DS4 (version A)

Exercice 1

Partie I

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. Soit f l'application définie sur E qui associe à tout polynôme $P \in E$, le polynôme $f(P)$ défini par :

$$\big(f(P)\big)(X) \;=\; (1 - X - X^2)\ P'(X) + \frac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ P''(X)$$

Dans la suite, on note $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Commentaire

Dans les exercices, la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est parfois directement notée $(1, X, X^2)$. C'est une source fréquente d'erreurs et confusions. Il est donc **fortement recommandée** d'introduire la base canonique sous la forme (P_0, P_1, P_2) si ce n'est pas fait dans l'énoncé (et si la notation P_i n'est pas utilisée par ailleurs).

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

Démonstration.

- Démontrons que f est linéaire

  Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(P, Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2$.

$$\begin{array}{cl} & \Big(f(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)\Big)(X) \\ = & (1 - X - X^2)\ (\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)'(X) + \frac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ (\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)''(X) \\ = & (1 - X - X^2)\ (\lambda \cdot P' + \mu \cdot Q')(X) + \frac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ (\lambda \cdot P'' + \mu \cdot Q'')(X) \\ = & \lambda \cdot (1 - X - X^2)\ P'(X) \ + \ \mu \cdot (1 - X - X^2)\ Q'(X) \\ & + \lambda \cdot \frac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ P''(X) \ + \ \mu \cdot \frac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ Q''(X) \\ = & \lambda \cdot \Big(\ (1 - X - X^2)\ P'(X) + \frac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ P''(X)\ \Big) \\ & + \mu \cdot \Big(\ (1 - X - X^2)\ Q'(X) + \frac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ Q''(X)\ \Big) \\ = & \lambda \cdot \Big(f(P)\Big)(X) + \mu \cdot \Big(f(Q)\Big)(X) \ = \ \Big(\lambda \cdot f(P) + \mu \cdot f(Q)\Big)(X) \end{array}$$

(par linéarité des applications dérivée première et seconde)

  L'application f est donc linéaire.

- Démontrons que f est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$

  Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

  – Comme $\deg(P) \leqslant 2$, alors :

    × $\deg(P') \leqslant 1$ donc $\deg\big((1 - X - X^2)\ P'\big) \leqslant 3$.

    × $\deg\left(\frac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ Q''\right) \leqslant 3$.

    On en déduit : $\deg\left((1 - X - X^2)\ P'(X) + \frac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ P''(X)\right) \leqslant 3$.

Commentaire

- Rappelons tout d'abord les propriétés à connaître concernant le degré des polynômes.
Si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ alors :

$$\boxed{\deg\big(P \times Q\big) \ = \ \deg(P) + \deg(Q)} \qquad \boxed{\deg\big(P + Q\big) \ \leqslant \ \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)}$$

- L'argument de degré déroulé dans la démonstration ci-dessus permet généralement de conclure que $f(P)$ est un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$. Ce n'est malheureusement pas le cas ici et il faut donc faire une étude plus précise (*cf* ci-dessous).

– Comme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, il existe $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $P = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2$.
Notons $R = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1$. On a alors $P = R + a_2 \cdot P_2$ et par linéarité de f :

$$f(R + a_2 \cdot P_2) \ = \ f(R) + a_2 \cdot f(P_2)$$

En utilisant la méthodologie précédente, on démontre : $\deg\big(f(R)\big) \leqslant 2$.
Il reste alors à déterminer $\deg\big(f(P_2)\big)$. Or :

$$\begin{aligned}\Big(f(P_2)\Big)(X) &= (1 - X - X^2)\ P_2'(X) + \frac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ P_2''(X) \\ &= 2X\ (1 - X - X^2) + \cancel{2}\ \frac{1}{\cancel{2}}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3) \\ &= 2X - 2X^2 - \cancel{2X^3} - 1 - X + 3X^2 + \cancel{2X^3} \ = \ -1 + X + X^2\end{aligned}$$

Ainsi, $\deg\big(f(P_2)\big) = 2$ et d'après ce qui précède : $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est bien un endomorphisme de } \mathbb{R}_2[X].}$$ □

2. Déterminer la matrice A représentative de f dans la base canonique de E.

Démonstration.

- $$\begin{aligned}\Big(f(P_0)\Big)(X) &= (1 - X - X^2)\ P_0'(X) + \frac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ P_0''(X) \\ &= 0 \qquad \textit{(car } P_0'(X) = 0 \textit{ et } P_0''(X) = 0\textit{)}\end{aligned}$$
Ainsi : $f(P_0) = 0 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(P_0,P_1,P_2)}\big(f(P_0)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $$\begin{aligned}\Big(f(P_1)\Big)(X) &= (1 - X - X^2)\ P_1'(X) + \frac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ P_1''(X) \\ &= 1 - X - X^2 \qquad \textit{(car } P_1'(X) = 1 \textit{ et } P_1''(X) = 0\textit{)}\end{aligned}$$
Ainsi : $f(P_1) = 1 \cdot P_0 - 1 \cdot P_1 - 1 \cdot P_2$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(P_0,P_1,P_2)}\big(f(P_1)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- $$\begin{aligned}\Big(f(P_2)\Big)(X) &= (1 - X - X^2)\ P_2'(X) + \frac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ P_2''(X) \\ &= -1 + X + X^2 \qquad \textit{(le calcul a déjà été effectué au-dessus)}\end{aligned}$$
Ainsi : $f(P_1) = -1 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 1 \cdot P_2$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(P_0,P_1,P_2)}\big(f(P_2)\big) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } A = \mathrm{Mat}_{(P_0,P_1,P_2)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.}$$ □

3. Montrer : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Or :

$$\begin{array}{rcll} A \times A = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} & \Leftrightarrow & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}\big(0_{\mathscr{L}(E)}\big) & \textit{(par définition de } A\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}\big(0_{\mathscr{L}(E)}\big) & \\ & \Leftrightarrow & f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} & \textit{(car } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\cdot) \textit{ est un isomorphisme)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}.}$$

□

4. Démontrer que f n'est pas bijectif.

Démonstration.
La matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f)$ est non inversible car elle possède une colonne constituée uniquement de 0.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'application } f \text{ n'est pas bijective.}}$$

□

5. a) Déterminer des bases de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ ainsi que les dimensions de ces espaces vectoriels.

Démonstration.
Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

- Il existe donc $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $P = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2$.

  Notons alors $U = \mathrm{Mat}_{(P_0,P_1,P_2)}(P) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

- On a alors :

$$\begin{array}{rcl} P \in \mathrm{Ker}(f) & \Longleftrightarrow & f(P) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\ & \Longleftrightarrow & A\,U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} a_1 & - & a_2 & = & 0 \\ -\, a_1 & + & a_2 & = & 0 \\ -\, a_1 & + & a_2 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L1}}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} a_1 & - & a_2 & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow & \{\ a_1 = a_2 \end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Ker}(f) & = & \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid f(P) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}\} \\
& = & \{a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 \in \mathbb{R}_2[X] \mid a_1 = a_2\} \\
& = & \{a_0 \cdot P_0 + a_2 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 \mid (a_0, a_2) \in \mathbb{R}^2\} \\
& = & \{a_0 \cdot P_0 + a_2 \cdot (P_1 + P_2) \mid (a_0, a_2) \in \mathbb{R}^2\} \ = \ \mathrm{Vect}\,(P_0, P_1 + P_2)
\end{array}$$

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,(P_0, P_1 + P_2)}$$

Commentaire

Il faut faire attention aux objets manipulés. On doit déterminer $E_0(f) = \mathrm{Ker}(f)$, noyau d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$. On doit donc obtenir un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$. Si P et $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(P)$ sont deux représentations différentes du même polynôme P, cela n'autorise pas pour autant à écrire l'égalité entre ces deux éléments :

$$\underbrace{a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2}_{\in \mathbb{R}_2[X]} \ \cancel{=} \ \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}_{\in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad \underbrace{\mathrm{Vect}\,(P_0, P_1 + P_2)}_{E_0(f)} \ \cancel{=} \ \underbrace{\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}_{E_0(A)}$$

- La famille $\mathcal{H}_1 = \big(P_0, P_1 + P_2\big)$ est :
  - × génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$,
  - × libre car constituée uniquement de deux polynômes non proportionnels.

  On en déduit que $\mathcal{H}_1$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

$$\boxed{\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = \mathrm{Card}\,\big(\mathcal{H}_1\big) = 2}$$

- D'autre part :

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Im}(f) & = & \mathrm{Vect}\,(f(P_0), f(P_1), f(P_2)) \\
& = & \mathrm{Vect}\,\big(0_{\mathbb{R}_2[X]},\ P_0 - P_1 - P_2,\ -P_0 + P_1 + P_2\big) \\
& = & \mathrm{Vect}\,(P_0 - P_1 - P_2)
\end{array}$$

  La famille $\mathcal{H}_2 = \big(P_0 - P_1 - P_2\big)$ est :
  - × génératrice de $\mathrm{Im}(f)$,
  - × libre car constituée uniquement d'un polynôme non nul.

  On en déduit que $\mathcal{H}_2$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

$$\boxed{\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = \mathrm{Card}\,\big(\mathcal{H}_2\big) = 1}$$

Commentaire

La dimension de $\mathrm{Im}(f)$ peut aussi être obtenue à l'aide du théorème du rang.
Plus précisément :

$$\begin{array}{ccccc}
\dim(E) & = & \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) & + & \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) \\
\shortparallel & & \shortparallel & & \\
3 & & 2 & &
\end{array}$$

Ainsi, $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = 3 - 2 = 1$.

□

b) Démontrer que la famille $\mathcal{F} = \big(f(P_1), P_0\big)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :
  × $f\big(f(P_1)\big) = (f \circ f)(P_1) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$ d'après la question ***2***.
  × $f(P_0) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$ d'après la question ***3***.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \big(f(P_1), P_0\big) \text{ est une famille d'éléments de } \mathrm{Ker}(f).}$$

- De plus : $f(P_1) = P_0 - P_1 - P_2$.
  La famille $\mathcal{F} = \big(P_0, P_0 - P_1 - P_2\big)$ est :
  × libre car constituée uniquement de deux polynômes non proportionnels,
  × telle que : $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 2 = \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \mathcal{F} \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(f).}$$

□

6. a) Montrer que la famille $\mathcal{G} = \big(P_1, f(P_1), P_0\big)$ est une base de E.

Démonstration.

- Démontrons que la famille $\big(P_1, f(P_1), P_0\big)$ est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons : $\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot f(P_1) + \lambda_3 \cdot P_0 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$. $(*)$

$$\begin{array}{lcrcl}
\text{Or : } (*) & \Longleftrightarrow & \lambda_1 \cdot P_1(X) + \lambda_2 \cdot \big(f(P_1)\big)(X) + \lambda_3 \cdot P_0(X) & = & 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\
& \Longleftrightarrow & \lambda_1 \cdot X + \lambda_2 \cdot (1 - X - X^2) + \lambda_3 \cdot 1 & = & 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\
& \Longleftrightarrow & (\lambda_2 + \lambda_3) \cdot 1 + (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot X - \lambda_2 \cdot X^2 & = & 0_{\mathbb{R}_2[X]}
\end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl}
 & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\
\lambda_1 & - & \lambda_2 & & & = & 0 \\
 & - & \lambda_2 & & & = & 0
\end{array}\right.$$

$$\overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl}
\lambda_1 & - & \lambda_2 & & & = & 0 \\
 & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\
 & - & \lambda_2 & & & = & 0
\end{array}\right.$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl}
\lambda_1 & - & \lambda_2 & & & = & 0 \\
 & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\
 & & & & \lambda_3 & = & 0
\end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \right.$$

(par remontées successives)

$$\boxed{\text{La famille } \big(P_1, f(P_1), P_0\big) \text{ est donc libre.}}$$

- La famille $\mathcal{G}$ est :
  × libre.
  × telle que : $\mathrm{Card}\big(\mathcal{G}\big) = 3 = \dim\big(\mathbb{R}_2[X]\big)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \mathcal{G} \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X].}$$

□

b) Déterminer la matrice de f dans la base $\big(P_1, f(P_1), P_0\big)$.

Démonstration.

- $f(P_1) = 0 \cdot P_1 + 1 \cdot f(P_1) + 0 \cdot P_0$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(P_1,f(P_1),P_0)}\big(f(P_1)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $f\big(f(P_1)\big) = 0 \cdot P_1 + 0 \cdot f(P_1) + 0 \cdot P_0$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(P_1,f(P_1),P_0)}\Big(f\big(f(P_1)\big)\Big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $f(P_0) = 0 \cdot P_1 + 0 \cdot f(P_1) + 0 \cdot P_0$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(P_1,f(P_1),P_0)}\big(f(P_0)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathrm{Mat}_{(P_1,f(P_1),P_0)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

Partie II

On note désormais E un espace vectoriel **quelconque** de dimension 3.
On considère dans la suite f un endomorphisme de E différent de l'endomorphisme nul de E.

7. Montrer : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

Démonstration.
On procède par double implication.

($\Leftarrow$) Supposons $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
Il s'agit de démontrer : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$ ce qui signifie : $\forall x \in E$, $(f \circ f)(x) = 0_E$.
Soit $x \in E$. Alors :

$$\begin{array}{rcll} (f \circ f)(x) & = & f(f(x)) & \\ & = & 0_E & \textit{(car } f(x) \in \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)\textit{)} \end{array}$$

Ainsi : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

$$\boxed{\text{On a bien démontré : } \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f) \ \Rightarrow\ f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}.}$$

Commentaire

Cette question est plus théorique que celles de la première Partie. Dans la deuxième partie, l'endomorphisme f n'est pas connu. On connaît simplement des propriétés sur f et on cherche à en démontrer de nouvelles. Ce type d'exercice d'algèbre théorique peut donc paraître un peu abrupte. Pourtant, on se rend compte, à la lecture de cette démonstration, que de tels exercices peuvent donner lieu à des questions très simples. L'idée est ici de vérifier que les définitions de base (comme celles du noyau et de l'image d'une application linéaire) sont bien connues. En déroulant ces définitions, on obtient le résultat.

- Supposons : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
Il s'agit de démontrer : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$.
Il existe donc $x \in E$ tel que : $y = f(x)$. Alors :

$$\begin{array}{rcll} f(y) & = & f(f(x)) & \\ & = & (f \circ f)(x) \ = \ 0_E & \textit{(car } f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}\textit{)} \end{array}$$

Ainsi, $y \in \mathrm{Ker}(f)$.
On en conclut : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

$$\boxed{\text{On a bien démontré : } f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} \ \Rightarrow\ \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f).}$$

□

Commentaire

- Insistons sur la facilité de cette démonstration. Comme expliqué dans la remarque précédente, il s'agit essentiellement de mettre en place la structure de démonstration et de dérouler les définitions.
- Précisons la manière d'agir.

1 `Soit` $y \in \mathrm{Im}(f)$.
2 `Il existe donc` $x \in E$ `tel que :` $y = f(x)$. `Alors :`
3 $\qquad f(y) = \dots$
4 $\qquad\qquad = \dots$
5 $\qquad\qquad = 0_E$
6 `Ainsi,` $y \in \mathrm{Ker}(f)$.

  × Les lignes 1 et 6 correspondent à la mise en place de la structure de démonstration : il s'agit de démontrer une inclusion. On choisit donc un élément dans $\mathrm{Im}(f)$ et on démontre qu'il est dans $\mathrm{Ker}(f)$.
  × La ligne 2 correspond au déroulé de la définition de l'image d'une application.
  Dire : $y \in \mathrm{Im}(f)$ c'est exactement dire que y s'écrit sous la forme $f(x)$ pour un $x \in E$.
  × La ligne 3 correspond au déroulé de la définition du noyau d'une application linéaire. Dire : $y \in \mathrm{Ker}(f)$ c'est exactement dire : $f(y) = 0_E$. Cela permet d'écrire le début de la ligne 3 ainsi que le résultat en ligne 5.

  C'est seulement à ce moment que l'on rentre dans la phase de démonstration à proprement parler et que l'on s'intéresse aux hypothèses (ici, le fait que l'on ait : $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$).
- Le message est clair : sur les 6 lignes de rédaction, 4 proviennent de la présentation et seules 2 correspondent à la démonstration. Il n'est donc pas acceptable de ne pas savoir **commencer** ce type de questions, car cela démontre un défaut de connaissance du cours (définitions du chapitre et / ou structures de démonstration).

On suppose dans les questions ***8.*** et ***9.*** : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

8. a) Comparer les dimensions de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Démonstration.
Comme $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$ alors, d'après la question précédente : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) \leqslant \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big).}$$ □

b) Déterminer alors précisément les dimensions de ces deux espaces vectoriels.

Démonstration.
Notons $m = \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)$.

- D'après le théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc} \dim(E) & = & \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) & + & \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ 3 & & & & m \end{array}$$

  Ainsi, $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = 3 - m$.

- D'après la question précédente : $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = m \leqslant 3 - m = \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)$. Or :

$$m \leqslant 3 - m \quad \Leftrightarrow \quad 2m \leqslant 3 \quad \Leftrightarrow \quad m \leqslant \frac{3}{2}$$

Ainsi, seuls deux cas se présentent :
  - si $m = 0$
    Remarquons :
    × $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = 3 - m = 3 = \dim(E)$,
    × $\mathrm{Ker}(f) \subset E$.
    On en déduit : $\mathrm{Ker}(f) = E$. Autrement dit :

$$\forall x \in E, \ f(x) = 0_E$$

    C'est impossible car on a supposé dans l'énoncé : $f \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.
  - si $m = 1$ alors $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = 3 - m = 2$.

$$\boxed{\text{Finalement, } \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = 2 \text{ et } \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = 1.}$$

□

9. Soient $u \notin \mathrm{Ker}(f)$ et $v \in \mathrm{Ker}(f) \setminus \mathrm{Im}(f)$.

a) Montrer que la famille $\mathcal{F} = (f(u), v)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :
  × $f\big(f(u)\big) = (f \circ f)(u) = 0_E$ car $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
  × $f(v) = 0_E$ car $v \in \mathrm{Ker}(f)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } (f(u), v) \text{ est une famille d'éléments de } \mathrm{Ker}(f).}$$

- Démontrons que la famille $(f(u), v)$ est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. On suppose : $\lambda_1 \cdot f(u) + \lambda_2 \cdot v = 0_E$. $(*)$
  Deux cas se présentent alors :
  × si $\lambda_2 \neq 0$ alors :

$$v = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot f(u) = f\left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot u\right)$$

  On en conclut $v \in \mathrm{Im}(f)$.
  C'est impossible car on suppose dans l'énoncé : $v \notin \mathrm{Im}(f)$.
  × si $\lambda_2 = 0$ alors l'égalité $(*)$ se réécrit enfin :

$$\lambda_2 \cdot f(u) = 0_E$$

  Et comme $f(u) \neq 0_E$ alors $\lambda_2 = 0$. Ainsi, on a bien démontré :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

- La famille $\mathcal{F} = \big(f(u), v\big)$ est :
  × libre,
  × telle que : $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 2 = \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \big(f(u), v\big) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(f).}$$

□

b) Montrer que la famille $(u, f(u), v)$ est une base de E.

Démonstration.

- Démontrons que la famille $(u, f(u), v)$ est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. On suppose : $\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot f(u) + \lambda_3 \cdot v = 0_E$. $(*)$

$$\begin{array}{lrcll} \text{On a alors} & f\big(\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot f(u) + \lambda_3 \cdot v\big) & = & f\big(0_E\big) & \textit{(en appliquant } f\textit{)} \\ \text{donc} & \lambda_1 \cdot f(u) + \lambda_2 \cdot f\big(f(u)\big) + \lambda_3 \cdot f(v) & = & 0_E & \textit{(par linéarité de } f\textit{)} \\ \text{et} & \lambda_1 \cdot f(u) & = & 0_E & \textit{(car } f\big(f(u)\big) = 0_E \textit{ et } f(v) = 0_E\textit{)} \\ \text{ainsi} & \lambda_1 & = & 0 & \textit{(car } f(u) \neq 0_E \textit{ puisque } u \notin \mathrm{Ker}(f)\textit{)} \end{array}$$

- L'égalité $(*)$ se réécrit alors :
$$\lambda_2 \cdot f(u) + \lambda_3 \cdot v = 0_E$$
  Or, la famille $\big(f(u), v\big)$ est libre car c'est une base de $\mathrm{Ker}(f)$. On en déduit : $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
  Finalement, on a démontré :
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$
$$\boxed{\text{La famille } \big(u, f(u), v\big) \text{ est donc libre.}}$$

- La famille $\mathcal{F} = \big(u, f(u), v\big)$ est :
  × libre,
  × telle que : $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 3 = \dim(E)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \big(u, f(u), v\big) \text{ est une base de } E.}$$

□

c) Déterminer la matrice de f dans la base $(u, f(u), v)$.

Démonstration.

- $f(u) = 0 \cdot u + 1 \cdot f(u) + 0 \cdot v$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(u,f(u),v)}\big(f(u)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $f\big(f(u)\big) = 0 \cdot u + 0 \cdot f(u) + 0 \cdot v$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(u,f(u),v)}\Big(f\big(f(u)\big)\Big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $f(v) = 0 \cdot u + 0 \cdot f(u) + 0 \cdot v$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(u,f(u),v)}\big(f(v)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathrm{Mat}_{(u,f(u),v)}\big(f\big) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

Commentaire

La matrice obtenue dans cette question est la même que celle obtenue en ***6.b)***. C'est logique : la **Partie I** de cet exercice n'est qu'une illustration du résultat plus général démontré dans la **Partie II**. C'est une construction classique aux concours : avant d'aborder le résultat dans toute sa généralité, on laisse le candidat se familiariser en lui proposant de travailler sur un exemple simple.

Exercice 2 (EML 97)

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce truquée telle que la probabilité d'apparition de « pile » soit égale à p, $p \in \,]0,1[$.
On pourra noter $q = 1 - p$.
Soit N un entier naturel non nul fixé.
On effectue N lancers du dé ; si n est le nombre de « 6 » obtenus, on lance alors n fois la pièce.

On définit trois variables aléatoires X, Y, Z de la manière suivante :
× Z indique le nombre de « 6 » obtenus aux lancers du dé,
× X indique le nombre de « piles » obtenus aux lancers de la pièce,
× Y indique le nombre de « faces » obtenues aux lancers de la pièce.

Ainsi, $X + Y = Z$ et, si Z prend la valeur 0, alors X et Y prennent la valeur 0.

1. Préciser la loi de Z, son espérance et sa variance.

Démonstration.

- La première partie de l'expérience consiste en la succession de N épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $\dfrac{1}{6}$ (probabilité d'obtenir 6 avec un dé équilibré).
- La v.a.r. Z est le nombre de succès obtenus lors de cette expérience.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit : } Z \hookrightarrow \mathcal{B}\left(N, \dfrac{1}{6}\right). \\ \text{D'où : } \mathbb{E}(Z) = N\,\dfrac{1}{6} = \dfrac{N}{6} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Z) = N\,\dfrac{1}{6}\left(1-\dfrac{1}{6}\right) = \dfrac{5\,N}{36}.\end{array}}$$

□

2. Pour $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[Z=n]}\big([X = k]\big)$.
On distinguera les cas : $k \leqslant n$ et $k > n$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Deux cas se présentent.

- Si $n > N$, alors, comme $Z(\Omega) = [\![0, N]\!]$, on obtient : $[Z = n] = \varnothing$.
  En particulier : $\mathbb{P}\big([Z = n]\big) = 0$.

$$\boxed{\text{Si } n > N\text{, l'application probabilité } \mathbb{P}_{[Z=n]} \text{ n'est pas bien définie.}}$$

Commentaire

- On insiste lors de cette permière étape de la démonstration sur le fait que le nombre de 6 obtenus lors des N lancers successifs du dé ne peut être plus grand que N.
- Il convient donc de distinguer le cas où $n > N$ et $n \leqslant N$. On peut regretter que cette disjonction de cas n'apparaisse pas de manière explicite dans cette question. On remarque toutefois qu'elle apparaît dans la suivante, ce qui peut permettre d'y penser.

- Si $n \in [\![0, N]\!]$, alors : $\mathbb{P}([Z = n]) \neq 0$ et ainsi, l'application probabilité $\mathbb{P}_{[Z=n]}$ est bien définie.
  Si l'événement $[Z = n]$ est réalisé, c'est qu'on a obtenu n fois 6 lors de la première partie de l'expérience. Deux cas se présentent alors.
  – Si $n = 0$ alors la v.a.r. X prend la valeur 0 (comme on n'effectue pas de lancer de la pièce, on n'obtient pas de « pile »). Ainsi :

$$\mathbb{P}_{[Z=0]}\big([X = 0]\big) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{[Z=0]}\big([X = k]\big) = 0 \quad \text{si } k \neq 0 \quad (*)$$

– Si $n \in [\![1, N]\!]$ alors la deuxième partie de l'expérience consiste à effectuer n lancers de la pièce truquée. Plus précisément :

× la deuxième partie de l'expérience consiste en la succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p (probabilité d'obtenir « pile » avec la pièce truquée),

× la v.a.r. X est le nombre de succès obtenus lors de cette deuxième partie d'expérience.

Ainsi, la loi conditionnelle de X sachant l'événement $[Z = n]$ est la loi $\mathcal{B}(n, p)$.

Précisons ce dernier point. Soit $k \in \mathbb{N}$.

× Si $k \in [\![0, n]\!]$, alors :

$$\mathbb{P}_{[Z=n]}([X = k]) \; = \; \binom{n}{k} \, p^k \, (1-p)^{n-k}$$

× Si $k > n$, alors :

$$\mathbb{P}_{[Z=n]}([X = k]) \; = \; 0$$

On remarque enfin que lorsque $n = 0$, les deux égalités précédentes coïncident avec celles écrites à la ligne $(*)$.

On en conclut alors :

$$\forall n \in [\![0, N]\!], \, \forall k \in \mathbb{N}, \, \mathbb{P}_{[Z=n]}([X = k]) = \begin{cases} \dbinom{n}{k} \, p^k \, (1-p)^{n-k} & \text{si } k \in [\![0, n]\!] \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

Commentaire

- Cette question est à considérer comme difficile. En effet, il faut faire preuve d'initiative pour ne pas oublier les cas non explicités par l'énoncé.
- Le résultat de cette question n'est pas fourni dans l'énoncé. Cela pourrait être bloquant pour toute la suite de l'énoncé. Cependant, la question suivante fournit la loi du couple (X, Z) ce qui permet de traiter le reste de l'énoncé. Mieux : connaissant la loi du couple (X, Z) et connaissant la loi de Z, on peut obtenir la loi conditionnelle de X sachant $[Z = n]$. On peut donc, au brouillon, se servir du résultat de la question ***3.*** pour vérifier celui qu'on doit obtenir en question ***2***.

□

3. Montrer, pour tout couple d'entiers naturels (k, n) :

× si $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant N$ alors $\mathbb{P}([X = k] \cap [Z = n]) = \dbinom{n}{k} \dbinom{N}{n} p^k \, (1-p)^{n-k} \left(\dfrac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\dfrac{1}{6}\right)^n$.

× si $n > N$ ou $k > n$ alors $\mathbb{P}([X = k] \cap [Z = n]) = 0$.

Démonstration.
Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$. Deux cas se présentent.

- Si $n > N$, alors comme vu dans la question précédente : $[Z = n] \; = \; \varnothing$. On en déduit :

$$[X = k] \cap [Z = n] \; = \; [X = k] \cap \varnothing \; = \; \varnothing$$

En particulier, on obtient :

$$\mathbb{P}([X = k] \cap [Z = n]) \; = \; \mathbb{P}(\varnothing) \; = \; 0$$

- Si $n \leqslant N$, remarquons tout d'abord :

L'événement $[X = k] \cap [Z = n]$ est réalisé

$\Leftrightarrow$ L'événement $[X = k]$ est réalisé et l'événement $[Z = n]$ est réalisé

$\Leftrightarrow$ On obtient k « piles » lors des lancers de la pièce et on obtient n fois la face 6 lors des N lancers de dés

$\Leftrightarrow$ On effectue n lancers de la pièce et on obtient k « piles » lors de ces lancers

Deux nouveaux cas se présentent alors.

× Si $k \notin [\![0, n]\!]$, alors :

$$[X = k] \cap [Z = n] = \varnothing$$

En effet, on ne peut pas obtenir un nombre $k \notin [\![0, n]\!]$ de « piles » lorsque l'on effectue n lancers de pièces. En particulier :

$$\mathbb{P}([X = k] \cap [Z = n]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

× Si $k \in [\![0, n]\!]$, alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X = k] \cap [Z = n]) &= \mathbb{P}([Z = n])\, \mathbb{P}_{[Z=n]}([X = k]) \\ &= \binom{N}{n} \left(\frac{1}{6}\right)^n \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{N-n} \times \binom{n}{k}\, p^k\, (1-p)^{n-k} \quad \textit{(d'après la question précédente)} \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, on obtient :

$$\boxed{\mathbb{P}([X = k] \cap [Z = n]) = \begin{cases} \binom{n}{k} \binom{N}{n}\, p^k\, (1-p)^{n-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n \leqslant N \\ 0 & \text{si } n > N \text{ ou } k > n \end{cases}}$$

□

4. Calculer la probabilité $\mathbb{P}([X = 0])$.

Démonstration.
La famille $([Z = n])_{n \in [\![0, N]\!]}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X = 0]) &= \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}([X = 0] \cap [Z = n]) \\ &= \sum_{n=0}^{N} \binom{n}{0} \binom{N}{n}\, p^0\, (1-p)^{n-0} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n \quad \textit{(d'après la question précédente)} \\ &= \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} (1-p)^n \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} \left(\frac{1}{6}\,(1-p)\right)^n \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \\ &= \left(\frac{1}{6}\,(1-p) + \frac{5}{6}\right)^N = \left(1 - \frac{1}{6}\,p\right)^N \quad \textit{(par formule du binôme de Newton)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([X = 0]) = \left(1 - \frac{p}{6}\right)^N}$$

□

5. Montrer pour tout couple d'entiers naturels (k, n) tel que $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant N$:

$$\binom{n}{k}\binom{N}{n} = \binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k}$$

En déduire la probabilité $\mathbb{P}([X = k])$.

Démonstration.
Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que : $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant N$.

- D'une part :

$$\binom{n}{k}\binom{N}{n} = \frac{\cancel{n}!}{k!\ (n-k)!} \times \frac{N!}{\cancel{n}!\ (N-n)!} = \frac{N!}{k!\ (n-k)!\ (N-n)!}$$

- D'autre part :

$$\binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k} = \frac{N!}{k!\ \cancel{(N-k)}!} \times \frac{\cancel{(N-k)}!}{(n-k)!\ \big((N-k)-(n-k)\big)!} = \frac{N!}{k!\ (n-k)!\ (N-n)!}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } (n,k) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } 0 \leqslant k \leqslant n \leqslant N, \text{ on obtient : } \binom{n}{k}\binom{N}{n} = \binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k}.}$$

Commentaire

Cette relation sur les coefficients binomiaux peut aussi se démontrer par dénombrement.
Pour ce faire, on considère un ensemble E à N éléments.
(on peut penser à une pièce qui contient N individus)
On souhaite alors construire une partie P à n éléments de cet ensemble contenant k éléments distingués *(on peut penser à choisir dans la pièce un groupe de n individus dans lequel figurent k représentants de ces individus)*.
Pour ce faire, on peut procéder de deux manières :

1) On choisit d'abord la partie à n éléments de E : $\binom{N}{n}$ possibilités.

On distingue ensuite k éléments de cet ensemble P : $\binom{n}{k}$ possibilités.

(on choisit d'abord les n individus et on élit ensuite k représentants de ces individus)

Ainsi, il y a $\binom{N}{n}\binom{n}{k}$ manières de construire P.

2) On choisit d'abord, dans E, les k éléments à distinguer : $\binom{N}{k}$ possibilités.

On choisit ensuite $n-k$ éléments dans E, pour former P, en y ajoutant les k éléments précédents : $\binom{N-k}{n-k}$ possibilités.

(on choisit d'abord les k représentants puis on leur adjoint un groupe de $n-k$ individus)

Ainsi, il y a $\binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k}$ manières de construire P.

On retrouve ainsi le résultat souhaité.

- Remarquons maintenant : $X(\Omega) \subset [\![0, N]\!]$.
En effet, il y a au plus N lancers de pièces. Ainsi, le nombre de « piles » obtenus au cours de cette expérience est un entier positif majoré par N.

$$\boxed{\text{En particulier, pour tout } k > N : \mathbb{P}\big([X = k]\big) = 0.}$$

- Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \leqslant N$.
  La famille $([Z = n])_{n \in [\![0,N]\!]}$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\big([X = k] \big) \\
= \ & \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}\big([Z = n] \cap [X = k] \big) \\
= \ & \sum_{\substack{n = 0 \\ k \in [\![0,n]\!]}}^{N} \mathbb{P}\big([X = k] \cap [Z = n] \big) \ + \ \cancel{\sum_{\substack{n = 0 \\ k \notin [\![0,n]\!]}}^{N} \mathbb{P}\big([X = k] \cap [Z = n] \big)} && \textit{(car, d'après la question précédente, pour } k \notin [\![0,n]\!] \textit{ : } \mathbb{P}\big([X = k] \cap [Z = n] \big) = 0\textit{)} \\
= \ & \sum_{n=k}^{N} \mathbb{P}\big([X = k] \cap [Z = n] \big)
\end{aligned}$$

- La dernière ligne est obtenue en constatant que pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} n \in [\![0,N]\!] \\ k \in [\![0,n]\!] \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \leqslant n \leqslant N \\ 0 \leqslant k \leqslant n \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \leqslant n \leqslant N \\ k \leqslant n \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \ k \leqslant n \leqslant N \right.$$

- Ainsi, en reprenant les égalités précédentes :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\big([X = k] \big) \\
= \ & \sum_{n=k}^{N} \mathbb{P}\big([X = k] \cap [Z = n] \big) \\
= \ & \sum_{n=k}^{N} \binom{n}{k} \binom{N}{n} \ p^k (1-p)^{n-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^{n} && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{3.}}\textit{)} \\
= \ & \sum_{n=k}^{N} \binom{N}{k} \binom{N-k}{n-k} \ p^k \ (1-p)^{n-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^{n} && \textit{(d'après ce qui précède)} \\
= \ & \binom{N}{k} \ p^k \sum_{n=k}^{N} \binom{N-k}{n-k} \ (1-p)^{n-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^{n} \\
= \ & \binom{N}{k} \ p^k \sum_{n=0}^{N-k} \binom{N-k}{n} \ (1-p)^{n} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-(n+k)} \left(\frac{1}{6}\right)^{n+k} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
= \ & \binom{N}{k} \ p^k \left(\frac{1}{6}\right)^{k} \sum_{n=0}^{N-k} \binom{N-k}{n} \ (1-p)^{n} \left(\frac{5}{6}\right)^{(N-k)-n} \left(\frac{1}{6}\right)^{n} \\
= \ & \binom{N}{k} \left(\frac{p}{6}\right)^{k} \sum_{n=0}^{N-k} \binom{N-k}{n} \left(\frac{1-p}{6}\right)^{n} \left(\frac{5}{6}\right)^{(N-k)-n} \\
= \ & \binom{N}{k} \left(\frac{p}{6}\right)^{k} \left(\frac{1-p}{6} + \frac{5}{6}\right)^{N-k} && \textit{(par formule du binôme de Newton)} \\
= \ & \binom{N}{k} \left(\frac{p}{6}\right)^{k} \left(1 - \frac{p}{6}\right)^{N-k}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in [\![0,N]\!], \, \mathbb{P}([X = k]) = \binom{N}{k} \left(\frac{p}{6}\right)^{k} \left(1 - \frac{p}{6}\right)^{N-k}}$$

□

6. Montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre $(N, \frac{p}{6})$.
Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?

Démonstration.

- D'après la question précédente :
  × $X(\Omega) \subset [\![0, N]\!]$,
  × $\forall k \in [\![0, N]\!],\ \mathbb{P}\big([X = k]\big) = \dbinom{N}{k} \left(\dfrac{p}{6}\right)^k \left(1 - \dfrac{p}{6}\right)^{N-k}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(N, \frac{p}{6}\right).}$$

- Pour déterminer la loi de Y, il suffit de constater que les v.a.r. X et Y jouent un rôle symétrique. On raisonne alors de la même manière que pour l'obtention de la loi de X en remplaçant p par q.

$$\boxed{\text{On obtient alors : } Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(N, \frac{q}{6}\right).}$$

□

7. Est-ce que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes ? Déterminer la loi du couple (X, Y).

Démonstration.

- Montrons que les v.a.r. X et Y ne sont pas indépendantes.
  × Remarquons tout d'abord : $[X = N] \cap [Y = N] = \varnothing$.

  En effet, l'événement $[X = N] \cap [Y = N]$ est réalisé si et seulement si on obtient à la fois N « piles » et N « faces » lors des lancers de la pièce. Or, comme il y a au maximum N lancers, on ne peut obtenir à la fois N « piles » et N « faces ».

$$\boxed{[X = N] \cap [Y = N] = \varnothing}$$

  × On obtient alors :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}\big([X = N] \cap [Y = N]\big) & \neq & \mathbb{P}\big([X = N]\big) & \times & \mathbb{P}\big([Y = N]\big) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ 0 & & p^N & & q^N \end{array}$$

*(d'après la question **6.**)*

$$\boxed{\text{Ainsi, les v.a.r. } X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

Commentaire

- Dans les énoncés, on trouvera souvent la question : « les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ? ». Ainsi énoncée, cette question attend généralement la réponse : `NON`.
- Il s'agit alors de démontrer la négation de la propriété d'indépendance. Or :

$$\begin{array}{cl} & \texttt{NON}(\ \forall x \in X(\Omega),\ \forall y \in Y(\Omega),\quad \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbb{P}([X = x]) \times \mathbb{P}([Y = y])\ ) \\ \Leftrightarrow & \exists x \in X(\Omega),\ \exists y \in Y(\Omega),\quad \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) \neq \mathbb{P}([X = x]) \times \mathbb{P}([Y = y]) \end{array}$$

  Pour démontrer que deux v.a.r. ne sont pas indépendantes, il s'agit d'exhiber un couple $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ tel que : $\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) \neq \mathbb{P}([X = x]) \times \mathbb{P}([Y = y])$.
- En particulier, on pourra chercher $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ tel que :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}\big([X = x] \cap [Y = y]\big) & \neq & \mathbb{P}\big([X = x]\big) & \times & \mathbb{P}\big([Y = y]\big) \\ \shortparallel & & \nparallel & & \nparallel \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

- Déterminons la loi du couple (X, Y).
  - $\times$ D'après la question précédente, on peut considérer : $X(\Omega) = [\![0, N]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![0, N]\!]$.

$$\boxed{X(\Omega) = [\![0, N]\!] \text{ et } Y(\Omega) = [\![0, N]\!]}$$

  - $\times$ Soit $(k, \ell) \in [\![0, N]\!]^2$.
    On obtient alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = \ell]) &= \mathbb{P}([X = k] \cap [Z - X = \ell]) && \textit{(car } Z = X + Y\textit{)} \\ &= \mathbb{P}([X = k] \cap [Z = \ell + k]) \end{aligned}$$

Deux cas se présentent alors :

- si $\ell + k > N$, alors : $[Z = \ell + k] = \varnothing$. D'où :

$$[X = k] \cap [Z = \ell + k] \; = \; [X = k] \cap \varnothing \; = \; \varnothing$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}([X = k] \cap [Y = \ell]) \; = \; \mathbb{P}([X = k] \cap [Z = \ell + k]) \; = \; \mathbb{P}(\varnothing) \; = \; 0$$

- si $\ell + k \leqslant N$, alors, d'après la question ***3.*** :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = \ell]) &= \mathbb{P}([X = k] \cap [Z = \ell + k]) \\ &= \binom{\ell + k}{k} \binom{N}{\ell + k} p^k \, (1 - p)^{(\ell + \cancel{k}) - \cancel{k}} \left(\frac{5}{6}\right)^{N - (\ell + k)} \left(\frac{1}{6}\right)^{\ell + k} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Finalement, pour tout } (k, \ell) \in \mathbb{N}^2 : \\ \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = \ell]) = \begin{cases} \dbinom{\ell + k}{k} \dbinom{N}{\ell + k} p^k \, (1 - p)^\ell \left(\dfrac{5}{6}\right)^{N - \ell - k} \left(\dfrac{1}{6}\right)^{\ell + k} & \text{si } \ell + k \leqslant N \\ 0 & \text{si } \ell + k > N \end{cases} \end{array}}$$

□

8. **Seulement pour les cubes** :
En comparant les variances de Z et de $X + Y$, déterminer la covariance du couple (X, Y).

Démonstration.

- Les v.a.r. X, Y et Z sont finies. Elles admettent donc une variance.
- Tout d'abord :

$$\mathbb{V}(X + Y) \; = \; \mathbb{V}(X) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y) + \mathbb{V}(Y)$$

Commentaire

Rappelons que cette propriétépeut se démontrer à l'aide des propriétés de l'opérateur de covariance. Plus précisément :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X + Y) &= \mathrm{Cov}\big(X + Y, X + Y\big) \\ &= \mathrm{Cov}\big(X, X + Y\big) + \mathrm{Cov}\big(Y, X + Y\big) && \textit{(par linéarité à gauche de la covariance)} \\ &= \mathrm{Cov}\big(X, X\big) + \mathrm{Cov}\big(X, Y\big) + \mathrm{Cov}\big(Y, X\big) + \mathrm{Cov}\big(Y, Y\big) && \textit{(par linéarité à droite de la covariance)} \\ &= \mathbb{V}(X) + 2\mathrm{Cov}(X, Y) + \mathbb{V}(Y) && \textit{(car on a : } \mathrm{Cov}(Y, X) = \mathrm{Cov}(X, Y)\textit{)} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcll}
2\,\mathrm{Cov}(X,Y) & = & \mathbb{V}(X+Y) - \mathbb{V}(X) - \mathbb{V}(Y) & \\
& = & \mathbb{V}(Z) - \mathbb{V}(X) - \mathbb{V}(Y) & \\
& = & \dfrac{5\,N}{36} \ - \ N\,\dfrac{p}{6}\left(1-\dfrac{p}{6}\right) \ - \ N\,\dfrac{q}{6}\left(1-\dfrac{q}{6}\right) & \textit{(d'après } \textbf{\textit{1.}} \textit{ et car } X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(N, \frac{p}{6}\right) \\
& & & \textit{ et } Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(N, \frac{q}{6}\right)\textit{)} \\
& = & \dfrac{5\,N}{36} \ - \ N\,\dfrac{p}{6}\,\dfrac{6-p}{6} \ - \ N\,\dfrac{q}{6}\,\dfrac{6-q}{6} & \\
& = & \dfrac{N}{36}\,\big(5 - p\,(6-p) - q\,(6-q)\big) & \\
& = & \dfrac{N}{36}\,\big(5 - 6p + p^2 - 6q + q^2\big) & \\
& = & \dfrac{N}{36}\,\big(5 - 6\,(p+q) + p^2 + q^2\big) & \\
& = & \dfrac{N}{36}\,\big(5 - 6 + p^2 + q^2\big) & \textit{(car } p+q=1\textit{)} \\
& = & \dfrac{N}{36}\,\big(-1 + p^2 + (1-p)^2\big) & \\
& = & \dfrac{N}{36}\,\big(\cancel{-1} + p^2 + (\cancel{1} - 2p + p^2)\big) & \\
& = & \dfrac{N}{36}\,\big(2p^2 - 2p\big) & \\
& = & \dfrac{2\,N}{36}\,p\,(1-p) &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Cov}(X,Y) = \dfrac{N\ p\ q}{36}.}$$

□

Problème (HEC 2000)

Ce problème se compose de deux parties. Si le candidat ne parvient pas à établir un résultat demandé, il l'indiquera clairement, et il pourra pour la suite admettre ce résultat.
Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.
On considère une urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n.
On tire une boule au hasard dans U_n. On note k le numéro de cette boule.

- Si k est égal à 1, on arrête les tirages.
- Si k est supérieur ou égal à 2, on enlève de l'urne U_n les boules numérotées de k à n (il reste donc les boules numérotées de 1 à $k-1$), et on effectue à nouveau un tirage dans l'urne.

On répète ces tirages jusqu'à l'obtention de la boule numéro 1.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule numéro 1. On note Y_n la variable aléatoire égale à la somme des numéros des boules tirées.
On note $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$ (respectivement $\mathbb{E}(Y_n)$ et $\mathbb{V}(Y_n)$) l'espérance et la variance de X_n (respectivement Y_n).

Dans tout le problème, $\mathbb{P}_B(A)$ désigne la probabilité conditionnelle de A sachant B, où B est un événement non négligeable.

Partie I

1. On pose : $h_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$.

Commentaire

Rigoureusement, il aurait été préférable d'écrire « pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit h_n par $h_n = \dots$ ». Tel qu'écrit ici, il semble que h_n ne soit défini que pour la valeur entière $n \in \mathbb{N}^*$ fixée initialement dans l'énoncé. Il aurait sûrement été préférable d'introduire le contexte aléatoire (description de l'expérience et des v.a.r.) seulement après la **Partie I**.

a) Montrer, pour tout entier naturel k non nul, les inégalités :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

où ln désigne le logarithme népérien.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in [k, k+1]$. Alors :

$$k \leqslant x \leqslant k+1$$

$$\text{donc} \quad \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{k+1} \quad \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)}$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($k \leqslant k+1$) :

$$\underbrace{\int_k^{k+1} \frac{1}{k}\, dx}_{= \frac{1}{k}} \geqslant \underbrace{\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx}_{= [\ \ln(x)\ ]_k^{k+1}} \geqslant \underbrace{\int_k^{k+1} \frac{1}{k}\, dx}_{= \frac{1}{k+1}}$$

$$\boxed{\text{On obtient bien : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}.}$$

□

b) En déduire les inégalités : $\ln(n+1) \leqslant h_n \leqslant 1 + \ln(n)$.

Commentaire

La remarque précédente s'applique ici. On comprend à la lecture du terme « les inégalités » qu'il y a ici une quantification cachée. Il aurait été préférable d'écrire « Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\ln(n+1) \leqslant h_n \leqslant 1 + \ln(n)$ ». S'il est étonnant de laisser une telle ambiguïté dans un énoncé de concours, il n'y a d'autre choix que d'en faire son parti et de se résigner à accepter cette présentation. C'est pourquoi on ne fera plus la remarque dans les questions suivantes même si on s'efforcera de faire apparaître les quantifications en conclusion de chaque question.

Démonstration.

- D'après ce qui précède :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On somme les encadrements précédents pour k variant de 1 à n ($n \geqslant 1$).

$$\begin{array}{llllll}
 & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
\text{donc} & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} & \leqslant & \ln(n+1) - \cancel{\ln(1)} & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \textit{(par sommation télescopique)} \\
\text{d'où} & \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} & \leqslant & \ln(n+1) & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \textit{(par décalage d'indice)} \\
\text{enfin} & h_{n+1} - 1 & \leqslant & \ln(n+1) & \leqslant & h_n \quad \textit{(par définition de } h_n\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On a donc démontré : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ h_{n+1} - 1 \leqslant \ln(n+1) \leqslant h_n.}$$

En particulier, l'inégalité de gauche de l'énoncé est démontrée.
Il reste à déterminer l'inégalité de droite.

- D'après ce qui précède : $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $h_{m+1} \leqslant 1 + \ln(m+1)$.
Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$, en considérant ces inégalités en $m = n - 1 \geqslant 1$, on obtient :

$$h_n \leqslant 1 + \ln(n)$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \ h_n \leqslant 1 + \ln(n)}$$

- Remarquons enfin :
  × $h_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} = 1$,
  × $1 + \ln(1) = 1$.

  On a donc bien : $h_1 \leqslant 1 + \ln(1)$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ln(n+1) \leqslant h_n \leqslant 1 + \ln(n).}$$

□

Commentaire

- Les questions ***1.a)*** et ***1.b)*** sont une illustration d'une méthodologie classique connue sous le nom de comparaison série-intégrale.
- L'énoncé demande de démontrer l'inégalité à partir du rang 1, ce qui n'est pas très commode (le cas $n = 1$ doit être traité à part). Ce cas n'est pas d'un grand intérêt pour la suite de l'énoncé et notamment pour la question suivante qui vise à établir un équivalent de la suite (h_n) (on peut alors choisir n dans n'importe quel voisinage de $+\infty$).

c) Déterminer un équivalent simple de h_n quand n tend vers l'infini.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- En multipliant membre à membre par $\dfrac{1}{\ln(n)} > 0$ l'inégalité obtenue en question précédente, on obtient :
$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leqslant \frac{h_n}{\ln(n)} \leqslant \frac{1}{\ln(n)} + 1$$
- Or :
  × $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \dfrac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \dfrac{\ln(n) + \ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} = 1 + \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$
  × $\dfrac{1}{\ln(n)} + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$

  Ainsi, par théorème d'encadrement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{h_n}{\ln(n)} = 1.$

$$\boxed{\text{Autrement dit : } h_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$$

Commentaire

- On prend garde de choisir initialement un entier $n \geqslant 2$ afin que la quantité $\dfrac{1}{\ln(n)}$ soit bien définie (c'est-à-dire tel que $\ln(n) \neq 0$).
- La propriété : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ est classique. Ce premier résultat est parfois complété par une étude permettant d'obtenir le début du développement asymptotique de la série harmonique. Plus précisément, on obtient :
$$h_n = \ln(n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$$
où γ $(\simeq 0,577)$, appelée constante d'Euler est la limite de la suite $\big(h_n - \ln(n)\big)$.
La démonstration la plus usuelle fait intervenir des suites adjacentes et est donc tout à fait adaptée au programme ECE. □

2. On pose : $k_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2} = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$.

a) Montrer, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, l'inégalité :

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

Démonstration.
Soit $k \geqslant 2$.

- Tout d'abord :
$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k-(k-1)}{k\,(k-1)} = \frac{1}{k\,(k-1)}$$
- D'autre part, comme : $k \geqslant (k-1)$, alors : $k^2 \geqslant k\,(k-1)$.
Ainsi, par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$, on obtient :
$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k\,(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

$$\boxed{\forall k \geqslant 2,\ \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}}$$

□

b) En déduire la majoration : $k_n \leqslant 2$.

Démonstration.

- D'après ce qui précède :
$$\forall k \geqslant 2,\ \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On somme les inégalités précédentes pour k variant de 2 à n.

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$$

donc $$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{1} - \frac{1}{n}$$ *(par sommation télescopique)*

puis $$1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$ *(en ajoutant 1 de part et d'autre)*

enfin $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ k_n \leqslant 2.}$$

□

c) Déterminer un équivalent simple de $h_n - k_n$ quand n tend vers l'infini.

Démonstration.

- D'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $-2 \leqslant -k_n \leqslant 0$. On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_n - 2 \ \leqslant\ h_n - k_n \ \leqslant\ h_n$$

On obtient alors, pour tout $n \geqslant 2$, par multiplication par $\dfrac{1}{\ln(n)} > 0$:

$$\frac{h_n}{\ln(n)} - \frac{2}{\ln(n)} \ \leqslant\ \frac{h_n - k_n}{\ln(n)} \ \leqslant\ \frac{h_n}{\ln(n)}$$

- Or :
  × $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{h_n}{\ln(n)} = 1$ car $h_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
  × $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{h_n}{\ln(n)} - \dfrac{2}{\ln(n)} = 1 - 0 = 1$.

  Ainsi, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{h_n - k_n}{\ln(n)} = 1$.

$$\boxed{\text{Finalement : } h_n - k_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$$

Commentaire

- En question ***2.***, on démontre que la suite (k_n) est négligeable devant (h_n). En effet :

$$\frac{k_n}{h_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{k_n}{\ln(n)} = \frac{h_n}{\ln(n)} - \frac{h_n - k_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - 1 = 0$$

- Pour aboutir à ce résultat, la question ***2.*** passe par trois étapes. Ce résultat peut se démontrer de manière plus directe. Notons tout d'abord que la suite (k_n) est la suite des sommes partielles associée à la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$. Cette série est convergente en tant que série de Riemann d'exposant $2 > 1$. On en déduit que la suite (k_n) est convergent. Ainsi :

$$\frac{k_n}{h_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

en tant que quotient du terme général d'une suite de limite finie par celui d'une suite de limite infinie.

□

Partie II. Étude de la variable aléatoire X_n

On note I_n la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée dans l'urne U_n.

3. a) Quelle est la loi de I_n ?

Démonstration.

- L'expérience consiste en un choix effectué de manière équiprobable parmi n issues (en l'occurrence les boules de l'urne) numérotées de 1 à n.
- La v.a.r. I_n prend la valeur du numéro obtenu lors de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en déduit : } I_n \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket).}$$

□

b) Quelle est la loi conditionnelle de X_n sachant $[I_n = 1]$?

Démonstration.
Si $[I_n = 1]$ est réalisé, c'est qu'on a obtenu la boule numérotée 1 lors du premier tirage (ce qui met fin à l'expérience). La v.a.r. X_n prend alors la valeur 1. On a ainsi :

$$\mathbb{P}_{[I_n=1]}\big([X_n = 1]\big) \ = \ 1$$

$$\boxed{\text{La loi conditionnelle de } X_n \text{ sachant } [I_n = 1] \text{ est la loi certaine égale à 1.}}$$
□

c) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \ \forall k \in \{2, \dots, n\}\,, \ \mathbb{P}_{[I_n=k]}([X_n = j]) = \mathbb{P}([X_{k-1} = j - 1])$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$, soit $j \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in [\![2, n]\!]$.

Si $[I_n = k]$ est réalisé, c'est que le premier tirage a fourni la boule numéroté k. On retire alors de l'urne les boules numérotées de k à n.
L'urne contient alors seulement les boules portant les numéros 1 à k.
Dans ce cas, l'événement $[X_n = j]$ est réalisé si et seulement si la boule numéro 1 est obtenue lors du $(j-1)^{\text{ème}}$ tirage suivant. L'urne contenant les boules numérotées de 1 à $k-1$, on en déduit que l'événement $[X_n = j]$ est réalisé si et seulement si $[X_{k-1} = j - 1]$ l'est.

$$\boxed{\text{Finalement, on a bien : } \forall n \geqslant 2, \ \forall j \in \mathbb{N}^*, \ \forall k \in [\![2, n]\!], \ \mathbb{P}_{[I_n=k]}([X_n = j]) = \mathbb{P}([X_{k-1} = j - 1]).}$$
□

4. a) Quelle est la loi de X_1 ?

Démonstration.

- La v.a.r. X_1 prend la valeur du nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule numérotée 1 dans une urne qui contient une seule boule (numérotée 1).
- Ainsi, X_1 est la v.a.r. certaine égale à 1.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X_1 \text{ suit la loi certaine égale à 1.}}$$

Commentaire

- Il est vivement conseillé de lire très précisément l'énoncé et de bien comprendre les relations de dépendance entre les différents objets introduits. Ici, l'urne U_n est les v.a.r. X_n et I_n sont toutes dépendantes de l'entier n. Cette dépendance est marquée par la présence de n en indice. La v.a.r. X_n est donc égale au nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule numéro 1, **partant d'une urne contenant de boules numérotées de** 1 **à** n.
- En ce début de partie, on étudie X_n pour les faibles valeurs de n. C'est souvent le cas : les débuts de partie commencent par des questions simples. Il est donc conseillé de ne jamais sauter une partie sans avoir attentivement lu les questions qui la débutent. C'est souvent l'occasion de prendre des points facilement et cela permet généralement de se lancer pour le reste de l'exercice.

□

b) Quel est l'événement $[X_2 = 1]$? Donner la loi de X_2, son espérance et sa variance.

Démonstration.

- L'événement $[X_2 = 1]$ est réalisé si et seulement si la boule numéro 1 est apparue dès le premier tirage, l'expérience s'effectuant dans une urne contenant initialement 2 boules.

$$\boxed{\text{Ainsi : } [X_2 = 1] = [I_2 = 1].}$$

- On a alors :

$$\mathbb{P}\big([X_2 = 1] \big) \;=\; \mathbb{P}\big([I_2 = 1] \big) \;=\; \frac{1}{2} \qquad \textit{(car } I_2 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 2 \rrbracket)\textit{)}$$

- D'autre part : $X_2(\Omega) = \{1, 2\}$.
  En effet, dans une urne qui ne contient que les boules 1 et 2, la boule numéro 1 est tirée soit lors du 1er tirage, soit lors du 2ème.
  On en déduit que la famille $\big([X_2 = 1]\,, [X_2 = 2] \big)$ est un système complet d'événements et :

$$\mathbb{P}\big([X_2 = 2] \big) \;=\; 1 - \mathbb{P}\big([X_2 = 1] \big) \;=\; \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } X_2 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 2 \rrbracket).}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{On en déduit que } X_2 \text{ admet une espérance et une variance.} \\ \text{De plus : } \mathbb{E}(X_2) = \dfrac{2+1}{2} = \dfrac{3}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X_2) = \dfrac{2^2 - 1}{12} = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}. \end{array}}$$

□

c) Calculer $\mathbb{P}_{[I_3=1]}([X_3 = 2])$, $\mathbb{P}_{[I_3=2]}([X_3 = 2])$, $\mathbb{P}_{[I_3=3]}([X_3 = 2])$.
Déterminer la loi de X_3, son espérance et sa variance.

Démonstration.

- Si l'événément $[I_3 = 1]$ est réalisé, c'est que l'on a obtenu la boule numérotée 1 lors du 1er tirage. Dans ce cas, X_3 prend la valeur 1.

$$\boxed{\mathbb{P}_{[I_3=1]}([X_3 = 2]) = 0}$$

- Si l'événément $[I_3 = 2]$ est réalisé, c'est que l'on a obtenu la boule numérotée 2 lors du 1er tirage. Dans ce cas, les boules 2 et 3 sont retirées de l'urne qui ne contient plus que la boule numéro 1. Cette boule est donc nécessairement lors du tirage qui suit. L'événement $[X_3 = 2]$ est donc réalisé.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}_{[I_3=2]}([X_3 = 2]) = 1.}$$

- Si l'événément $[I_3 = 3]$ est réalisé, c'est que l'on a obtenu la boule numérotée 3 lors du 1er tirage. Dans ce cas, la boule 3 est retirée de l'urne qui ne contient plus que les boules numéro 1 et 2. L'événement $[X_3 = 2]$ est alors réalisé si et seulement si la boule numéro 1 est obtenue par tirage dans cette urne.

$$\boxed{\text{Par équiprobabilité, on en déduit : } \mathbb{P}_{[I_3=3]}([X_3 = 2]) = \frac{1}{2}.}$$

- D'après la question ***3.a)***, $I_3(\Omega) = [\![1,3]\!]$.
La famille $\big([I_3 = 1] , [I_3 = 2] , [I_3 = 3] \big)$ est un système complet d'événements.
Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\big([X_3 = 2] \big) & = & \sum\limits_{i=1}^{3} \mathbb{P}\big([I_3 = i] \cap [X_3 = 2] \big) & \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{3} \mathbb{P}\big([I_3 = i] \big) \times \mathbb{P}_{[I_3=i]}\big([X_3 = 2] \big) & \textit{(car pour tout } i \in [\![1,3]\!], \\
& & & \mathbb{P}\big([I_3 = i] \big) \neq 0\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{3} \dfrac{1}{3} \times \mathbb{P}_{[I_3=i]}\big([X_3 = 2] \big) & \textit{(car } I_3 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,3]\!])\textit{)} \\
& = & \dfrac{1}{3} \sum\limits_{i=1}^{3} \mathbb{P}_{[I_3=i]}\big([X_3 = 2] \big) & \\
& = & \dfrac{1}{3} \left(0 + 1 + \dfrac{1}{2} \right) \ = \ \dfrac{1}{\cancel{3}} \dfrac{\cancel{3}}{2} &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}\big([X_3 = 2] \big) = \dfrac{1}{2}.}$$

- Par ailleurs, on démontre comme en question ***4.b)*** :

$$[X_3 = 1] \ = \ [I_3 = 1]$$

Et ainsi :

$$\mathbb{P}\big([X_3 = 1] \big) \ = \ \mathbb{P}\big([I_3 = 1] \big) \ = \ \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big([X_3 = 1] \big) \ = \ \dfrac{1}{3}}$$

- Remarquons alors : $X_3(\Omega) = [\![1,3]\!]$.
En effet, dans une urne contenant initialement les boules numéro 1, 2 et 3, la boule numéro 1 peut être tirée lors du 1^{er}, $2^{\text{ème}}$ ou $3^{\text{ème}}$ tirage (c'est le cas si on obtient d'abord la boule 3, puis la 2, puis la 1).
On en déduit que la famille $\big([I_3 = 1] , [I_3 = 2] , [I_3 = 3] \big)$ est un système complet d'événements.
Ainsi :

$$\mathbb{P}\big([X_3 = 3] \big) \ = \ 1 - \mathbb{P}\big([X_3 = 1] \big) - \mathbb{P}\big([X_3 = 2] \big) \ = \ 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \ = \ \frac{1}{6}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big([X_3 = 3] \big) \ = \ \dfrac{1}{6}}$$

- La v.a.r. X_3 est finie. Elle admet donc une espérance et une variance. De plus :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{E}(X_3) & = & \sum\limits_{i=1}^{3} i \ \mathbb{P}\big([X_3 = i] \big) \\
& = & 1 \times \dfrac{1}{3} + 2 \times \dfrac{1}{2} + 3 \times \dfrac{1}{6} \\
& = & \dfrac{1}{3} + 1 + \dfrac{1}{2} \ = \ \dfrac{11}{6}
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X_3) = \dfrac{11}{6}}$$

- Et, par théorème de transfert :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(X_3^2\right) &= \sum_{i=1}^{3} i^2\, \mathbb{P}\big([X_3=i]\big)\\ &= 1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{2}+3^2\times\frac{1}{6}\\ &= \frac{1}{3}+2+\frac{3}{2} \ = \ \frac{23}{6}\end{aligned}$$

Enfin, par la formule de Kœnig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X_3) \ = \ \mathbb{E}\left(X_3^2\right)-\left(\mathbb{E}(X_3)\right)^2 \ = \ \frac{23}{6}-\left(\frac{11}{6}\right)^2 \ = \ \frac{23\times 6-11^2}{36} \ = \ \frac{138-121}{36} \ = \ \frac{17}{36}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X_3)=\frac{17}{36}}$$

□

d) Déterminer la loi du couple (I_3, X_3).
Seulement pour les cubes : En déduire la covariance du couple (I_3, X_3).
Les variables aléatoires I_3 et X_3 sont-elles indépendantes ?

Démonstration.

- D'après les questions précédentes : $I_3(\Omega)=[\![1,3]\!]$ et $X_3(\Omega)=[\![1,3]\!]$.
- Soit $k\in[\![1,3]\!]$ et soit $j\in[\![1,3]\!]$.
  Plusieurs cas se présentent alors :
  × si $j=1$,

	L'événement $[I_3=k]\cap[X_3=1]$ est réalisé		
$\Leftrightarrow$	L'événement $[I_3=k]$ est réalisé	et	l'événement $[X_3=1]$ est réalisé
$\Leftrightarrow$	La boule numéro k est obtenue au 1$^{\text{er}}$ tirage	et	la boule numéro 1 est obtenue au 1$^{\text{er}}$ tirage

Ainsi, si $k\neq 1$ alors : $[I_3=k]\cap[X_3=1]=\varnothing$ et $\mathbb{P}\big([I_3=k]\cap[X_3=1]\big)=\mathbb{P}(\varnothing)=0$.
Si $k=1$ alors : $[I_3=k]\cap[X_3=1]=[I_3=1]\cap[X_3=1]=[X_3=1]$ et :

$$\mathbb{P}\big([I_3=1]\cap[X_3=1]\big)=\mathbb{P}\big([X_3=1]\big)=\frac{1}{3}$$

× si $j=3$, on a de même :

	L'événement $[I_3=k]\cap[X_3=3]$ est réalisé		
$\Leftrightarrow$	La boule numéro k est obtenue au 1$^{\text{er}}$ tirage	et	la boule numéro 1 est obtenue au 3$^{\text{ème}}$ tirage

Or, étant donnée l'expérience, la boule numéro 1 n'est obtenue au 3$^{\text{ème}}$ tirage que si la boule 3 est obtenue au 1$^{\text{er}}$ tirage (et la boule 2 est obtenue au 2$^{\text{ème}}$ tirage).
Ainsi, si $k\neq 3$ alors : $[I_3=k]\cap[X_3=3]=\varnothing$ et $\mathbb{P}\big([I_3=k]\cap[X_3=3]\big)=\mathbb{P}(\varnothing)=0$.
Si $k=3$ alors : $[I_3=k]\cap[X_3=3]=[I_3=3]\cap[X_3=3]=[X_3=3]$ et :

$$\mathbb{P}\big([I_3=3]\cap[X_3=3]\big)=\mathbb{P}\big([X_3=3]\big)=\frac{1}{6}$$

× si $j = 2$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}\big([I_3 = k] \cap [X_3 = j]\big) & = & \mathbb{P}\big([I_3 = k]\big)\, \mathbb{P}_{[I_3=k]}\big([X_3 = j]\big) \\ & = & \dfrac{1}{3}\, \mathbb{P}_{[I_3=k]}\big([X_3 = j]\big) \\ & = & \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } k = 1 \\ \dfrac{1}{3} & \text{si } k = 2 \\ \dfrac{1}{6} & \text{si } k = 3 \end{array} \right. \end{array}$$

(d'après la question précédente)

- On peut résumer la loi du couple (I_3, X_3) par le tableau à double entrée suivant :

$k \in I_3(\Omega)$ \ $j \in X_3(\Omega)$	1	2	3
1	$\frac{1}{3}$	0	0
2	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
3	0	0	$\frac{1}{6}$

- Comme I_3 et X_3 sont des v.a.r. finies, la v.a.r. $I_3\, X_3$ admet une espérance.
De plus, d'après le théorème de transfert, on a :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}\big(I_3\, X_3\big) & = & \sum\limits_{k=1}^{3} \left(\sum\limits_{j=1}^{3} k\, j\ \mathbb{P}\big([I_3 = k] \ \cap\ [X_3 = j]\big) \right) \\ & = & \ (1 \times 1)\ \mathbb{P}\big([I_3 = 1] \cap [X_3 = 1]\big) \\ & & +\ (2 \times 2)\ \mathbb{P}\big([I_3 = 2] \cap [X_3 = 2]\big) \\ & & +\ (2 \times 3)\ \mathbb{P}\big([I_3 = 2] \cap [X_3 = 3]\big) \\ & & +\ (3 \times 3)\ \mathbb{P}\big([I_3 = 3] \cap [X_3 = 3]\big) \\ & = & 1 \times \dfrac{1}{3} + 4 \times \dfrac{1}{3} + 6 \times \dfrac{1}{6} + 9 \times \dfrac{1}{6} \\ & = & \dfrac{5}{3} + 1 + \dfrac{9}{6} \ = \ \dfrac{10 + 6 + 9}{6} \ = \ \dfrac{25}{6} \end{array}$$

(car toutes les autres probabilités sont nulles)

On obtient alors, par définition :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Cov}(I_3, X_3) & = & \mathbb{E}\big(I_3\, X_3\big) - \mathbb{E}(I_3) \times \mathbb{E}(X_3) \\ & = & \dfrac{25}{6} - \dfrac{3+1}{2} \times \dfrac{11}{6} \\ & = & \dfrac{25}{6} - \dfrac{22}{6} \ = \ \dfrac{3}{5} \ = \ \dfrac{1}{2} \end{array}$$

*(car $I_3 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 3 \rrbracket)$ et d'après la question **4.c)**)*

$\boxed{\text{Comme } \mathrm{Cov}(I_3, X_3) \neq 0 \text{, on en conclut que les v.a.r. } I_3 \text{ et } X_3 \text{ ne sont pas indépendantes.}}$

Commentaire

- Rappelons tout d'abord que si les v.a.r. X et Y admettent chacune un moment d'ordre 2 alors on a :

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \quad \Rightarrow \quad \text{Cov}(X,Y) = 0}$$

En particulier, on obtient, par contraposée, un résultat permettant de démontrer que deux v.a.r. X et Y ne sont pas indépendantes.

$$\boxed{\text{Cov}(X,Y) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}}$$

- Rappelons au passage que ce résultat `N'EST PAS` une équivalence.
Autrement dit, il existe des variables aléatoires X et Y :
  - × qui ne sont pas indépendantes,
  - × qui vérifient $\text{Cov}(X,Y) = 0$.
- L'énoncé propose d'utiliser la propriété précédente pour conclure. Cependant, on aurait aussi pu démontrer la non indépendance en remarquant par exemple :

$$\underbrace{\mathbb{P}\big([I_3 = 1] \cap [X_3 = 3]\big)}_{=\,0} \neq \underbrace{\mathbb{P}\big([I_3 = 1]\big)}_{=\,\frac{1}{3}} \times \underbrace{\mathbb{P}\big([X_3 = 3]\big)}_{=\,\frac{1}{6}}$$

□

5. a) Montrer que X_n prend ses valeurs dans $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Démonstration.

- La v.a.r. prend pour valeur le nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la boule numéro 1 à l'issue de l'expérience effectuée dans l'urne U_n.
- L'urne contenant initialement n boules, on effectue au plus n tirages. La v.a.r. X_n prend pour valeur le rang d'apparition d'une boule, c'est-à-dire le numéro d'un tirage.

$$\boxed{\text{On en déduit que } X_n \text{ prend ses valeurs dans } [\![1, n]\!].}$$

□

Commentaire

- On demande de démontrer que X_n prend ses valeurs dans $[\![1, n]\!]$.
Il s'agit donc de démontrer : $X_n(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$ et non pas : $X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.
Cette deuxième propriété peut se démontrer par récurrence.
On détaille ci-dessous la rédaction attendue.
- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.
  - ▸ **Initialisation** :
  D'après la question ***4.a)*** : $X_1(\Omega) = \{1\}$.
  D'où $\mathcal{P}(1)$.
  - ▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ $(X_{n+1}(\Omega) = [\![1, n+1]\!])$.
  On condière l'urne U_{n+1}. Deux cas se présentent.
    - × si le premier tirage fournit la boule numéro 1 alors X_{n+1} prend la valeur 1.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \{1\} \subset X_{n+1}(\Omega).}$$

Commentaire

(suite de la remarque précédente)

- × sinon, l'expérience se poursuit. En particulier, si le premier tirage a fourni la boule $n+1$, les tirages suivants sont effectués dans l'urne U_n qui contient les boules numérotées de 1 à n. Dans ce cas, X_{n+1} prend la valeur prise par X_n incrémentée de 1 (puisqu'un premier tirage a déjà eu lieu).
  Or, par hypothèse de récurrence : $X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } [\![2, n+1]\!] \subset X_{n+1}(\Omega).}$$

Finalement, on a démontré : $[\![1, n+1]\!] \subset X_{n+1}(\Omega)$.
Enfin : $X_{n+1}(\Omega) \subset [\![1, n+1]\!]$ car la v.a.r. X_{n+1} prend pour valeur le numéro d'un tirage (celui où la boule 1 apparaît) dans une expérience qui en compte au plus $n+1$.

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, on a bien : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n).}$$

b) Déterminer $\mathbb{P}([X_n = 1])$ et $\mathbb{P}([X_n = n])$.

Démonstration.

- L'événement $[X_n = 1]$ est réalisé si et seulement si la boule numéro 1 est apparue lors du premier tirage lors de l'expérience réalisée dans l'urne U_n. Ainsi :

$$[X_n = 1] = [I_n = 1]$$

$$\boxed{\text{En particulier : } \mathbb{P}\big([X_n = 1]\big) = \mathbb{P}\big([I_n = 1]\big) = \frac{1}{n}.}$$

- Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note A_i l'événement « obtenir la boule numéro $n+1-i$ lors du $i^{\text{ème}}$ tirage (lors de l'expérience débutant dans l'urne U_n) ».

  L'événement $[X_n = n]$ est réalisé si et seulement si n tirages sont nécessaires pour obtenir la boule numéro 1. Cela se produit si et seulement si :

  × le 1^{er} tirage fournit la boule n. Ainsi, l'événement A_1 est réalisé.

  × le $2^{\text{ème}}$ tirage fournit la boule $n-1$. Ainsi, l'événement A_2 est réalisé.

  × ...

  × le $n^{\text{ème}}$ tirage fournit la boule 1 (ce qui met fin à l'expérience).
  Ainsi, l'événement A_n.

  On en déduit :

$$[X_n = n] = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

  En particulier :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\big([X_n = n]\big) & = & \mathbb{P}\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\Big) & \\
& = & \mathbb{P}\big(A_1\big) \times \mathbb{P}_{A_1}\big(A_2\big) \times \ldots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}\big(A_n\big) & \textit{(d'après la formule des probabilités composées et car : } \mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0\textit{)} \\
& = & \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{n-1} \times \ldots \times \dfrac{1}{1} \ = \ \dfrac{1}{n!} & (*)
\end{array}$$

- Il reste à démontrer : $\forall i \in [\![2, n]\!]$, $\mathbb{P}_{A_1 \cap \ldots \cap A_{i-1}}(A_i) = \dfrac{1}{i}$.

  Soit $i \in [\![2, n]\!]$.
  Si l'événément $A_1 \cap \ldots \cap A_{i-1}$ est réalisé, c'est que les boules n, $n-1$, ..., $n-(i-1)$ sont sorties successivement dans cet ordre. À l'issue de chacun de ces tirages, seul la boule tirée a été retirée de l'urne (car on a tiré à chacune de ces étapes le plus grand numéro de l'urne). Ainsi, avant de procéder au $i^{\text{ème}}$ tirage, l'urne est constituée des boules numérotées de 1 à i. Les boules étant tirée de manière équiprobable, on en conclut :

$$\mathbb{P}_{A_1 \cap \ldots \cap A_{i-1}}(A_i) = \frac{1}{i}$$

$$\boxed{\text{Finalement, on a bien démontré : } \mathbb{P}\big([X_n = n]\big) = \frac{1}{n!}.}$$

□

c) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer la relation :

$$\forall j \geqslant 2,\ \mathbb{P}([X_n = j]) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_k = j-1])$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$ et soit $j \geqslant 2$.
La famille $\big([I_n = k]\big)_{k \in [\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements.
Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\big([X_n = j]\big) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big([I_n = k] \cap [X_n = j]\big) & \\
& = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big([I_n = k]\big) \times \mathbb{P}_{[I_n = k]}\big([X_n = j]\big) & \\
& = & \multicolumn{2}{l}{\mathbb{P}\big([I_n = 1]\big) \times \mathbb{P}_{[I_n = 1]}\big([X_n = j]\big) + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}\big([I_n = k]\big) \times \mathbb{P}_{[I_n = k]}\big([X_n = j]\big)} \\
& = & \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}\big([I_n = k]\big) \times \mathbb{P}_{[I_n = k]}\big([X_n = j]\big) & \textit{(car d'après la } \textbf{\textit{3.b)}}\textit{, si } j \neq 1 \\
& & & \textit{alors } \mathbb{P}_{[I_n = 1]}\big([X_n = j]\big) = 0\textit{)} \\
& = & \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}\big([I_n = k]\big) \times \mathbb{P}\big([X_{k-1} = j-1]\big) & \textit{(en utilisant la } \textbf{\textit{3.c)}} \textit{ avec} \\
& & & n \geqslant 2,\ j \geqslant 2 \textit{ et } k \geqslant 2\textit{)} \\
& = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\big([I_n = k+1]\big) \times \mathbb{P}\big([X_k = j-1]\big) & \textit{(par décalage d'indice)} \\
& = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} \times \mathbb{P}\big([X_k = j-1]\big) & \textit{(car } I_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien démontré : } \forall n \geqslant 2,\ \forall j \geqslant 2,\ \mathbb{P}([X_n = j]) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_k = j-1]).}$$

□

d) Si n est supérieur ou égal à 3 et j supérieur ou égal à 2, calculer :

$$n\,\mathbb{P}([X_n = j]) - (n-1)\,\mathbb{P}([X_{n-1} = j])$$

En déduire, si n est un entier supérieur ou égal à 2 :

$$\forall j \geqslant 1,\ \mathbb{P}([X_n = j]) = \frac{n-1}{n}\,\mathbb{P}([X_{n-1} = j]) + \frac{1}{n}\,\mathbb{P}([X_{n-1} = j-1])$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 3$ et soit $j \geqslant 2$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} & n\ \mathbb{P}\big([X_n = j]\big) - (n-1)\ \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j]\big) \\ = \ & \cancel{n}\ \left(\frac{1}{\cancel{n}} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\big([X_k = j-1]\big)\right) - \cancel{(n-1)}\ \left(\frac{1}{\cancel{n-1}} \sum_{k=1}^{n-2} \mathbb{P}\big([X_k = j-1]\big)\right) \\ = \ & \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j-1]\big) \end{aligned}$$

(d'après la question précédente avec $n-1 \geqslant 2$ et $j \geqslant 2$)

$$\boxed{\forall n \geqslant 3, \forall j \geqslant 2,\ \ n\ \mathbb{P}\big([X_n = j]\big) - (n-1)\ \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j]\big) = \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j-1]\big)}$$

- On en déduit alors, pour les mêmes valeurs de n et j :

$$\begin{aligned} n\ \mathbb{P}\big([X_n = j]\big) &= (n-1)\ \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j]\big) + \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j-1]\big) \\ \text{et ainsi} \quad \mathbb{P}\big([X_n = j]\big) &= \frac{n-1}{n}\ \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j]\big) + \frac{1}{n}\ \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j-1]\big) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 3, \forall j \geqslant 2,\ \ \mathbb{P}\big([X_n = j]\big) = \frac{n-1}{n}\ \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j]\big) + \frac{1}{n}\ \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j-1]\big)}$$

Il reste alors à vérifier cette propriété lorsque $n = 2$ et pour j variant dans $\mathbb{N}^*$.

- Notons $n = 2$. Soit $j \in \mathbb{N}^*$. Remarquons tout d'abord :

$$\frac{n-1}{n}\ \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j]\big) + \frac{1}{n}\ \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j-1]\big) \ = \ \frac{1}{2}\ \mathbb{P}\big([X_1 = j]\big) + \frac{1}{2}\ \mathbb{P}\big([X_1 = j-1]\big)$$

Deux cas se présentent alors.

× Si $j \geqslant 3$, comme $X_1(\Omega) = \{1\}$ alors $[X_1 = j] = \varnothing$ et $[X_1 = j-1] = \varnothing$. Ainsi :

$$\frac{1}{2}\ \mathbb{P}\big([X_1 = j]\big) + \frac{1}{2}\ \mathbb{P}\big([X_1 = j-1]\big) \ = \ 0$$

De même, comme $X_2(\Omega) = \{1, 2\}$, alors $[X_2 = j] = \varnothing$ et :

$$\mathbb{P}\big([X_2 = j]\big) = 0$$

$$\boxed{\text{La propriété est vraie pour } n = 2 \text{ et } j \geqslant 3.}$$

× Si $j = 2$, comme $X_1(\Omega) = \{1\}$ alors $[X_1 = j] = \varnothing$ et $[X_1 = j-1] = [X_1 = 1] = \Omega$. Ainsi :

$$\frac{1}{2}\ \mathbb{P}\big([X_1 = j]\big) + \frac{1}{2}\ \mathbb{P}\big([X_1 = j-1]\big) \ = \ \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 1 \ = \ \frac{1}{2}$$

D'autre part, d'après la question ***4.b)*** :

$$\mathbb{P}\big([X_2 = 2]\big) = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{La propriété est vraie pour } n = 2 \text{ et } j = 2.}$$

× Si $j = 1$, comme $X_1(\Omega) = \{1\}$ alors $[X_1 = j] = [X_1 = 1] = \Omega$ et $[X_1 = j-1] = [X_1 = 0] = \varnothing$. Ainsi :

$$\frac{1}{2}\,\mathbb{P}\big([X_1 = j]\big) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}\big([X_1 = j-1]\big) \;=\; \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 0 \;=\; \frac{1}{2}$$

D'autre part, d'après la question ***4.b)*** :

$$\mathbb{P}\big([X_2 = 1]\big) = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{La propriété est vraie pour } n = 2 \text{ et } j = 1.}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \geqslant 2,\ \forall j \geqslant 1,\ \ \mathbb{P}\big([X_n = j]\big) = \frac{n-1}{n}\,\mathbb{P}\big([X_{n-1} = j]\big) + \frac{1}{n}\,\mathbb{P}\big([X_{n-1} = j-1]\big).}$$

□

6. a) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer, en utilisant ***5.d)*** :

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n}$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.
Les v.a.r. X_{n-1} et X_n sont finies. Elles admettent donc une espérance. De plus :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(X_n) \\
= \;& \sum_{j=1}^{n} j\,\mathbb{P}\big([X_n = j]\big) \\
= \;& \sum_{j=1}^{n} j\,\left(\frac{n-1}{n}\,\mathbb{P}\big([X_{n-1} = j]\big) + \frac{1}{n}\,\mathbb{P}\big([X_{n-1} = j-1]\big)\right) && \textit{(d'après la question précédente avec } n \geqslant 2 \textit{ et } j \geqslant 1\textit{)} \\
= \;& \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n} j\,\mathbb{P}\big([X_{n-1} = j]\big) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} j\,\mathbb{P}\big([X_{n-1} = j-1]\big) && \textit{(par linéarité de la somme)} \\
= \;& \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} j\,\mathbb{P}\big([X_{n-1} = j]\big) + \frac{1}{n} \sum_{j=2}^{n} j\,\mathbb{P}\big([X_{n-1} = j-1]\big) && \textit{(car } [X_{n-1} = n] = \varnothing \textit{ et } [X_{n-1} = 0] = \varnothing\textit{)} \\
= \;& \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} j\,\mathbb{P}\big([X_{n-1} = j]\big) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (j+1)\,\mathbb{P}\big([X_{n-1} = j]\big) && \textit{(par décalage d'indice)} \\
= \;& \frac{n-1}{n}\,\mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} j\,\mathbb{P}\big([X_{n-1} = j]\big) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j]\big) && \textit{(par définition de } \mathbb{E}(X_{n-1}) \textit{ et linéarité de la somme)} \\
= \;& \frac{n-1}{n}\,\mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n}\,\mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n} \times 1 && \textit{(car } \big([X_{n-1} = j]\big)_{j \in [\![1,n-1]\!]} \textit{ est un système complet d'événements)} \\
= \;& \mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n}}$$

□

b) En déduire $\mathbb{E}(X_n)$ et donner un équivalent simple de $\mathbb{E}(X_n)$ quand n tend vers l'infini.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- D'après la question précédente :

$$\forall k \geqslant 2,\ \mathbb{E}(X_k) - \mathbb{E}(X_{k-1}) \ = \ \frac{1}{k}$$

- En sommant les inégalités précédentes pour k variant de 2 à n :

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \big(\mathbb{E}(X_k) - \mathbb{E}(X_{k-1})\big) & = & \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}(X_1) & & h_n - 1 \quad \textit{(par télescopage)} \end{array}$$

Enfin, comme $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(1) = 1$, on obtient : $\mathbb{E}(X_n) = h_n - 1 + 1 = h_n$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \geqslant 2,\ \mathbb{E}(X_n) = h_n \text{ et, d'après la question } \textbf{\textit{1.c)}}, \text{ on a : } \mathbb{E}(X_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$$ □

7. a) Si n est supérieur ou égal à 2, calculer $\mathbb{E}(X_n^2)$ en fonction de $\mathbb{E}\big(X_{n-1}^2\big)$ et de $\mathbb{E}\big(X_{n-1}\big)$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.
Les v.a.r. X_{n-1} et X_n sont finies. Elles admettent donc une variance. De plus :

$$\begin{array}{rll}
& \mathbb{E}\big(X_n^2\big) & \\
= & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^2\ \mathbb{P}\big(\,[X_n = j]\,\big) & \textit{(par théorème de transfert)} \\
= & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^2\ \left(\frac{n-1}{n}\ \mathbb{P}\big(\,[X_{n-1} = j]\,\big) + \frac{1}{n}\ \mathbb{P}\big(\,[X_{n-1} = j-1]\,\big)\right) & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{5.d)}} \textit{ avec } n \geqslant 2 \textit{ et } j \geqslant 1\textit{)} \\
= & \displaystyle\frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n} j^2\ \mathbb{P}\big(\,[X_{n-1} = j]\,\big) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} j^2\ \mathbb{P}\big(\,[X_{n-1} = j-1]\,\big) & \textit{(par linéarité de la somme)} \\
= & \displaystyle\frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} j^2\ \mathbb{P}\big(\,[X_{n-1} = j]\,\big) + \frac{1}{n} \sum_{j=2}^{n} j^2\ \mathbb{P}\big(\,[X_{n-1} = j-1]\,\big) & \textit{(car } [X_{n-1} = n] = \varnothing \textit{ et } [X_{n-1} = 0] = \varnothing\textit{)} \\
= & \displaystyle\frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} j^2\ \mathbb{P}\big(\,[X_{n-1} = j]\,\big) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (j+1)^2\ \mathbb{P}\big(\,[X_{n-1} = j]\,\big) & \textit{(par décalage d'indice)} \\
= & \displaystyle\frac{n-1}{n}\ \mathbb{E}\big(X_{n-1}^2\big) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} j^2\ \mathbb{P}\big(\,[X_{n-1} = j]\,\big) & \textit{(par définition de } \mathbb{E}\big(X_{n-1}^2\big) \textit{ et linéarité de la somme)} \\
& \displaystyle +\frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} j\ \mathbb{P}\big(\,[X_{n-1} = j]\,\big) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}\big(\,[X_{n-1} = j]\,\big) & \\
= & \displaystyle\frac{n-1}{n}\ \mathbb{E}\big(X_{n-1}^2\big) + \frac{1}{n}\ \mathbb{E}\big(X_{n-1}^2\big) + \frac{2}{n}\ \mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n} & \textit{(car } \big(\,[X_{n-1} = j]\,\big)_{j\in[\![1,n-1]\!]} \textit{ est un système complet d'événements)} \\
= & \displaystyle\mathbb{E}\big(X_{n-1}^2\big) + \frac{2}{n}\ \mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n} &
\end{array}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \mathbb{E}\big(X_{n-1}^2\big) + \frac{2}{n}\ \mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n}}$$ □

b) En déduire : $\mathbb{V}(X_n) = h_n - k_n$ (en reprenant les notations de la **Partie I**).

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{V}(X_n) \\
= \;& \mathbb{E}(X_n^2) - \big(\mathbb{E}(X_n)\big)^2 && \textit{(d'après la formule de Kœnig-Huygens)} \\
= \;& \left(\mathbb{E}(X_{n-1}^2) + \frac{2}{n}\,\mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n}\right) - \left(\mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n}\right)^2 && \textit{(d'après les questions } \textbf{\textit{6.a)}} \textit{ et } \textbf{\textit{7.a)}}\textit{)} \\
= \;& \left(\mathbb{E}(X_{n-1}^2) + \cancel{\frac{2}{n}\,\mathbb{E}(X_{n-1})} + \frac{1}{n}\right) - \left(\big(\mathbb{E}(X_{n-1})\big)^2 + \cancel{\frac{2}{n}\,\mathbb{E}(X_{n-1})} + \frac{1}{n^2}\right) \\
= \;& \mathbb{E}(X_{n-1}^2) - \big(\mathbb{E}(X_{n-1})\big)^2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \\
= \;& \mathbb{V}(X_{n-1}) + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} && \textit{(d'après la formule de Kœnig-Huygens)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \mathbb{V}(X_n) = \mathbb{V}(X_{n-1}) + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}$$

- On a ainsi :

$$\forall k \geqslant 2,\ \ \mathbb{V}(X_k) - \mathbb{V}(X_{k-1}) \ = \ \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}$$

- En sommant les inégalités précédentes pour k variant de 2 à n :

$$\begin{array}{ccc}
\sum\limits_{k=2}^{n} \big(\mathbb{V}(X_k) - \mathbb{V}(X_{k-1})\big) & = & \sum\limits_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}\right) \\
\shortparallel & & \shortparallel \\
\mathbb{V}(X_n) - \mathbb{V}(X_1) & & \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}
\end{array} \quad \textit{(par linéarité de la somme)}$$

Enfin, comme $\mathbb{V}(X_1) = \mathbb{V}(1) = 0$, on obtient :

$$\mathbb{V}(X_n) \ = \ (h_n - 1) - (k_n - 1) \ = \ h_n - k_n$$

$$\boxed{\text{On a bien démontré : } \forall n \geqslant 2,\ \mathbb{V}(X_n) = h_n - k_n.}$$

□

c) Donner un équivalent de $\mathbb{V}(X_n)$ quand n tend vers l'infini.

Démonstration.
D'après la question ***2.c)*** : $h_n - k_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, d'après la question précédente : } \mathbb{V}(X_n) = h_n - k_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n).}$$

Commentaire

Il est à noter que, dans la question précédente, le résultat est donné par l'énoncé. Il ne s'agit pas de déterminer l'expression de $\mathbb{V}(X_n)$ mais de démontrer l'égalité $\mathbb{V}(X_n) = h_n - k_n$. La question ***7.c)*** peut donc être traitée sans avoir fait la ***7.b)***. Finalement, Cette question est à concevoir comme une question bonus pour les candidats qui ont réussi à traiter la question ***2.c)*** car c'est l'unique résultat exigé pour répondre à la question.

□

8. Soit $(T_i)_{i \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout i entier naturel non nul, T_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{i}$. On pose :

$$S_n \; = \; \sum_{i=1}^{n} T_i \; = \; T_1 + \cdots + T_n$$

a) Vérifier que X_1 et T_1 ont même loi.

Démonstration.

- Par définition la v.a.r. T_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre 1.
Autrement dit, la loi de T_1 est définie par :

$$\mathbb{P}\big([T_1 = 0] \big) = 0 \quad \text{ et } \quad \mathbb{P}\big([T_1 = 1] \big) = 1$$

- Or, on a démontré que la v.a.r. X_1 suit la loi certaine égale à 1. On a donc aussi :

$$\mathbb{P}\big([X_1 = 0] \big) = 0 \quad \text{ et } \quad \mathbb{P}\big([X_1 = 1] \big) = 1$$

$$\boxed{\text{Les v.a.r. } X_1 \text{ et } T_1 \text{ ont même loi.}}$$

Commentaire

- La loi $\mathcal{B}(p)$ est souvent seuelement définie avec $p \in \,]0, 1[$, excluant ainsi les cas $p = 0$ et $p = 1$. La raison est la suivante :
  - × on préfére dire qu'une v.a.r. X est presque certainement égale à 1 plutôt que de dire qu'elle suit une loi de Bernoulli de paramètre 1.
  - × on préfére dire qu'une v.a.r. X est presque certainement égale à 0 plutôt que de dire qu'elle suit une loi de Bernoulli de paramètre 0.
- Dans l'énoncé, on fait le choix de considérer la loi $\mathcal{B}(1)$ ce qui permet d'assurer l'homogénéité des définitions des v.a.r. $T_1, \dots, T_n$.

□

b) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer, pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}([S_n = j]) \; = \; \frac{1}{n} \, \mathbb{P}([S_{n-1} = j - 1]) + \frac{n-1}{n} \, \mathbb{P}([S_{n-1} = j])$$

En déduire que X_n et S_n ont même loi.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$ et soit $j \in \mathbb{N}^*$.

- Comme $T_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{n}\right)$, on a : $T_n(\Omega) = \{0, 1\}$.
Ainsi, la famille $\big([T_n = 0] \, , [T_n = 1] \big)$ est un système complet d'événements.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}\big([S_n = j] \big) & = & \mathbb{P}\big([T_n = 0] \cap [S_n = j] \big) \; + \; \mathbb{P}\big([T_n = 1] \cap [S_n = j] \big) \\[2mm]
& = & \mathbb{P}\left([T_n = 0] \cap \left[\sum\limits_{i=1}^{n} T_i = j \right] \right) \; + \; \mathbb{P}\left([T_n = 1] \cap \left[\sum\limits_{i=1}^{n} T_i = j \right] \right) \\[2mm]
& = & \mathbb{P}\left([T_n = 0] \cap \left[\sum\limits_{i=1}^{n-1} T_i = j \right] \right) \; + \; \mathbb{P}\left([T_n = 1] \cap \left[\sum\limits_{i=1}^{n-1} T_i = j - 1 \right] \right) \\[2mm]
& = & \mathbb{P}\big([T_n = 0] \cap [S_{n-1} = j] \big) \; + \; \mathbb{P}\big([T_n = 1] \cap [S_{n-1} = j - 1] \big)
\end{array}$$

- Les v.a.r. $T_1, \ldots, T_n$ sont mutuellement indépendantes. On en déduit, par le lemme des coalitions, que les v.a.r. T_n et $S_{n-1} = T_1 + \ldots + T_{n-1}$ sont indépendantes.
  Ainsi, en reprenant le calcul précédent :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}\big([S_n = j]\big) & = & \mathbb{P}\big([T_n = 0]\big) \times \mathbb{P}\big([S_{n-1} = j]\big) \ + \ \mathbb{P}\big([T_n = 1]\big) \times \mathbb{P}\big([S_{n-1} = j-1]\big) \\[2mm] & = & \dfrac{n-1}{n} \times \mathbb{P}\big([S_{n-1} = j]\big) \ + \ \dfrac{1}{n} \times \mathbb{P}\big([S_{n-1} = j-1]\big) \qquad \textit{(car } T_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{n}\right)\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \forall j \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big([S_n = j]\big) = \dfrac{n-1}{n} \times \mathbb{P}\big([S_{n-1} = j]\big) \ + \ \dfrac{1}{n} \times \mathbb{P}\big([S_{n-1} = j-1]\big)}$$

- Démontrons alors par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: X_n et S_n ont même loi.

  ► **Initialisation** :
  D'après la question ***8.a)***, X_1 et $T_1 = S_1$ ont même loi.
  D'où $\mathcal{P}(1)$.

  ► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (X_{n+1} et S_{n+1} ont même loi).

  – D'après la question ***5.a)***, $X_{n+1}(\Omega) \subset [\![1, n+1]\!]$.
  D'autre part, comme $T_1(\Omega) = \ldots = T_n(\Omega) = \{0, 1\}$, on a : $S_{n+1}(\Omega) = [\![0, n+1]\!]$.

  – Soit $j \in [\![1, n+1]\!]$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big([S_{n+1} = j]\big) & = & \dfrac{n}{n+1}\ \mathbb{P}\big([S_n = j]\big) + \dfrac{1}{n+1}\ \mathbb{P}\big([S_n = j-1]\big) & \textit{(d'après ce qui précéde avec } n+1 \geqslant 2 \textit{ et } j \geqslant 1\textit{)} \\[2mm] & = & \dfrac{n}{n+1}\ \mathbb{P}\big([X_n = j]\big) + \dfrac{1}{n+1}\ \mathbb{P}\big([X_n = j-1]\big) & \textit{(car, par hypothèse de récurrence, } X_n \textit{ et } S_n \textit{ ont même loi)} \\[2mm] & = & \mathbb{P}\big([X_{n+1} = j]\big) & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{5.d)}} \textit{ avec } n+1 \geqslant 2 \textit{ et } j \geqslant 1\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall i \in [\![1, n+1]\!],\ \mathbb{P}\big([S_{n+1} = j]\big) = \mathbb{P}\big([X_{n+1} = j]\big).}$$

  – Remarquons enfin que l'événement S_{n+1} prend la valeur 0 si et seulement si les v.a.r. $T_1, \ldots, T_{n+1}$ prennent toutes la valeur 0. On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} [S_{n+1} = 0] & = & \bigcap\limits_{i=1}^{n+1} [T_i = 0] & \\[4mm] \text{et ainsi} \quad \mathbb{P}\big([S_{n+1} = 0]\big) & = & \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n+1} [T_i = 0]\right) & \\[4mm] & = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big([T_i = 0]\big) & \textit{(car les v.a.r. } T_1, \ldots, T_{n+1} \textit{ sont indépendantes)} \\[4mm] & = & 0 \times \dfrac{1}{2} \times \ldots \times \dfrac{n}{n+1} & \textit{(car : } \forall i \in [\![1, n+1]\!],\ T_i \hookrightarrow \mathcal{B}(i)\textit{)} \\[4mm] & = & 0 & \end{array}$$

Enfin, comme $X_{n+1}(\Omega) \subset [\![1, n+1]\!]$ alors : $\mathbb{P}\big([X_{n+1} = 0] \big) = 0$.

$$\boxed{\mathbb{P}\big([X_{n+1} = 0] \big) = \mathbb{P}\big([S_{n+1} = 0] \big)}$$

Ainsi S_{n+1} et X_{n+1} ont même loi. D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, on a : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n).}$$

□

c) Retrouver ainsi $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La v.a.r. S_n admet une espérance (respectivement une variance) comme somme des v.a.r. T_1, $\dots$, T_n qui admettent toutes une espérance (respectivement une variance).
- De plus :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}\big(S_n\big) & = & \mathbb{E}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} T_i\right) & \\
 & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{E}(T_i) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
 & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i} & \textit{(car : } \forall i \in [\![1, n]\!],\ T_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{i}\right)\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(S_n) = h_n}$$

- Enfin :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{V}\big(S_n\big) & = & \mathbb{V}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} T_i\right) & \\
 & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{V}(T_i) & \textit{(car les v.a.r. } T_1, \dots, T_n \textit{ sont indépendantes)} \\
 & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i} \times \left(1 - \dfrac{1}{i}\right) & \textit{(car : } \forall i \in [\![1, n]\!],\ T_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{i}\right)\textit{)} \\
 & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i} - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i^2} & \textit{(par linéarité de la somme)}
\end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{V}(S_n) = h_n - k_n}$$

- Enfin, comme les v.a.r. S_n et X_n ont même loi, elles ont même espérance et même variance.

$$\boxed{\text{On retrouve bien, pour tout } n \in \mathbb{N}^* : \mathbb{E}(X_n) = h_n \text{ et } \mathbb{V}(X_n) = h_n - k_n.}$$

□