeur** $\dfrac{1}{\alpha}$. On note (H_3) cette hypothèse.
  On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n = \begin{pmatrix} z_n \\ z_{n-1} \\ \vdots \\ z_{n-d} \end{pmatrix}$$

  avec $z_{-1} = \ldots = z_{-d} = 0$.

11. ***a)*** Montrer que la matrice A carrée d'ordre $d + 1$, définie par :

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{d-2} & a_{d-1} & a_d \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = A\,U_n$.

b) En déduire que, pour tout $n \geqslant 0$, $U_n = A^n\,U_0$ puis que $z_{n+1} = L\,A^n\,U_0$.

12. Dans cette question, $d = 2$ et $L = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.
On note : $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid A - \lambda\, I_3 \text{ non inversible}\}$. On admet que l'ensemble $\mathrm{Sp}(A)$ contient au plus 3 valeurs.

a) Démontrer : $\mathrm{Sp}(A) = \left\{1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right\}$.

b) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note : $E_\lambda(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda\, X\}$.
Déterminer une base (V_1, V_2, V_3) de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, où V_1 est un vecteur colonne de $E_1(A)$, V_2 de $E_{-\frac{1}{2}}(A)$, V_3 de $E_{-\frac{1}{3}}(A)$, ces colonnes ayant leur premier coefficient égal a 1.

c) Déterminer $(s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$, tel que $U_0 = s_1\, V_1 + s_2\, V_2 + s_3\, V_3$.

d) En déduire que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers s_1.

13. On revient au cas général.
On note : $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid A - \lambda\, I_{d+1} \text{ non inversible}\}$. On admet que l'ensemble $\mathrm{Sp}(A)$ contient au plus $d + 1$ valeurs. On note de plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $E_\lambda(A) = \{X \in \mathscr{M}_{d+1,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda\, X\}$.

a) Montrer que $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ si et seulement si $\lambda^{d+1} = \sum\limits_{k=0}^{d} a_{d-k}\, \lambda^k$. Démontrer de plus, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$: $\dim\big(E_\lambda(A)\big) = 1$.

b) Démontrer : $1 \in \mathrm{Sp}(A)$. Puis déterminer le vecteur colonne V de $E_1(A)$ dont la somme des composantes vaut $d + 1$.

c) Établir que $-1 \notin \mathrm{Sp}(A)$ et que si $|\lambda| > 1$, alors $\lambda \notin \mathrm{Sp}(A)$.

14. On pose pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, $b_k = \sum\limits_{i=k}^{d} a_i$. On définit aussi le sous-espace vectoriel H de $\mathscr{M}_{d+1,1}(\mathbb{R})$ formé des matrices $W = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_d \end{pmatrix}$ telles que $\sum\limits_{k=0}^{d} b_k\, w_k = 0$.

a) Démontrer, pour tout $W \in H$: $A\,W \in H$.

b) Déterminer l'unique réel s tel que : $U_0 - s\,V \in H$.

c) Nous admettons que, pour tout $W \in H$, $L\,A^n\,W \to 0$ quand $n \to +\infty$.
En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = s$.

15. Sous quelle(s) hypothèse(s), parmi les trois hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3) faites dans cette partie, la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z_n$ est-elle convergente ? Comment interpréter ce résultat ?