DS4 (version A) /176

Exercice 1 /44

Partie I

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. Soit f l'application définie sur E qui associe à tout polynôme $P \in E$, le polynôme $f(P)$ défini par :

$$\big(f(P)\big)(X) \;=\; (1 - X - X^2)\, P'(X) + \frac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\, P''(X)$$

Dans la suite, on note $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

- **1 pt : caractère morphisme**
- **3 pts : caractère endo ($f(P)$ est un polynôme + de degré 3 au max)**

2. Déterminer la matrice A représentative de f dans la base canonique de E.

- **2 pts :**
  - × **0,5 pt par $f(P_i)$.**

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(P_1)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(P_1)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(P_1)\big) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  - × **0,5 pour** $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

3. Montrer : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

- **1 pt :** $A^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$
- **1 pt :** $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$

4. Démontrer que f n'est pas bijectif.

- **1 pt :** A **non inversible**

5. ***a)*** Déterminer des bases de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ ainsi que les dimensions de ces espaces vectoriels.

- **3 pts :**
  - × **1 pt : écriture système**
  - × **1 pt : résolution** $a_1 = a_2$
  - × **1 pt :** $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,(P_0, P_1 + P_2)$

  -1 pt si confusion $\mathbb{R}_2[X]$ / $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

- **2 pts :** $(P_0, P_1 + P_2)$ **base et** $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = 2$
  - × **caractère générateur**
  - × **caractère libre**
- **1 pt :** $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(f(P_0), f(P_1), f(P_2))$
- **1 pt :** $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(P_0 - P_1 - P_2)$
- **1 pt :** $(P_0 - P_1 - P_2)$ **base de** $\mathrm{Im}(f)$ **et** $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = 1$
  -1 pt si confusion $\mathbb{R}_2[X]$ / $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

b) Démontrer que la famille $\mathcal{F} = \big(f(P_1), P_0\big)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

- **1 pt :** $\big(f(P_1), P_0\big) \in \big(\mathrm{Ker}(f)\big)^2$
- **2 pts :** $\mathcal{F} = \big(f(P_1), P_0\big)$ **base de** $\mathrm{Ker}(f)$
  - × **1 pt : caractère libre**
  - × **1 pt :** $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)$

6. a) Montrer que la famille $\mathcal{G} = \big(P_1, f(P_1), P_0\big)$ est une base de E.

- **2 pts :** $\mathcal{G}$ **libre**
- **1 pt :** $\mathrm{Card}(\mathcal{G}) = \dim\big(\mathbb{R}_2[X]\big)$

b) Déterminer la matrice T représentative de f dans la base $\big(P_1, f(P_1), P_0\big)$.

- **2 pts :**
  - × **1,5 pts :**

$$\mathrm{Mat}_{(P_1,f(P_1),P_0)}\big(f(P_1)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{Mat}_{(P_1,f(P_1),P_0)}\Big(b\big(f(P_1)\big)\Big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{Mat}_{(P_1,f(P_1),P_0)}\big(f(P_0)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  - × **0,5 pt :** $\mathrm{Mat}_{(P_1,f(P_1),P_0)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Partie II

On note désormais E un espace vectoriel **quelconque** de dimension 3.
On considère dans la suite f un endomorphisme de E différent de l'endomorphisme nul de E.

7. Montrer : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} \ \Leftrightarrow \ \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

- **3 pts :**
  - × **1 pt : raisonnement par double implication**
  - × **1 pt :** $(\Rightarrow)$
  - × **1 pt :** $(\Leftarrow)$

On suppose dans les questions ***8.*** et ***9.*** : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

8. a) Comparer les dimensions de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

- **1 pt :** $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) \leqslant \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)$

b) Déterminer alors précisément les dimensions de ces deux espaces vectoriels.

- **1 pt : théorème du rang**
- **1 pt :** $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) \in \{0,1\}$
- **1 pt : cas** $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = 0$ **impossible**
- **1 pt :** $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = 1$ **et** $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = 2$**.**

9. Soient $u \notin \mathrm{Ker}(f)$ et $v \in \mathrm{Ker}(f) \setminus \mathrm{Im}(f)$.

a) Montrer que la famille $\mathcal{F} = (f(u), v)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

- **1 pt :** $\big(f(u), v\big) \in \big(\mathrm{Ker}(f)\big)^2$
- **3 pts : caractère libre**
  - $\times$ **1 pt : écriture correcte de la définition de liberté**
  - $\times$ **1 pt : appliquer f de part et d'autre et en conclure** $\lambda_2 = 0$
  - $\times$ **1 pt :** $\lambda_1 = 0$
- **1 pt :** $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)$

b) Montrer que la famille $\mathcal{G} = (u, f(u), v)$ est une base de E.

- **3 pts : caractère libre**
  - $\times$ **1 pt : écriture correcte de la définition de liberté**
  - $\times$ **1 pt : appliquer f de part et d'autre et en conclure** $\lambda_3 = 0$
  - $\times$ **1 pt :** $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$
- **1 pt :** $\mathrm{Card}(\mathcal{G}) = \dim\big(E\big)$

c) Déterminer la matrice T représentative de f dans la base $(u, f(u), v)$.

- **2 pts :**
  - $\times$ **1,5 pts :**

$$\mathrm{Mat}_{(u,f(u),v)}\big(f(u)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{Mat}_{(u,f(u),v)}\Big(b\big(f(u)\big)\Big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{Mat}_{(u,f(u),v)}\big(f(v)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  - $\times$ **0,5 pt :** $\mathrm{Mat}_{(u,f(u),v)}\big(f\big) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2 /34

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce truquée telle que la probabilité d'apparition de « pile » soit égale à p, $p \in \,]0,1[$.
On pourra noter $q = 1 - p$.
Soit N un entier naturel non nul fixé.
On effectue N lancers du dé ; si n est le nombre de « 6 » obtenus, on lance alors n fois la pièce.

On définit trois variables aléatoires X, Y, Z de la manière suivante :

× Z indique le nombre de « 6 » obtenus aux lancers du dé,

× X indique le nombre de « piles » obtenus aux lancers de la pièce,

× Y indique le nombre de « faces » obtenues aux lancers de la pièce.

Ainsi, $X + Y = Z$ et, si Z prend la valeur 0, alors X et Y prennent la valeur 0.

1. Préciser la loi de Z, son espérance et sa variance.

- **2 pts :** $Z \hookrightarrow \mathcal{B}\left(N, \dfrac{1}{6}\right)$ **(1 pt pour expérience, 1 pt pour v.a.r.)**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Z) = \dfrac{N}{6}$ **et** $\mathbb{V}(Z) = \dfrac{5\,N}{36}$

2. Pour $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[Z=n]}([X = k])$.
On distinguera les cas : $k \leqslant n$ et $k > n$.

- **1 pt : cas** $n > N$ **(**$\mathbb{P}_{[Z=n]}$ **non définie)**
- **4 pts : cas** $n \in [\![0, N]\!]$ **:**
  × **1 pt :** $\mathbb{P}_{[Z=n]}$ **bien définie**
  × **1 pt : cas** $n = 0$
  × **2 pts : cas** $n \in [\![1, N]\!]$ **(1 pt expérience, 1 pt v.a.r.)**

3. Montrer, pour tout couple d'entiers naturels (k, n) :

× si $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant N$ alors $\mathbb{P}([X = k] \cap [Z = n]) = \dbinom{n}{k} \dbinom{N}{n} p^k \,(1-p)^{n-k} \left(\dfrac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\dfrac{1}{6}\right)^n$.

× si $n > N$ ou $k > n$ alors $\mathbb{P}([X = k] \cap [Z = n]) = 0$.

- **1 pt : cas** $n > N$ **:** $\mathbb{P}([X = k] \cap [Z = n]) = 0$
- **3 pts : cas** $n \leqslant N$ **:**
  × **1 pt : traduction « l'évement** $[X = k] \cap [Z = n]$ **est réalisé »**
  × **1 pt : cas** $k > n$ **:** $\mathbb{P}([X = k] \cap [Z = n]) = 0$
  × **1 pt : cas** $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant N$ **:**
  $$\mathbb{P}([X = k] \cap [Z = n]) \; = \; \binom{n}{k} \binom{N}{n} \; p^k \; (1-p)^{n-k} \; \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

4. Calculer la probabilité $\mathbb{P}([X = 0])$.

- **1 pt : FPT**
- **2 pts :** $\mathbb{P}([X = 0]) = \left(1 - \dfrac{p}{6}\right)^N$ **(dont 1 pt pour la formule du binôme de Newton)**

5. Montrer pour tout couple d'entiers naturels (k, n) tel que $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant N$:

$$\binom{n}{k}\binom{N}{n} = \binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k}$$

En déduire la probabilité $\mathbb{P}([X = k])$.

- **1 pt :** $\binom{n}{k}\binom{N}{n} = \binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k}$
- **1 pt : cas** $k > N$ **(**$\mathbb{P}([X = k]) = 0$**)**
- **4 pts : cas** $k \leqslant N$
  - × **1 pt : FPT**
  - × **1 pt :** $\sum\limits_{n=0}^{N} \mathbb{P}([X = k] \cap [Z = n]) = \sum\limits_{n=k}^{N} \mathbb{P}([X = k] \cap [Z = n])$
  - × **1 pt : décalage d'indice** $\mathbb{P}([X = k]) = \binom{N}{k} p^k \sum\limits_{n=0}^{N-k} \binom{N-k}{n} (1-p)^n \left(\frac{5}{6}\right)^{N-(n+k)} \left(\frac{1}{6}\right)^{n+k}$
  - × **1 pt : formule du binôme de Newton** $\mathbb{P}([X = k]) = \binom{N}{k} \left(\frac{p}{6}\right)^k \left(1 - \frac{p}{6}\right)^{N-k}$

6. Montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre $(N, \frac{p}{6})$.
Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?

- **1 pt :** $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(N, \frac{p}{6}\right)$
- **1 pt :** $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(N, \frac{q}{6}\right)$

7. Est-ce que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes ?
Déterminer la loi du couple (X, Y).

- **2 pts : contre-exemple**
  - × **1 pt :** $\mathbb{P}([X = N] \cap [Y = N]) = 0$
  - × **1 pt :** $\mathbb{P}([X = N]) \times \mathbb{P}([Y = N]) \neq 0$
- **1 pt :** $X(\Omega) = [\![0, N]\!]$ **et** $Y(\Omega) = [\![0, N]\!]$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X = k] \cap [Y = \ell]) = \mathbb{P}([X = k] \cap [Z = \ell + k])$
- **1 pt : cas** $\ell + k > N$ **:** $\mathbb{P}([X = k] \cap [Y = \ell]) = 0$
- **1 pt : cas** $\ell + k \leqslant N$ **:**

$$\mathbb{P}([X = k] \cap [Y = \ell]) = \binom{\ell + k}{k}\binom{N}{\ell + k} p^k (1-p)^\ell \left(\frac{5}{6}\right)^{N-\ell-k} \left(\frac{1}{6}\right)^{\ell+k}$$

8. **<u>Seulement pour les cubes</u>** : En comparant les variances de Z et de $X + Y$, déterminer la covariance du couple (X, Y).

- **1 pt :** X**,** Y **et** Z **admettent une variance**
- **1 pt :** $\mathbb{V}(Z) = \mathbb{V}(X + Y)$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y) + \mathbb{V}(Y)$
- **3 pts :** $\mathrm{Cov}(X, Y) = \dfrac{N\,p\,q}{36}$

Problème /98

Ce problème se compose de deux parties. Si le candidat ne parvient pas à établir un résultat demandé, il l'indiquera clairement, et il pourra pour la suite admettre ce résultat.
Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.
On considère une urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n.
On tire une boule au hasard dans U_n. On note k le numéro de cette boule.

- Si k est égal à 1, on arrête les tirages.
- Si k est supérieur ou égal à 2, on enlève de l'urne U_n les boules numérotées de k à n (il reste donc les boules numérotées de 1 à $k-1$), et on effectue à nouveau un tirage dans l'urne.

On répète ces tirages jusqu'à l'obtention de la boule numéro 1.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule numéro 1. On note Y_n la variable aléatoire égale à la somme des numéros des boules tirées.
On note $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$ (respectivement $\mathbb{E}(Y_n)$ et $\mathbb{V}(Y_n)$) l'espérance et la variance de X_n (respectivement Y_n).

Dans tout le problème, $\mathbb{P}_B(A)$ désigne la probabilité conditionnelle de A sachant B, où B est un événement non négligeable.

Partie I

1. On pose : $h_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

a) Montrer, pour tout entier naturel k non nul, les inégalités :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

où ln désigne le logarithme népérien.

- **1 pt : décroissance de la fonction inverse**
- **1 pt : croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant**

b) En déduire les inégalités : $\ln(n+1) \leqslant h_n \leqslant 1 + \ln(n)$.

- **1 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
- **1 pt : sommation télescopique**
- **1 pt :** $h_{n+1} - 1 \leqslant \ln(n+1) \leqslant h_n$
- **1 pt :** $h_n \leqslant 1 + \ln(n)$

c) Déterminer un équivalent simple de h_n quand n tend vers l'infini.

- **1 pt : division par** $\ln(n) > 0$ **(**0 **si** $n \geqslant 2$ **non précisé)**
- **1 pt :** $h_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ **par théorème d'encadrement**

2. On pose : $k_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2} = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$.

a) Montrer, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, l'inégalité :

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

- **1 pt :** $\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{k(k-1)}$
- **1 pt :** $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$ **par décroissance de la fonction inverse sur** $]0, +\infty[$

b) En déduire la majoration : $k_n \leqslant 2$.

- **1 pt :** $\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k^2} \leqslant \sum\limits_{k=2}^{n} \left(\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k} \right)$
- **1 pt : télescopage**
- **1 pt :** $2 - \dfrac{1}{n} \leqslant 2$

c) Déterminer un équivalent simple de $h_n - k_n$ quand n tend vers l'infini.

- **1 pt :** $h_n - 2 \leqslant h_n - k_n \leqslant h_n$
- **1 pt :** $\dfrac{h_n}{\ln(n)} - \dfrac{2}{\ln(n)} \leqslant \dfrac{h_n - k_n}{\ln(n)} \leqslant \dfrac{h_n}{\ln(n)}$
- **1 pt :** $h_n - k_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$ **par théorème d'encadrement**

Partie II. Étude de la variable aléatoire X_n

On note I_n la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée dans l'urne U_n.

1. a) Quelle est la loi de I_n ?

- **2 pts :** $I_n \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$
  - × **1 pt : description expérience**
  - × **1 pt : description v.a.r.**

b) Quelle est la loi conditionnelle de X_n sachant $[I_n = 1]$?

- **1 pt : loi conditionnelle de** X_n **sachant** $[I_n = 1]$ **est la loi certaine égale à** 1 **(**0 **au moindre non sens)**

c) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{2, \ldots, n\}, \ \mathbb{P}_{[I_n = k]}([X_n = j]) = \mathbb{P}([X_{k-1} = j-1])$$

- **2 pts**

2. a) Quelle est la loi de X_1 ?

- **1 pt :** X_1 **suit la loi certaine égale à** 1 **(**0 **si seulement «** X_1 **suit une loi certaine »)** *b)* Quel est l'événement $[X_2 = 1]$? Donner la loi de X_2, son espérance et sa variance.

- **1 pt :** $[X_2 = 1] = [I_2 = 1]$
- **1 pt :** $X_2(\Omega) = \{1, 2\}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_2 = 1]) = \dfrac{1}{2}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_2 = 2]) = \dfrac{1}{2}$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_2) = \dfrac{3}{2}$ **et** $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1}{4}$

c) Calculer $\mathbb{P}_{[I_3=1]}([X_3 = 2])$, $\mathbb{P}_{[I_3=2]}([X_3 = 2])$, $\mathbb{P}_{[I_3=3]}([X_3 = 2])$.
Déterminer la loi de X_3, son espérance et sa variance.

- **1 pt :** $\mathbb{P}_{[I_3=1]}([X_3 = 2]) = 0$
- **1 pt :** $\mathbb{P}_{[I_3=2]}([X_3 = 2]) = 1$
- **1 pt :** $\mathbb{P}_{[I_3=3]}([X_3 = 2]) = \dfrac{1}{2}$
- **3 pts :** $\mathbb{P}([X_3 = 2]) = \dfrac{1}{2}$
  - × **1 pt : FPT sur le SCE** $\big([I_3 = 1], [I_3 = 2], [I_3 = 3]\big)$
  - × **1 pt :** $\forall i \in [\![1, 3]\!]$, $\mathbb{P}([I_3 = 1]) \neq 0$
  - × **1 pt : fin du calcul**
- **2 pts :** $\mathbb{P}([X_3 = 1]) = \dfrac{1}{3}$
  - × **1 pt :** $[X_3 = 1] = [I_3 = 1]$
  - × **1 pt :** $\mathbb{P}([I_3 = 1]) = \dfrac{1}{3}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_3 = 3]) = \dfrac{1}{6}$
- **1 pt :** X_3 **admet une espérance**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_3) = \dfrac{11}{6}$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_3^2) = \dfrac{23}{6}$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(X_3) = \dfrac{17}{36}$

d) Déterminer la loi du couple (I_3, X_3).
<u>**Seulement pour les cubes**</u> : En déduire la covariance du couple (I_3, X_3). Les variables aléatoires I_3 et X_3 sont-elles indépendantes ?

- **1 pt :** $I_3(\Omega) = [\![1, 3]\!]$, $X_3(\Omega) = [\![1, 3]\!]$
- **1 pt : cas** $j = 1$ **(**$[I_3 = 1] \cap [X_3 = 1] = [X_3 = 1]$, $[I_3 = 2] \cap [X_3 = 1] = \varnothing$, $[I_3 = 3] \cap [X_3 = 1] = \varnothing$**)**
- **1 pt : cas** $j = 3$ **(**$[I_3 = 1] \cap [X_3 = 3] = \varnothing$, $[I_3 = 2] \cap [X_3 = 3] = \varnothing$, $[I_3 = 3] \cap [X_3 = 3] = [X_3 = 3]$**)**
- **1 pt : cas** $j = 2$ **(**$\mathbb{P}([I_3 = k] \cap [X_3 = j]) = \mathbb{P}([I_3 = k])\, \mathbb{P}_{[I_3=k]}([X_3 = j]) = \begin{cases} 0 & \textbf{si } k = 1 \\ \dfrac{1}{3} & \textbf{si } k = 2 \\ \dfrac{1}{6} & \textbf{si } k = 3 \end{cases}$

- **1 pt :** I_3 X_3 **admet une espérance**
- **2 pts :** $\mathbb{E}(I_3\ X_3) = \dfrac{25}{6}$
- **1 pt :** $\text{Cov}(I_3, X_3) = \dfrac{1}{2}$
- **1 pt :** I_3 **et** X_3 **non indépendantes car** $\text{Cov}(I_3, X_3) \neq 0$

3. a) Montrer que X_n prend ses valeurs dans $\{1, 2, \ldots, n\}$.

- **1 pt**

b) Déterminer $\mathbb{P}([X_n = 1])$ et $\mathbb{P}([X_n = n])$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_n = 1]) = \dfrac{1}{n}$
- **4 pts :** $\mathbb{P}([X_n = n]) = \dfrac{1}{n!}$
  - × **1 pt :** $[X_n = n] = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$
  - × **1 pt : FPC**
  - × **1 pt :** $\forall i \in [\![2, n]\!]$**,** $\mathbb{P}_{A_1 \cap \ldots \cap A_{i-1}}\big(A_i\big) = \dfrac{1}{i}$
  - × **1 pt : fin calcul**

c) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer la relation :

$$\forall j \geqslant 2,\ \mathbb{P}([X_n = j]) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_k = j-1])$$

- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([X_n = j]\big) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big([I_n = k] \cap [X_n = j]\big)$ **(FPT)**
- **1 pt :** $= \sum\limits_{k=2}^{n} \mathbb{P}\big([I_n = k]\big) \times \mathbb{P}_{[I_n = k]}\big([X_n = j]\big)$ **(d'après *3.b)*)**
- **1 pt :** $= \sum\limits_{k=2}^{n} \mathbb{P}\big([I_n = k]\big) \times \mathbb{P}\big([X_{k-1} = j-1]\big)$ **(d'après *3.c)*)**
- **1 pt : fin calcul**

d) Si n est supérieur ou égal à 3 et j supérieur ou égal à 2, calculer :

$$n\,\mathbb{P}([X_n = j]) - (n-1)\,\mathbb{P}([X_{n-1} = j])$$

En déduire, si n est un entier supérieur ou égal à 2 :

$$\forall j \geqslant 1,\ \mathbb{P}([X_n = j]) = \frac{n-1}{n}\,\mathbb{P}([X_{n-1} = j]) + \frac{1}{n}\,\mathbb{P}([X_{n-1} = j-1])$$

- **1 pt :** $\forall n \geqslant 3$**,** $\forall j \geqslant 2$**,** $n\ \mathbb{P}\big([X_n = j]\big) - (n-1)\ \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j]\big) = \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j-1]\big)$
- **1 pt :** $\forall n \geqslant 3$**,** $\forall j \geqslant 2$**,** $\mathbb{P}\big([X_n = j]\big) = \dfrac{n-1}{n}\ \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j]\big) + \dfrac{1}{n}\ \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j-1]\big)$
- **3 pts : cas** $n = 2$
  - × **1 pt : cas** $j \geqslant 3$
  - × **1 pt : cas** $j = 2$
  - × **1 pt : cas** $j = 1$

4. ***a)*** Si n est supérieur ou égal à 2, montrer, en utilisant ***3.d)*** :

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n}$$

- **1 pt : X_{n-1} et X_n admettent une espérance**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{n-1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} j \ \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j] \big) + \dfrac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} j \ \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j-1] \big)$
- **1 pt :** $= \dfrac{n-1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n-1} j \ \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j] \big) + \dfrac{1}{n} \sum\limits_{j=2}^{n} j \ \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j-1] \big)$
- **1 pt :** $= \dfrac{n-1}{n} \ \mathbb{E}(X_{n-1}) + \dfrac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n-1} j \ \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j] \big) + \dfrac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j] \big)$
- **1 pt :** $\big([X_{n-1} = j] \big)_{j \in [\![1, n-1]\!]}$ **est un système complet d'événements**

b) En déduire $\mathbb{E}(X_n)$ et donner un équivalent simple de $\mathbb{E}(X_n)$ quand n tend vers l'infini.

- **1 pt :** $\sum\limits_{k=2}^{n} \big(\mathbb{E}(X_k) - \mathbb{E}(X_{k-1}) \big) = \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k}$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_n) = h_n$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$

5. ***a)*** Si n est supérieur ou égal à 2, calculer $\mathbb{E}(X_n^2)$ en fonction de $\mathbb{E}(X_{n-1}^2)$ et de $\mathbb{E}(X_{n-1})$.

- **1 pt : X_{n-1} et X_n admettent une variance**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_n^2) = \dfrac{n-1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} j^2 \ \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j] \big) + \dfrac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} j^2 \ \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j-1] \big)$
- **1 pt :** $= \dfrac{n-1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n-1} j^2 \ \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j] \big) + \dfrac{1}{n} \sum\limits_{j=2}^{n} j^2 \ \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j-1] \big)$
- **1 pt :** $= \dfrac{n-1}{n} \ \mathbb{E}\big(X_{n-1}^2\big) + \dfrac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n-1} j^2 \ \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j] \big)$
- **1 pt :** $\big([X_{n-1} = j] \big)_{j \in [\![1, n-1]\!]}$ **est un système complet d'événements**
- **1 pt :** $\mathbb{E}\big(X_{n-1}^2\big) + \dfrac{2}{n} \ \mathbb{E}(X_{n-1}) + \dfrac{1}{n}$

b) En déduire : $\mathbb{V}(X_n) = h_n - k_n$ (en reprenant les notations de la **Partie I**).

- **1 pt :** $\mathbb{V}(X_n) = \left(\mathbb{E}\big(X_{n-1}^2\big) + \dfrac{2}{n} \ \mathbb{E}(X_{n-1}) + \dfrac{1}{n} \right) - \left(\mathbb{E}(X_{n-1}) + \dfrac{1}{n} \right)^2$ **(d'après *6.a)* et *7.a)*)**
- **1 pt :** $\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{V}(X_{n-1}) + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2}$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=2}^{n} \big(\mathbb{V}(X_k) - \mathbb{V}(X_{k-1}) \big) = \sum\limits_{k=2}^{n} \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k^2} \right)$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(X_n) = h_n - k_n$

c) Donner un équivalent de $\mathbb{V}(X_n)$ quand n tend vers l'infini.

- **1 pt :** $\mathbb{V}(X_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$

6. Soit $(T_i)_{i \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout i entier naturel non nul, T_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{i}$. On pose :

$$S_n \ = \ \sum_{i=1}^{n} T_i \ = \ T_1 + \cdots + T_n$$

a) Vérifier que X_1 et T_1 ont même loi.

- **1 pt**

b) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer, pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}([S_n = j]) \ = \ \frac{1}{n}\, \mathbb{P}([S_{n-1} = j-1]) + \frac{n-1}{n}\, \mathbb{P}([S_{n-1} = j])$$

En déduire que X_n et S_n ont même loi.

- **1 pt :** $\mathbb{P}\big(\,[S_n = j]\,\big) = \mathbb{P}\big(\,[T_n = 0] \cap [S_n = j]\,\big) \ + \ \mathbb{P}\big(\,[T_n = 1] \cap [S_n = j]\,\big)$ **(FPT)**
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big(\,[S_n = j]\,\big) = \mathbb{P}\big(\,[T_n = 0] \cap [S_{n-1} = j]\,\big) \ + \ \mathbb{P}\big(\,[T_n = 1] \cap [S_{n-1} = j-1]\,\big)$
- **1 pt :** T_n **et** S_{n-1} **indépendantes par lemme des coalitions**
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big(\,[S_n = j]\,\big) = \dfrac{n-1}{n} \times \mathbb{P}\big(\,[S_{n-1} = j]\,\big) \ + \ \dfrac{1}{n} \times \mathbb{P}\big(\,[S_{n-1} = j-1]\,\big)$
- **1 pt : initialisation**
- **4 pts : hérédité**
  - × **2 pts :** $j \in [\![1, n+1]\!]$
  - × **2 pts :** $j = 0$ **(1 pt pour** $[S_{n+1} = 0] = \bigcap\limits_{i=1}^{n+1} [T_i = 0]$**, 1 pt pour indépendance de** T_1**, …,** T_{n+1}**)**

c) Retrouver ainsi $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$.

- **1 pt :** S_n **admet une variance (et donc une espérance)**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(S_n) = h_n$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(S_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{V}(T_i)$ **(par indépendance de** T_1**, …,** T_n**)**
- **1 pt :** $\mathbb{V}(S_n) = h_n - k_n$
- **1 pt : même loi** $\Rightarrow$ **mêmes moments**