DS4 (version A)

Exercice 1

Partie I

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. Soit f l'application définie sur E qui associe à tout polynôme $P \in E$, le polynôme $f(P)$ défini par :

$$\big(f(P)\big)(X) \ = \ (1 - X - X^2)\, P'(X) + \frac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\, P''(X)$$

Dans la suite, on note $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

2. Déterminer la matrice A représentative de f dans la base canonique de E.

3. Montrer : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

4. Démontrer que f n'est pas bijectif.

5. ***a)*** Déterminer des bases de $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ ainsi que les dimensions de ces espaces vectoriels.

b) Démontrer que la famille $\mathcal{F} = \big(f(P_1), P_0\big)$ est une base de $\text{Ker}(f)$.

6. ***a)*** Montrer que la famille $\mathcal{G} = \big(P_1, f(P_1), P_0\big)$ est une base de E.

b) Déterminer la matrice T représentative de f dans la base $\big(P_1, f(P_1), P_0\big)$.

Partie II

On note désormais E un espace vectoriel **quelconque** de dimension 3.
On considère dans la suite f un endomorphisme de E différent de l'endomorphisme nul de E.

7. Montrer : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} \ \Leftrightarrow \ \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.

On suppose dans les questions ***8.*** et ***9.*** : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

8. ***a)*** Comparer les dimensions de $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.

b) Déterminer alors précisément les dimensions de ces deux espaces vectoriels.

9. Soient $u \notin \text{Ker}(f)$ et $v \in \text{Ker}(f) \setminus \text{Im}(f)$.

a) Montrer que la famille $\mathcal{F} = (f(u), v)$ est une base de $\text{Ker}(f)$.

b) Montrer que la famille $\mathcal{G} = (u, f(u), v)$ est une base de E.

c) Déterminer la matrice T représentative de f dans la base $(u, f(u), v)$.

Exercice 2

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce truquée telle que la probabilité d'apparition de « pile » soit égale à p, $p \in]0, 1[$.
On pourra noter $q = 1 - p$.
Soit N un entier naturel non nul fixé.
On effectue N lancers du dé ; si n est le nombre de « 6 » obtenus, on lance alors n fois la pièce.

On définit trois variables aléatoires X, Y, Z de la manière suivante :

× Z indique le nombre de « 6 » obtenus aux lancers du dé,

× X indique le nombre de « piles » obtenus aux lancers de la pièce,

× Y indique le nombre de « faces » obtenues aux lancers de la pièce.

Ainsi, $X + Y = Z$ et, si Z prend la valeur 0, alors X et Y prennent la valeur 0.

1. Préciser la loi de Z, son espérance et sa variance.

2. Pour $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[Z=n]}([X = k])$.
On distinguera les cas : $k \leqslant n$ et $k > n$.

3. Montrer, pour tout couple d'entiers naturels (k, n) :

× si $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant N$ alors $\mathbb{P}([X = k] \cap [Z = n]) = \binom{n}{k} \binom{N}{n} p^k (1 - p)^{n-k} \left(\dfrac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\dfrac{1}{6}\right)^n$.

× si $n > N$ ou $k > n$ alors $\mathbb{P}([X = k] \cap [Z = n]) = 0$.

4. Calculer la probabilité $\mathbb{P}([X = 0])$.

5. Montrer pour tout couple d'entiers naturels (k, n) tel que $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant N$:

$$\binom{n}{k} \binom{N}{n} = \binom{N}{k} \binom{N-k}{n-k}$$

En déduire la probabilité $\mathbb{P}([X = k])$.

6. Montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre $(N, \frac{p}{6})$.
Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?

7. Est-ce que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes ?
Déterminer la loi du couple (X, Y).

8. **Seulement pour les cubes** : En comparant les variances de Z et de $X + Y$, déterminer la covariance du couple (X, Y).

Problème

Ce problème se compose de deux parties. Si le candidat ne parvient pas à établir un résultat demandé, il l'indiquera clairement, et il pourra pour la suite admettre ce résultat.
Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.
On considère une urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n.
On tire une boule au hasard dans U_n. On note k le numéro de cette boule.

- Si k est égal à 1, on arrête les tirages.
- Si k est supérieur ou égal à 2, on enlève de l'urne U_n les boules numérotées de k à n (il reste donc les boules numérotées de 1 à $k-1$), et on effectue à nouveau un tirage dans l'urne.

On répète ces tirages jusqu'à l'obtention de la boule numéro 1.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule numéro 1. On note Y_n la variable aléatoire égale à la somme des numéros des boules tirées.
On note $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$ (respectivement $\mathbb{E}(Y_n)$ et $\mathbb{V}(Y_n)$) l'espérance et la variance de X_n (respectivement Y_n).

Dans tout le problème, $\mathbb{P}_B(A)$ désigne la probabilité conditionnelle de A sachant B, où B est un événement non négligeable.

Partie I

1. On pose : $h_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$.

a) Montrer, pour tout entier naturel k non nul, les inégalités :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

où ln désigne le logarithme népérien.

b) En déduire les inégalités : $\ln(n+1) \leqslant h_n \leqslant 1 + \ln(n)$.

c) Déterminer un équivalent simple de h_n quand n tend vers l'infini.

2. On pose : $k_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2} = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$.

a) Montrer, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, l'inégalité :

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

b) En déduire la majoration : $k_n \leqslant 2$.

c) Déterminer un équivalent simple de $h_n - k_n$ quand n tend vers l'infini.

Partie II. Étude de la variable aléatoire X_n

On note I_n la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée dans l'urne U_n.

1. ***a)*** Quelle est la loi de I_n ?

b) Quelle est la loi conditionnelle de X_n sachant $[I_n = 1]$?

c) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{2, \ldots, n\}, \ \mathbb{P}_{[I_n=k]}([X_n = j]) = \mathbb{P}([X_{k-1} = j-1])$$

2. ***a)*** Quelle est la loi de X_1 ?

b) Quel est l'événement $[X_2 = 1]$? Donner la loi de X_2, son espérance et sa variance.

c) Calculer $\mathbb{P}_{[I_3=1]}([X_3 = 2])$, $\mathbb{P}_{[I_3=2]}([X_3 = 2])$, $\mathbb{P}_{[I_3=3]}([X_3 = 2])$.
Déterminer la loi de X_3, son espérance et sa variance.

d) Déterminer la loi du couple (I_3, X_3).
Seulement pour les cubes : En déduire la covariance du couple (I_3, X_3). Les variables aléatoires I_3 et X_3 sont-elles indépendantes ?

3. ***a)*** Montrer que X_n prend ses valeurs dans $\{1, 2, \ldots, n\}$.

b) Déterminer $\mathbb{P}([X_n = 1])$ et $\mathbb{P}([X_n = n])$.

c) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer la relation :

$$\forall j \geqslant 2,\ \mathbb{P}([X_n = j]) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_k = j-1])$$

d) Si n est supérieur ou égal à 3 et j supérieur ou égal à 2, calculer :

$$n\,\mathbb{P}([X_n = j]) - (n-1)\,\mathbb{P}([X_{n-1} = j])$$

En déduire, si n est un entier supérieur ou égal à 2 :

$$\forall j \geqslant 1,\ \mathbb{P}([X_n = j]) = \frac{n-1}{n}\, \mathbb{P}([X_{n-1} = j]) + \frac{1}{n}\, \mathbb{P}([X_{n-1} = j-1])$$

4. ***a)*** Si n est supérieur ou égal à 2, montrer, en utilisant ***3.d)*** :

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n}$$

b) En déduire $\mathbb{E}(X_n)$ et donner un équivalent simple de $\mathbb{E}(X_n)$ quand n tend vers l'infini.

5. ***a)*** Si n est supérieur ou égal à 2, calculer $\mathbb{E}(X_n^2)$ en fonction de $\mathbb{E}(X_{n-1}^2)$ et de $\mathbb{E}(X_{n-1})$.

b) En déduire : $\mathbb{V}(X_n) = h_n - k_n$ (en reprenant les notations de la **Partie I**).

c) Donner un équivalent de $\mathbb{V}(X_n)$ quand n tend vers l'infini.

6. Soit $(T_i)_{i \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout i entier naturel non nul, T_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{i}$. On pose :

$$S_n \ = \ \sum_{i=1}^{n} T_i \ = \ T_1 + \cdots + T_n$$

a) Vérifier que X_1 et T_1 ont même loi.

b) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer, pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}([S_n = j]) \ = \ \frac{1}{n}\, \mathbb{P}([S_{n-1} = j-1]) + \frac{n-1}{n}\, \mathbb{P}([S_{n-1} = j])$$

En déduire que X_n et S_n ont même loi.

c) Retrouver ainsi $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$.