DS3 (ESSEC II 2018)

On s'intéresse à l'évolution d'une population de petits organismes (typiquement des insectes) pendant une « saison » reproductrice de durée maximale T où $T \in \mathbb{N}^*$. Les insectes sont supposés vivre une unité de temps, au bout de laquelle ils meurent en pondant un certain nombre d'œufs. Au moment du dépôt d'un œuf, un processus chimique, la diapause, est susceptible de se mettre en marche qui entraîne l'arrêt de maturation de l'œuf jusqu'à la saison suivante. Ainsi, à chaque t de la saison, une génération d'insectes s'éteint, en déposant des œufs. Immédiatement, une proportion $p(t)$ de ces œufs se mettent en diapause. Les œufs qui ne sont pas entrés en diapause éclosent avant la date $t+1$, donnant naissance à une nouvelle génération d'insectes, qui s'éteindra à la date $t+1$ en déposant des œufs, etc. Comme, à la fin de la saison, tous les organismes vivants de la population meurent, hormis les œufs qui sont en diapause, ce sont ces derniers qui seront à l'origine d'une nouvelle population qui éclora à la saison suivante. Il est donc fondamental pour la survie de la lignée que les organismes adoptent une stratégie maximisant le nombre d'œufs en diapause accumulés jusqu'à la date où la saison s'achève.

Au cours du problème, on s'intéressera plus particulièrement au cas où la durée de la saison est une variable aléatoire τ pouvant prendre des valeurs entières entre 1 et T. Pour $t \in \{1, 2, \dots, T\}$, l'événement $[\tau = t]$ signifiera donc que la saison s'arrête à la date t.

Toutes les variables aléatoires intervenant dans le problème sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Pour toute variable aléatoire Y, on notera $\mathbb{E}(Y)$ son espérance lorsqu'elle existe.

Partie I - Modèle de population saisonnière

Dans cette question, on définit l'évolution formelle du nombre d'œufs en diapause entre les dates 0 et T. On note $D(t)$ = nombre d'œufs en diapause à la date t. Les œufs pondus à la date t qui entrent en diapause sont comptabilisés à la date $t+1$.

$$\begin{aligned} N(t) &= \text{nombre moyen d'œufs produits à la date } t \\ p(t) &= \text{proportion des œufs produits à la date } t \text{ qui entrent en diapause} \end{aligned}$$

Par convention, la date 0 d'une saison est celle où les insectes nés des œufs en diapause de la saison précédente pondent $N(0)$ œufs. On suppose pour simplifier :

- que $N(0)$ est un entier naturel non nul.
- que tous les œufs issus de la saison précédente ont éclos et donc que $D(0) = 0$.
- que pour tout $t \in \{0, 1, \dots, T-1\}$, $0 < p(t) \leqslant 1$

Enfin, on suppose qu'à chaque date t de la saison, un individu produit en moyenne α œufs (α étant un réel strictement positif). **Par simplicité, on supposera que α reste constant pendant toute la saison.**

1. a) Montrer que $D(t+1) = D(t) + p(t)\,N(t)$ pour tout entier t tel que $0 \leqslant t \leqslant T-1$.

Démonstration.
Soit $t \in \{0, \dots, T-1\}$.
Le nombre d'œufs en diapause à l'instant $(t+1)$, $D(t+1)$, est la somme :

× du nombre d'œufs qui étaient déjà en diapause à l'instant t : $D(t)$,
× et du nombre d'œufs pondus à l'instant t entrant tout de suite en diapause.
Or le nombre d'œufs pondus à l'instant t est $N(t)$, et la proportion d'entre eux entrant en diapause est $p(t)$.
Ainsi le nombre d'œufs pondus à l'instant t entrant immédiatement en diapause est : $p(t)\,N(t)$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall t \in \{0, \dots, T-1\},\ D(t+1) = D(t) + p(t)\,N(t).}$$

□

b) Montrer que $N(t+1) = \alpha(1-p(t))\,N(t)$ pour tout entier t tel que $0 \leqslant t \leqslant T-1$.

Démonstration.
Soit $t \in \{0, \ldots, T-1\}$.
À l'instant t, $N(t)$ œufs sont pondus. Parmi ceux-ci :

× $p(t)\,N(t)$ entrent immédiatement en diapause,

× $(1-p(t))\,N(t)$ n'entrent pas en diapause.

Seuls les œufs qui ne sont pas entrés en diapause à l'instant t produisent des œufs à l'instant $(t+1)$. Donc $(1-p(t))\,N(t)$ individus produisent des œufs à l'instant $(t+1)$.
D'après l'énoncé, chaque individu produit α œufs.
Ainsi, le nombre d'œufs produits à l'instant $(t+1)$ est $\alpha\,(1-p(t))\,N(t)$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall t \in \{0, \ldots, T-1\},\ N(t+1) = \alpha\,(1-p(t))\,N(t).}$$

□

2. On suppose dans cette question que $\alpha \leqslant 1$.

a) Montrer que pour tout entier t tel que $0 \leqslant t \leqslant T-1$, $N(t+1) \leqslant N(t)$.

Démonstration.
Soit $t \in \{0, \ldots, T-1\}$.

- D'après la question précédente : $N(t+1) = \alpha\,(1-p(t))\,N(t)$.
- Or, dans cette question : $\alpha \leqslant 1$.
- De plus, d'après l'énoncé : $0 < p(t) \leqslant 1$. D'où : $0 \leqslant 1 - p(t) < 1$.

On en déduit : $\alpha\,(1-p(t)) \leqslant 1$. Ainsi :

$$\underset{\displaystyle N(t+1)}{\underset{\shortparallel}{\alpha\,(1-p(t))\,N(t)}} \quad \leqslant \quad N(t)$$

$$\boxed{\forall t \in \{0, \ldots, T-1\},\ N(t+1) \leqslant N(t)}$$

□

b) Montrer que pour tout entier t tel que $0 \leqslant t \leqslant T-1$:

$$D(t+1) + N(t+1) \ \leqslant\ D(t) + N(t)$$

Démonstration.
Soit $t \in \{0, \ldots, T-1\}$.
D'après les questions ***1.a)*** et ***1.b)*** :

$$D(t+1) + N(t+1) \ = \ \big(D(t) + p(t)\,N(t)\big) + \alpha\,(1-p(t))\,N(t)$$

Or $\alpha \leqslant 1$. On obtient donc : $\alpha\,(1-p(t))\,N(t) \leqslant (1-p(t))\,N(t)$.
Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} D(t+1) + N(t+1) & \leqslant & D(t) + p(t)\,N(t) + (1-p(t))\,N(t) \\ & = & D(t) + (\cancel{p(t)} + 1 - \cancel{p(t)})\,N(t) \\ & = & D(t) + N(t) \end{array}$$

$$\boxed{\forall t \in \{0, \ldots, T-1\},\ D(t+1) + N(t+1) \leqslant D(t) + N(t).}$$

□

c) Montrer que pour tout entier t tel que $0 \leqslant t \leqslant T$:

$$D(t) + N(t) \leqslant N(0)$$

Démonstration.
Démontrons par récurrence que pour tout $t \in \{0, \ldots, T\}$, $\mathcal{P}(t)$ où $\mathcal{P}(t) : D(t)+N(t) \leqslant N(0)$.

- **Initialisation** :
  $D(0) + N(0) = 0 + N(0) = N(0) \leqslant N(0)$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : Soit $t \in \{0, \ldots, T-1\}$.
  Supposons $\mathcal{P}(t)$ et démontrons $\mathcal{P}(t+1)$ (*i.e.* $D(t+1) + N(t+1) \leqslant N(0)$)

$$\begin{array}{rcll} D(t+1) + N(t+1) & \leqslant & D(t) + N(t) & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{2.b)}}\textit{)} \\ & \leqslant & N(0) & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \end{array}$$

  D'où $\mathcal{P}(t+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall t \in \{0, \ldots, T\},\ D(t) + N(t) \leqslant N(0).}$$

Commentaire

On pouvait sans doute obtenir la quasi-totalité des points alloués à cette question sans effectuer proprement la récurrence. Cela donnerait la rédaction suivante.
Soit $t \in \{0, \ldots, T-1\}$.

- D'après la question précédente : $D(t+1) + N(t+1) \leqslant D(t) + N(t)$.
- En appliquant cette inégalité à $t-1$, on obtient : $D(t) + N(t) \leqslant D(t-1) + N(t-1)$.
- Si on itère ce procédé, on en déduit :

$$D(t+1)+N(t+1) \leqslant D(t)+N(t) \leqslant D(t-1)+N(t-1) \leqslant \cdots \leqslant D(1)+N(1) \leqslant D(0)+N(0)$$

- Or, d'après l'énoncé, $D(0) = N(0)$. D'où : $D(t) + N(t) \leqslant N(0)$.

□

d) Montrer que pour tout entier t tel que $0 \leqslant t \leqslant T$, $D(t) \leqslant N(0)$.

Démonstration.
Soit $t \in \{0, \ldots, T\}$.
D'après la question précédente : $D(t) + N(t) \leqslant N(0)$.
Or $N(t)$ est un entier naturel. En particulier : $N(t) \geqslant 0$.
Ainsi : $D(t) \leqslant D(t) + N(t) \leqslant N(0)$.

$$\boxed{\forall t \in \{0, \ldots, T\},\ D(t) \leqslant N(0)}$$

□

e) On suppose que $p(0) = 1$.

(i) Montrer que pour tout entier t tel que $1 \leqslant t \leqslant T$, $N(t) = 0$.

Démonstration.
Démontrons pas récurrence que pour tout $t \in \{1, \ldots, T\}$, $\mathcal{P}(t)$ où $\mathcal{P}(t) : N(t) = 0$.

- **Initialisation** :
  D'après la question ***1.b)*** : $N(1) = \alpha\,(1 - p(0))\,N(0) = \alpha\,(\cancel{1} - \cancel{1})\,N(0) = 0$.
  D'où $\mathcal{P}(1)$.

▶ **Hérédité** : Soit $t \in \{1, \dots, T-1\}$.
Supposons $\mathcal{P}(t)$ et démontrons $\mathcal{P}(t+1)$ (*i.e.* $N(t+1) = 0$).

$$\begin{array}{rcll} N(t+1) & = & \alpha\,(1-p(t))\,N(t) & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{1.b)}}\textit{)} \\ & = & \alpha\,(1-p(t)) \times 0 & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & 0 & \end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(t+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall t \in \{1, \dots, T\},\ N(t) = 0.}$$

Commentaire

Comme pour la question ***2.c)***, on pouvait sans doute obtenir la quasi-totalité des points alloués à cette question sans effectuer proprement la récurrence. Cela donnerait la rédaction suivante.
Soit $t \in \{0, \dots, T-1\}$.

- D'après la question ***1.b)*** : $N(t+1) = \alpha\,(1-p(t))\,N(t)$.
- En appliquant cette inégalité à $t-1$, on obtient : $N(t) = \alpha\,(1-p(t-1))\,N(t-1)$.
- Si on itère ce procédé, on en déduit :

$$\begin{array}{rcl} N(t+1) & = & \alpha\,(1-p(t))\,N(t) \\ & = & \alpha^2\,(1-p(t))\,(1-p(t-1))\,N(t-1) \\ & = & \cdots \\ & = & \alpha^{t+1}\,(1-p(t))\,(1-p(t-1))\,\cdots\,(1-p(0))\,N(0) \end{array}$$

- Or, d'après l'énoncé, $p(0) = 1$. D'où : $1 - p(0) = 0$.
  Ainsi : $N(t) = 0$.

□

(ii) Montrer que pour tout entier t tel que $1 \leqslant t \leqslant T$, $D(t) = N(0)$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence que pour tout $t \in \{1, \dots, T\}$, $\mathcal{P}(t)$ où $\mathcal{P}(t)$: $D(t) = N(0)$.

▶ **Initialisation** :
D'après la question ***1.a)*** : $D(1) = D(0) + p(0)\,N(0) = 0 + 1 \times N(0) = N(0)$.
D'où $\mathcal{P}(1)$.

▶ **Hérédité** : Soit $t \in \{1, \dots, T-1\}$.
Supposons $\mathcal{P}(t)$ et démontrons $\mathcal{P}(t+1)$ (*i.e.* $D(t+1) = N(0)$).

$$\begin{array}{rcll} D(t+1) & = & D(t) + p(t)\,N(t) & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{1.a)}}\textit{)} \\ & = & D(t) + \cancel{p(t) \times 0} & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{2.e)(ii)}}\textit{, car } t \geqslant 1\textit{)} \\ & = & N(0) & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(t+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall t \in \{1, \dots, T\},\ D(t) = N(0).}$$

□

(iii) En déduire que si $\alpha \leqslant 1$, la meilleure stratégie adaptée à la saison est que les $N(0)$ œufs produits à la date 0 entrent en diapause immédiatement.

Démonstration.

- D'après l'énoncé, la stratégie optimale est la stratégie qui maximise le nombre d'œufs en diapause accumulés jusqu'à la date T (date de fin de saison).
- Si $\alpha \leqslant 1$, d'après la question ***2.d)*** : $D(t) \leqslant N(0)$.
- Or, d'après la question ***2.e)(ii)***, si $p(0) = 1$, alors $D(t) = N(0)$.
  Le nombre d'œufs en diapause à chaque instant $t \in \{1, \dots, T\}$ est donc maximal si $p(0) = 1$, c'est-à-dire si la proportion d'œufs entrant en diapause à l'instant 0 parmi les $N(0)$ vaut 1.

$$\boxed{\text{Autrement dit, la stratégie optimale est que les } N(0) \text{ œufs produits à la date 0 entrent en diapause immédiatement.}}$$

□

3. **On suppose désormais $\alpha > 1$ jusqu'à la fin du problème.**
On introduit maintenant τ une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, 2, \dots, T\}$ qui représente la date où s'achève la saison. On suppose que pour tout $t \in \{1, 2, \dots, T\}$, $\mathbb{P}([\tau = t]) > 0$.

a) Montrer que pour tout $t \in \{1, 2, \dots, T\}$, $\mathbb{P}([\tau \geqslant t]) > 0$. On définit alors $H(t) = \mathbb{P}_{[\tau \geqslant t]}([\tau = t])$.

Démonstration.
Soit $t \in \{1, \dots, T\}$.
Tout d'abord : $[\tau = t] \subset [\tau \geqslant t]$. Donc : $\mathbb{P}([\tau = t]) \leqslant \mathbb{P}([\tau \geqslant t])$.
Or, d'après l'énoncé : $\mathbb{P}([\tau = t]) > 0$. D'où :

$$\mathbb{P}([\tau \geqslant t]) \ \geqslant \ \mathbb{P}([\tau = t]) \ > \ 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall t \in \{1, \dots, T\},\ \mathbb{P}([\tau \geqslant t]) > 0.}$$

□

b) Montrer que : $H(t) = \dfrac{\mathbb{P}([\tau = t])}{\mathbb{P}([\tau \geqslant t])}$.

Démonstration.
Soit $t \in \{1, \dots, T\}$.

$$\begin{aligned} H(t) &= \mathbb{P}_{[\tau \geqslant t]}([\tau = t]) \\ &= \frac{\mathbb{P}([\tau \geqslant t] \cap [\tau = t])}{\mathbb{P}([\tau \geqslant t])} \\ &= \frac{\mathbb{P}([\tau = t])}{\mathbb{P}([\tau \geqslant t])} \qquad \textit{(car } [\tau = t] \subset [\tau \geqslant t]\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in \{1, \dots, T\},\ H(t) = \frac{\mathbb{P}([\tau = t])}{\mathbb{P}([\tau \geqslant t])}}$$

□

c) Montrer que : $H(T) = 1$.

Démonstration.
La v.a.r. τ est à valeurs dans $\{1, \dots, T\}$. En particulier, τ ne prend pas de valeurs strictement supérieures à T. Donc : $[\tau \geqslant T] = [\tau = T]$.

D'où : $H(t) \ = \ \dfrac{\mathbb{P}([\tau = T])}{\mathbb{P}([\tau \geqslant T])} \ = \ \dfrac{\cancel{\mathbb{P}([\tau = T])}}{\cancel{\mathbb{P}([\tau = T])}} \ = \ 1.$

$$\boxed{\text{Ainsi : } H(T) = 1.}$$

□

d) Calculer $H(t)$ pour $t \in \{1, 2, \ldots, T\}$ si τ suit une loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, T\}$.

Démonstration.

- Comme $\tau \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, T \rrbracket)$, alors :
  - $\times$ $\tau(\Omega) = \llbracket 1, T \rrbracket$.
  - $\times$ $\forall t \in \llbracket 1, T \rrbracket$, $\mathbb{P}([\tau = t]) = \dfrac{1}{T}$.
- Soit $t \in \llbracket 1, T \rrbracket$.

$$[\tau \geqslant t] \;=\; \bigcup_{k=t}^{T} [\tau = k]$$

De plus, les événements $[\tau = t]$, $\ldots$, $[\tau = T]$ sont incompatibles. Donc :

$$\mathbb{P}([\tau \geqslant t]) \;=\; \sum_{k=t}^{T} \mathbb{P}([\tau = k]) \;=\; \sum_{k=t}^{T} \frac{1}{T} \;=\; \frac{T - t + 1}{T}$$

- On en déduit :

$$H(t) \;=\; \frac{\mathbb{P}([\tau = t])}{\mathbb{P}([\tau \geqslant t])} \;=\; \frac{\frac{1}{\cancel{T}}}{\frac{T-t+1}{\cancel{T}}} \;=\; \frac{1}{T - t + 1}$$

$$\boxed{\forall t \in \{1, \ldots, T\},\ H(t) = \frac{1}{T - t + 1}}$$

□

e) (i) Soient T réels λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_T tels que $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_T = 1$. Par convention, on pose $\lambda_0 = 0$. Soient $q_1 = \lambda_1$, $q_2 = \lambda_2 - \lambda_1$, $\ldots$, $q_T = \lambda_T - \lambda_{T-1}$.
Montrer que $(q_i)_{1 \leqslant i \leqslant T}$ définit une loi de probabilité sur $\{1, 2, \ldots, T\}$.

Démonstration.

- Soit $i \in \llbracket 1, T \rrbracket$.
  D'après l'énoncé : $\lambda_i > \lambda_{i-1}$. Donc $q_i = \lambda_i - \lambda_{i-1} > 0$.
- De plus :

$$\sum_{i=1}^{T} q_i \;=\; \sum_{i=1}^{T} (\lambda_i - \lambda_{i-1}) \;=\; \lambda_T - \lambda_0 \;=\; 1 - 0 \;=\; 1$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } (q_i)_{i \in \llbracket 1, T \rrbracket} \text{ définit une loi de probabilité.}}$$

□

(ii) Calculer $H(t)$ si τ suit la loi précédente.

Démonstration.

- Si la v.a.r. τ suit la loi $(q_i)_{i \in \llbracket 1, T \rrbracket}$, alors :

$$\forall t \in \llbracket 1, T \rrbracket,\ \mathbb{P}([\tau = t]) = q_t$$

- Soit $t \in \llbracket 1, T \rrbracket$. Avec le même raisonnement qu'en question ***3.d)*** :

$$\mathbb{P}([\tau \geqslant t]) \;=\; \sum_{i=t}^{T} \mathbb{P}([\tau = i]) \;=\; \sum_{i=t}^{T} q_i \;=\; \sum_{i=t}^{T} (\lambda_i - \lambda_{i-1}) \;=\; \lambda_T - \lambda_{t-1}$$

- Ainsi : $H(t) \;=\; \dfrac{\mathbb{P}([\tau = t])}{\mathbb{P}([\tau \geqslant t])} \;=\; \dfrac{q_t}{\lambda_T - \lambda_{t-1}} \;=\; \dfrac{\lambda_t - \lambda_{t-1}}{\lambda_T - \lambda_{t-1}}$.

$$\boxed{\forall t \in \llbracket 1, T \rrbracket,\ H(t) \;=\; \frac{q_t}{\lambda_T - \lambda_{t-1}} \;=\; \frac{\lambda_t - \lambda_{t-1}}{\lambda_T - \lambda_{t-1}}}$$

□

(iii) On suppose que $T \geqslant 2$ et de plus que pour tout entier n tel que $1 \leqslant n \leqslant T-1$, on a $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant \lambda_n - \lambda_{n-1}$. Montrer que $t \mapsto H(t)$ est croissante sur $\{1, 2, \dots, T\}$.

Démonstration.
Soit $t \in [\![1, T-1]\!]$. D'après la question ***3.e)(ii)*** :

$$H(t+1) \geqslant H(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\lambda_{t+1} - \lambda_t}{\lambda_T - \lambda_t} \geqslant \frac{\lambda_t - \lambda_{t-1}}{\lambda_T - \lambda_{t-1}}$$

- On sait déjà, d'après l'énoncé : $\lambda_{t+1} - \lambda_t \ \geqslant\ \lambda_t - \lambda_{t-1} \ \geqslant\ 0 \qquad (\star)$.
- De plus :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_T - \lambda_t} \geqslant \frac{1}{\lambda_T - \lambda_{t-1}} \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda_T - \lambda_t \leqslant \lambda_T - \lambda_{t-1} \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda_{t-1} \leqslant \lambda_t \end{aligned}$$

(par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$*)*

La dernière inégalité est vraie. Donc, par équivalence, la première également. On a donc :

$$\frac{1}{\lambda_T - \lambda_t} \ \geqslant\ \frac{1}{\lambda_T - \lambda_{t-1}} \ \geqslant\ 0$$

- On multiplie cette inégalité et l'inégalité $(\star)$ membre à membre (ce qui ne change pas leurs sens car les termes en présence sont positifs). On obtient alors :

$$\underbrace{\frac{\lambda_{t+1} - \lambda_t}{\lambda_T - \lambda_t}}_{= H(t+1)} \ \geqslant\ \underbrace{\frac{\lambda_t - \lambda_{t-1}}{\lambda_T - \lambda_{t-1}}}_{= H(t)}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } t \mapsto H(t) \text{ est croissante sur } \{1, \dots, T\}.}$$

□

On suppose désormais que $t \mapsto H(t)$ est croissante. Le but est maintenant de trouver une stratégie adéquate pour maximiser la quantité $\mathbb{E}\big(\ln(D(\tau))\big)$. On va commencer par regarder un exemple simple.

4. On suppose ici que $T = 2$, que H est donnée par $H(1) = \dfrac{1}{2}$ et $H(2) = 1$ et que $\alpha = 4$.

a) (i) Déterminer $\mathbb{P}([\tau = 1])$.

Démonstration.

- D'après la question ***3.b)*** : $H(1) = \dfrac{\mathbb{P}([\tau = 1])}{\mathbb{P}([\tau \geqslant 1])}$. Donc :

$$\mathbb{P}([\tau = 1]) \ = \ H(1)\,\mathbb{P}([\tau \geqslant 1]) \ = \ \frac{1}{2}\,\mathbb{P}([\tau \geqslant 1])$$

- De plus, comme $T = 2$: $\tau(\Omega) = \{1, 2\}$.
On en déduit : $[\tau \geqslant 1] = \Omega$. Donc :

$$\mathbb{P}([\tau \geqslant 1]) \ = \ \mathbb{P}(\Omega) \ = \ 1$$

- Ainsi : $\mathbb{P}([\tau = 1]) \ = \ \dfrac{1}{2}\,\mathbb{P}([\tau \geqslant 1]) \ = \ \dfrac{1}{2} \times 1 \ = \ \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\mathbb{P}([\tau = 1]) = \frac{1}{2}}$$

□

(ii) Quelle est la loi de τ ?

Démonstration.

- D'après les résultats de la question précédente : $\tau(\Omega) = \{1, 2\}$ et $\mathbb{P}([\tau = 1]) = \dfrac{1}{2}$.
- La famille $([\tau = 1], [\tau = 2])$ est un système complet d'événements. Donc :

$$\mathbb{P}([\tau = 2]) \ = \ 1 - \mathbb{P}([\tau = 1]) \ = \ 1 - \frac{1}{2} \ = \ \frac{1}{2}$$

- On reconnaît les caractéristiques d'une v.a.r. de loi uniforme sur $\{1, 2\}$.

$$\boxed{\tau \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 2 \rrbracket)}$$

□

b) Montrer que pour $D(1)$ et $N(1)$ donnés, $D(2)$ est maximum pour $p(1) = 1$.

Démonstration.

- D'après la question ***1.a)*** : $D(2) = D(1) + p(1)\, N(1)$.
  Donc l'entier $D(2)$ est maximal si $D(1) + p(1)\, N(1)$ l'est.
- Or, si $D(1)$ et $N(1)$ sont fixés, alors $D(1) + p(1)\, N(1)$ est maximal si $p(1)$ l'est.
- De plus : $0 < p(1) \leqslant 1$. Donc $p(1)$ est maximal lorsque $p(1) = 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } D(2) \text{ est maximal lorsque } p(1) = 1.}$$

□

c) On suppose $p(1) = 1$. Montrer que :

$$\mathbb{E}\big(\ln(D(\tau)\big) \ = \ \frac{1}{2} \ln\big((4 - 3\,p(0))\,N(0)\big) + \frac{1}{2} \ln\big(p(0)\,N(0)\big)$$

Démonstration.

- La v.a.r. τ est une v.a.r. finie, donc la v.a.r. $\ln(D(\tau))$ l'est aussi.

$$\boxed{\text{Ainsi, la v.a.r. } \ln(D(\tau)) \text{ admet une espérance.}}$$

- D'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big(\ln(D(\tau))\big) &= \ln(D(1))\,\mathbb{P}([\tau = 1]) + \ln(D(2))\,\mathbb{P}([\tau = 2]) \\ &= \frac{1}{2}\ln(D(1)) + \frac{1}{2}\ln(D(2)) \end{aligned}$$

- Or : $D(1) \ = \ D(0) + p(0)\,N(0) \ = \ p(0)\,N(0)$.
- De plus :

$$\begin{aligned} D(2) &= D(1) + p(1)\,N(1) \ = \ D(1) + N(1) \\ &= D(0) + p(0)\,N(0) + \alpha\,(1 - p(0))\,N(0) \\ &= p(0)\,N(0) + 4(1 - p(0))\,N(0) \\ &= (4 - 3\,p(0))\,N(0) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{E}\big(\ln(D(\tau))\big) = \frac{1}{2}\ln\big(p(0)\,N(0)\big) + \frac{1}{2}\ln\big((4 - 3\,p(0))\,N(0)\big).}$$

□

d) Construire le tableau de variations sur $]0,1]$ de la fonction φ définie par :

$$\varphi(x) \;=\; \frac{1}{2}\ln\big((4-3x)\,N(0)\big)+\frac{1}{2}\ln\big(N(0)\,x\big)$$

Démonstration.

- La fonction φ est dérivable sur $]0,1]$ en tant que composée et somme de fonctions dérivables sur des intervalles adéquats. En effet, $N(0)>0$, donc : $N(0)\,x \in \,]0,N(0)]$ et $(4-3x)\,N(0) \in [N(0),4\,N(0)[$.
- Soit $x \in \,]0,1]$.

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{1}{2}\,\frac{-3\,\cancel{N(0)}}{(4-3x)\,\cancel{N(0)}}+\frac{1}{2}\,\frac{\cancel{N(0)}}{\cancel{N(0)}\,x}\\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4-3x}+\frac{1}{x}\right) \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{-3x+4-3x}{x\,(4-3x)}\\ &= \frac{1}{2}\,\frac{4-6x}{x(4-3x)} \;=\; \frac{2-3x}{x(4-3x)}\end{aligned}$$

- Comme $x \in \,]0,1]$: $x>0$ et $4-3x>0$. Donc :

$$\varphi'(x)\geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; 2-3x\geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; 2\geqslant 3x \;\Leftrightarrow\; \frac{2}{3}\geqslant x$$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{2}{3}$		1
Signe de $\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de φ	$-\infty$	$\nearrow$	$\varphi(\frac{2}{3})$	$\searrow$	$\ln(N(0))$

Détaillons les éléments de ce tableau :

× Tout d'abord : $\lim\limits_{x\to 0} \ln\big((4-3x)\,N(0)\big)=\ln\big(4\,N(0)\big)$. De plus : $\lim\limits_{x\to 0} \ln\big(N(0)\,x\big)=-\infty$.
D'où : $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x)=-\infty$.

× Ensuite :

$$\varphi(1) \;=\; \frac{1}{2}\ln\big((4-3\times 1)\,N(0)\big)+\frac{1}{2}\ln(N(0)\times 1) \;=\; \frac{1}{2}\ln(N(0))+\frac{1}{2}\ln(N(0)) \;=\; \ln(N(0))$$

Commentaire

On pouvait également essayer de simplifier l'expression de $\varphi(\frac{2}{2})$:

$$\begin{aligned}\varphi\Big(\frac{2}{3}\Big) &= \frac{1}{2}\ln\left(\left(4-\cancel{3}\times\frac{2}{\cancel{3}}\right)N(0)\right)+\frac{1}{2}\ln\left(N(0)\times\frac{2}{3}\right)\\ &= \frac{1}{2}\ln(2\,N(0))+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{3}\,N(0)\right) \;=\; \frac{1}{2}\left(\ln(2\,N(0))+\ln\left(\frac{2}{3}\,N(0)\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\ln(2)+\ln(N(0))+\ln(2)-\ln(3)+\ln(N(0))\right)\\ &= \ln(N(0))+\ln(2)-\frac{1}{2}\ln(3) \;=\; \ln\left(\frac{2\,N(0)}{\sqrt{3}}\right)\end{aligned}$$

□

e) Déterminer $p^*(0)$ qui maximise $\mathbb{E}\big(\ln(D(\tau))\big)$.

Démonstration.
D'après les questions ***4.c)*** et ***4.d)*** : $\mathbb{E}\big(\ln(D(\tau))\big) = \varphi(p(0))$.
Or, d'après la question ***4.d)***, la fonction φ admet un unique maximum en $\dfrac{2}{3}$.

$$\boxed{\text{Donc } \mathbb{E}\big(\ln(D(\tau))\big) \text{ est maximal pour } p^*(0) = \dfrac{2}{3}.}$$

□

Partie II - Transformation du problème

Par convention, on conviendra que si h **est une fonction numérique définie sur** $\{0, 1, 2, \ldots, T\}$, on a

$$\sum_{t=1}^{0} h(t) = 0$$

5. Montrer que pour tout $t \in \{0, 1, 2, \ldots, T\}$, $D(t) + N(t) > 0$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence que pour tout $t \in \{0, \ldots, T\}$, $\mathcal{P}(t)$ où $\mathcal{P}(t)$: $D(t) + N(t) > 0$.

- **Initialisation** :
D'après l'énoncé, $N(0)$ est un entier naturel non nul. Donc : $D(0) + N(0) = 0 + N(0) > 0$.
D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : Soit $t \in \{0, \ldots, T-1\}$.
Supposons $\mathcal{P}(t)$ et démontrons $\mathcal{P}(t+1)$ (*i.e.* $D(t+1) + N(t+1) > 0$).

$$\begin{aligned} D(t+1) + N(t+1) &= D(t) + p(t)\,N(t) + \alpha\,(1-p(t))\,N(t) \\ &= D(t) + \big(p(t) + \alpha(1-p(t))\big)\,N(t) \\ &= D(t) + N(t) + \big(p(t) + \alpha(1-p(t)) - 1\big)N(t) \\ &= D(t) + N(t) + (1-p(t))(\alpha-1)N(t) \end{aligned}$$

Or :
× par hypothèse de récurrence : $D(t) + N(t) > 0$,
× $1 - p(t) \geqslant 0$, car $0 < p(t) \leqslant 1$,
× $\alpha - 1 > 0$, car $\alpha > 1$,
× $N(t) \geqslant 0$, car $N(t)$ est un entier naturel.
On en déduit : $D(t+1) + N(t+1) > 0$.
D'où $\mathcal{P}(t+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall t \in \{0, \ldots, T\},\ D(t) + N(t) > 0.}$$

□

On pose
$$X(t) \;=\; \frac{D(t)}{D(t)+N(t)}$$

6. Montrer que pour tout $t \in \{0,1,2,\dots,T-1\}$:
$$X(t+1) \;=\; \frac{p(t)+(1-p(t))\,X(t)}{p(t)+\alpha\,(1-p(t))+(1-\alpha)(1-p(t))\,X(t)}$$

Démonstration.
Soit $t \in \{0,\dots,T-1\}$.

- D'une part : $X(t+1) \;=\; \dfrac{D(t+1)}{D(t+1)+N(t+1)} \;=\; \dfrac{D(t)+p(t)\,N(t)}{D(t)+p(t)\,N(t)+\alpha\,(1-p(t))\,N(t)}$.
- D'autre part :

$$\begin{aligned}
&\frac{p(t)+(1-p(t))\,X(t)}{p(t)+\alpha\,(1-p(t))+(1-\alpha)(1-p(t))X(t)}\\
=\;&\frac{p(t)+(1-p(t))\,\frac{D(t)}{D(t)+N(t)}}{p(t)+\alpha\,(1-p(t))+(1-\alpha)(1-p(t))\frac{D(t)}{D(t)+N(t)}}\\
=\;&\frac{\frac{p(t)(D(t)+N(t))+(1-p(t))D(t)}{\cancel{D(t)+N(t)}}}{\frac{(p(t)+\alpha(1-p(t))(D(t)+N(t))+(1-\alpha)(1-p(t))D(t)}{\cancel{D(t)+N(t)}}}\\
=\;&\frac{\cancel{p(t)\,D(t)}+p(t)\,N(t)+D(t)-\cancel{p(t)\,D(t)}}{\big(p(t)+\alpha(1-p(t))+(1-\alpha)(1-p(t))\big)D(t)+p(t)\,N(t)+\alpha(1-p(t))N(t)}
\end{aligned}$$

Or :
$$p(t)+\alpha(1-p(t))+(1-\alpha)(1-p(t)) \;=\; p(t)\big(\cancel{1-\alpha}-(\cancel{1-\alpha})\big)+\cancel{\alpha}+1-\cancel{\alpha} \;=\; 1$$

D'où :
$$\frac{p(t)+(1-p(t))\,X(t)}{p(t)+\alpha\,(1-p(t))+(1-\alpha)(1-p(t))X(t)} \;=\; \frac{D(t)+p(t)\,N(t)}{D(t)+p(t)\,N(t)+\alpha\,(1-p(t))\,N(t)} \;=\; X(t+1)$$

$$\boxed{\forall t \in \{0,\dots,T-1\},\ X(t+1) \;=\; \frac{p(t)+(1-p(t))\,X(t)}{p(t)+\alpha\,(1-p(t))+(1-\alpha)(1-p(t))\,X(t)}}$$
□

7. Soit $\xi \in [0,1]$ fixé. Pour $x \in [0,1]$, on pose :
$$\psi_\xi(x) \;=\; \frac{x+(1-x)\xi}{x+\alpha\,(1-x)+(1-\alpha)(1-x)\xi}$$

a) Montrer que ψ_ξ est croissante sur $[0,1]$.

Démonstration.

- La fonction ψ_ξ est dérivable sur $[0,1]$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $[0,1]$ dont le dénominateur ne s'annule pas.
  Démontrons que le dénominateur ne s'annule effectivement pas.
  Soit $x \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}
x+\alpha(1-x)+(1-\alpha)(1-x)\,\xi \;&=\; \big(1-\alpha-(1-\alpha)\,\xi\big)\,x+\alpha+(1-\alpha)\,\xi\\
&=\; (1-\alpha)(1-\xi)\,x+\alpha+(1-\alpha)\,\xi
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} x+\alpha(1-x)+(1-\alpha)(1-x)\,\xi=0 &\Leftrightarrow (1-\alpha)(1-\xi)\,x+\alpha+(1-\alpha)\,\xi=0 \\ &\Leftrightarrow (1-\alpha)(1-\xi)\,x=-\big(\alpha+(1-\alpha)\,\xi\big) \\ &\Leftrightarrow x=-\frac{\alpha+(1-\alpha)\,\xi}{(1-\alpha)(1-\xi)}=\frac{\alpha+(1-\alpha)\,\xi}{(\alpha-1)(1-\xi)} \qquad \textit{(si } \xi\neq 1\textit{)} \end{aligned}$$

Or :

$$\frac{\alpha+(1-\alpha)\,\xi}{(\alpha-1)(1-\xi)} = \frac{1+(\alpha-1)+(1-\alpha)\,\xi}{(\alpha-1)(1-\xi)} = \frac{1+(\alpha-1)(1-\xi)}{(\alpha-1)(1-\xi)} > 1$$

De plus $x\in[0,1]$. Donc $x\neq \dfrac{\alpha+(1-\alpha)\,\xi}{(\alpha-1)(1-\xi)}$.

Par équivalence, on en déduit bien : $x+\alpha(1-x)+(1-\alpha)(1-x)\,\xi\neq 0$, c'est-à-dire que le dénominateur de ψ_ξ ne s'annule pas sur $[0,1]$ si $\xi\neq 1$.

Soit $x\in[0,1]$. Si $\xi=1$:

$$x+\alpha(1-x)+(1-\alpha)(1-x) = x+(1-x)\big(\cancel{\alpha}+(1-\cancel{\alpha})\big) = \cancel{x}+1-\cancel{x} = 1$$

Donc le dénominateur de ψ_1 est toujours non nul sur $[0,1]$.

Commentaire

On détaille ici précisément la dérivabilité de ψ_ξ. Les correcteurs n'en attendaient sans doute pas tant.

- Soit $x\in[0,1]$.

$$\psi_\xi(x) = \frac{x+(1-x)\xi}{x+\alpha\,(1-x)+(1-\alpha)(1-x)\xi} = \frac{(1-\xi)\,x+\xi}{(1-\alpha)(1-\xi)\,x+\alpha+(1-\alpha)\,\xi}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \psi_\xi'(x) &= \frac{(1-\xi)\big((1-\alpha)(1-\xi)\,x+\alpha+(1-\alpha)\,\xi\big)-\big((1-\xi)\,x+\xi\big)(1-\alpha)(1-\xi)}{\big((1-\alpha)(1-\xi)\,x+\alpha+(1-\alpha)\,\xi\big)^2} \\ &= \frac{\cancel{(1-\alpha)(1-\xi)^2}\,x+(1-\xi)\big(\alpha+(1-\alpha)\,\xi\big)-\cancel{(1-\alpha)(1-\xi)^2}\,x-(1-\alpha)(1-\xi)\,\xi}{\big((1-\alpha)(1-\xi)\,x+\alpha+(1-\alpha)\,\xi\big)^2} \\ &= \frac{(1-\xi)\big(\alpha+\cancel{(1-\alpha)\,\xi}-\cancel{(1-\alpha)\,\xi}\big)}{\big((1-\alpha)(1-\xi)\,x+\alpha+(1-\alpha)\,\xi\big)^2} \\ &= \frac{\alpha(1-\xi)}{\big((1-\alpha)(1-\xi)\,x+\alpha+(1-\alpha)\,\xi\big)^2} \end{aligned}$$

Or $\alpha>1>0$ et $1-\xi\geqslant 0$ car $\xi\in[0,1]$. Donc : $\psi_\xi'(x)\geqslant 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \psi_\xi \text{ est croissante sur } [0,1].}$$

Commentaire

On pouvait aussi démontrer la croissance de ψ_ξ sur $[0,1]$ en utilisant la définition de la croissance.

- Soit $x \in [0,1]$. On rappelle :

$$\psi_\xi(x) \;=\; \frac{(1-\xi)\,x+\xi}{(1-\alpha)(1-\xi)\,x+\alpha+(1-\alpha)\,\xi}$$

- Comme $\xi \in [0,1]$, alors $1-\xi \geqslant 0$.
  Donc la fonction affine $h_1 : x \mapsto (1-\xi)\,x+\xi$ est croissante sur $[0,1]$.
- Comme $\alpha > 1$, alors $1-\alpha < 0$.
  Donc la fonction affine $h_2 : x \mapsto (1-\alpha)(1-\xi)\,x+\alpha+(1-\alpha)\,\xi$ est décroissante sur l'intervalle $[0,1]$.
  On démontre de plus :

$$\forall x \in [0,1],\ \ h_2(x) = (1-\alpha)(1-\xi)\,x+\alpha+(1-\alpha)\,\xi > 0$$

  (La démonstration est similaire à celle de « $(1-\alpha)(1-\xi)\,x+\alpha+(1-\alpha)\,\xi \neq 0$ »)
- Soit $(x,y) \in [0,1]^2$ tel que $x \leqslant y$. On obtient alors :
  × par croissance de h_1 sur $[0,1]$: $h_1(x) \leqslant h_2(x)$.
  × par décroissance de h_2 sur $[0,1]$: $h_2(x) \geqslant h_2(y)$.

  De plus : $h_2(x) \geqslant h_2(y) > 0$.
  Donc, par décroissance de la fonction inverse sur $[0,+\infty[$: $\dfrac{1}{h_2(x)} \leqslant \dfrac{1}{h_2(y)}$.
  On en déduit :

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{h_1(x)}{h_2(x)} & \leqslant & \dfrac{h_1(y)}{h_2(y)} \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \psi_\xi(x) & & \psi_\xi(y) \end{array}$$

  (On conserve le sens de l'inégalité tous les réels en présence sont positifs)
  Ainsi, on a bien démontré que la fonction ψ_ξ est croissante sur $[0,1]$.

□

b) Calculer $\psi_\xi(1)$.

Démonstration.
On applique la définition de ψ_ξ :

$$\psi_\xi(1) \;=\; \frac{1+(\cancel{1}-\cancel{1})\,\xi}{1+\alpha(\cancel{1}-\cancel{1})+(1-\alpha)(\cancel{1}-\cancel{1})\,\xi} \;=\; \frac{1}{1} \;=\; 1$$

$$\boxed{\psi_\xi(1) = 1}$$

□

c) (i) Calculer $\psi_\xi(0)$. On pose désormais $A(\xi) \;=\; \psi_\xi(0)$

Démonstration.
On calcule :

$$\psi_\xi(0) \;=\; \frac{0+(1-0)\,\xi}{0+\alpha(1-0)+(1-\alpha)(1-0)\,\xi} \;=\; \frac{\xi}{\alpha+(1-\alpha)\,\xi}$$

$$\boxed{A(\xi) \;=\; \psi_\xi(0) \;=\; \frac{\xi}{\alpha+(1-\alpha)\,\xi}}$$

□

(ii) Montrer que pour tout $t \in \{0, 1, 2, \ldots, T-1\}$, $A(X(t)) \leqslant X(t+1) \leqslant 1$.

Démonstration.
Soit $t \in \{0, \ldots, T-1\}$.

- D'après la question ***6.*** : $X(t+1) = \psi_{X(t)}(p(t))$.
- D'après la question ***7.a)***, la fonction ψ_ξ est croissante sur $[0, 1]$. Donc :

$$\forall x \in [0,1], \ \psi_\xi(0) \leqslant \psi_\xi(x) \leqslant \psi_\xi(1)$$

- Or d'après la question ***7.b)***, $\psi_\xi(1) = 1$, et d'après la question ***7.c)(i)***, $\psi_\xi(0) = A(\xi)$. D'où :

$$\forall x \in [0,1], \ A(\xi) \leqslant \psi_\xi(x) \leqslant 1$$

- L'encadrement précédent est valable pour tout $x \in [0, 1]$ et pour tout $\xi \in [0, 1]$.
  On l'applique alors à $x = p(t) \in \,]0, 1]$ et $\xi = X(t) \in [0, 1]$ (par définition de $X(t)$).
  On obtient alors :

$$A(X(t)) \ \leqslant \ X(t+1) \ \leqslant \ 1$$

$$\boxed{\forall t \in \{0, \ldots, T-1\}, \ A(X(t)) \leqslant X(t+1) \leqslant 1}$$

Commentaire

On pouvait aussi utiliser la définition de X pour montrer que :

$$\forall t \in [\![0, T-1]\!], \ X(t+1) \leqslant 1$$

En effet, soit $t \in [\![0, T-1]\!]$:
× d'une part, $D(t+1) \geqslant 0$ et $N(t+1) \geqslant 0$. Donc $D(t+1) \leqslant D(t+1) + N(t+1)$.
× d'autre part, $X(t+1) = \dfrac{D(t+1)}{D(t+1) + N(t+1)}$

Finalement, on a bien : $X(t+1) \leqslant 1$.

□

(iii) Montrer que $\xi \mapsto A(\xi)$ est croissante sur $[0, 1]$.

Démonstration.

- On rappelle que, d'après la question ***7.c)(i)*** : $\forall \xi \in [0, 1]$, $A(\xi) = \dfrac{\xi}{\alpha + (1-\alpha)\,\xi}$.
- La fonction A est dérivable sur $[0, 1]$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $[0, 1]$ dont le dénominateur ne s'annule pas (même raisonnement qu'en question ***7.a)***).
- Soit $\xi \in [0, 1]$.

$$A'(\xi) \ = \ \frac{\alpha + \cancel{(1-\alpha)\,\xi} - \cancel{\xi(1-\alpha)}}{\big(\alpha + (1-\alpha)\,\xi\big)^2} \ > \ 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } A \text{ est strictement croissante sur } [0,1].}$$

□

8. Justifier l'égalité de variables aléatoires :

$$D(\tau) \ = \ \frac{D(\tau)}{D(\tau-1)} \cdot \frac{D(\tau-1)}{D(\tau-2)} \cdot \cdots \cdot \frac{D(2)}{D(1)} \cdot \frac{D(1)}{N(0)} \cdot N(0)$$

Démonstration.

- Par récurrence : $\forall t \in \{1, \ldots, T\}$, $D(t) > 0$.
  De plus : $N(0) > 0$.

- Par simplification de fractions :

$$\frac{D(\tau)}{\cancel{D(\tau-1)}} \frac{\cancel{D(\tau-1)}}{\cancel{D(\tau-2)}} \cdot \cdots \cdot \frac{\cancel{D(2)}}{\cancel{D(1)}} \cdot \frac{\cancel{D(1)}}{\cancel{N(0)}} \cdot \cancel{N(0)} \ = \ D(\tau)$$

$$\boxed{D(\tau) = \frac{D(\tau)}{D(\tau-1)} \cdot \frac{D(\tau-1)}{D(\tau-2)} \cdot \cdots \cdot \frac{D(2)}{D(1)} \cdot \frac{D(1)}{N(0)} \cdot N(0)}$$

Commentaire

On peut démontrer proprement la propriété « $\forall t \in \{1, \ldots, T\}$, $D(t) > 0$ par récurrence.
Elle n'était sans doute pas nécessaire ici puisque l'intitulé de la question commence par un « justifier ».
Détaillons cependant cette récurrence ci-après.
Démontrons par récurrence que pour tout $t \in \{1, \ldots, T\}$, $\mathcal{P}(t)$: $D(t) > 0$.

- **Initialisation** :
  D'après la question ***1.a)***, $D(1) = p(0)\, N(0)$.
  Or, d'après l'énoncé, $N(0) > 0$ et $p(0) > 0$. Donc $D(1) > 0$.
  D'où $\mathcal{P}(1)$.
- **Hérédité** : Soit $t \in \{1, \ldots, T-1\}$.
  Supposons $\mathcal{P}(t)$ et démontrons $\mathcal{P}(t+1)$ (*i.e.* $D(t+1) > 0$).
  D'après la question ***1.a)*** : $D(t+1) = D(t) + p(t)\, N(t)$.
  Or :
  - × $D(t) > 0$ par hypothèse de récurrence,
  - × $p(t) > 0$ d'après l'énoncé,
  - × $N(t) \geqslant 0$ car $N(t)$ est un entier naturel.

  Ainsi, on a bien : $D(t+1) > 0$.
  D'où $\mathcal{P}(t+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall t \in \{1, \ldots, T\}$, $D(t) > 0$.

□

On pose $\hat{R}(0) = \ln\left(\dfrac{D(1)}{N(0)}\right)$ et $\hat{R}(t) = \ln\left(\dfrac{D(t+1)}{D(t)}\right)$ pour $1 \leqslant t \leqslant T-1$.

9. a) Montrer que :

$$\mathbb{E}\big(\ln(D(\tau))\big) \ = \ \ln(N(0)) + \mathbb{E}\left(\hat{R}(0) + \sum_{t=1}^{\tau-1} \hat{R}(t)\right)$$

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\ln(D(\tau)) \ &= \ \ln\left(\frac{D(\tau)}{D(\tau-1)} \cdot \frac{D(\tau-1)}{D(\tau-2)} \cdot \cdots \cdot \frac{D(2)}{D(1)} \cdot \frac{D(1)}{N(0)} \cdot N(0)\right) \\
&= \ \ln\left(\frac{D(\tau)}{D(\tau-1)}\right) + \ln\left(\frac{D(\tau-1)}{D(\tau-2)}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{D(2)}{D(1)}\right) + \ln\left(\frac{D(1)}{N(0)}\right) + \ln(N(0)) \\
&= \ \sum_{t=1}^{\tau-1} \ln\left(\frac{D(t+1)}{D(t)}\right) + \hat{R}(0) + \ln(N(0)) \\
&= \ \sum_{t=1}^{\tau-1} \hat{R}(t) + \hat{R}(0) + \ln(N(0))
\end{aligned}$$

- La v.a.r. $\ln(D(\tau))$ admet une espérance en tant que variable aléatoire finie.
  Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}\big(\ln(D(\tau))\big) = \mathbb{E}\left(\ln(N(0))) + \hat{R}(0) + \sum_{t=1}^{\tau-1} \hat{R}(t)\right) = \ln(N(0)) + \mathbb{E}\left(\hat{R}[0) + \sum_{t=1}^{\tau-1} \hat{R}(t)\right)$$

$$\boxed{\mathbb{E}\big(\ln(D(\tau))\big) = \ln(N(0)) + \mathbb{E}\left(\hat{R}(0) + \sum_{t=1}^{\tau-1} \hat{R}(t)\right)}$$

□

b) Montrer que : $\dfrac{D(1)}{N(0)} = \dfrac{\alpha\, X(1)}{1+(\alpha-1)\, X(1)}$.

Démonstration.
On calcule :

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha\, X(1)}{1+(\alpha-1)X(1)} &= \frac{\alpha\, \frac{D(1)}{D(1)+N(1)}}{1+(\alpha-1)\, \frac{D(1)}{D(1)+N(1)}} && \textit{(par définition de } X(1)\textit{)} \\
&= \frac{\frac{\alpha\, D(1)}{\cancel{D(1)+N(1)}}}{\frac{D(1)+N(1)+(\alpha-1)\, D(1)}{\cancel{D(1)+N(1)}}} = \frac{\alpha\, D(1)}{\cancel{D(1)} + N(1) + (\alpha - \cancel{1})\, D(1)} \\
&= \frac{\alpha\, D(1)}{N(1)+\alpha\, D(1)} = \frac{\cancel{\alpha}\, D(1)}{\cancel{\alpha}(1-p(0))\, N(0) + \cancel{\alpha}\, p(0)\, N(0)} && \textit{(d'après les questions } \textbf{1.a)} \textit{ et } \textbf{1.b)}\textit{)} \\
&= \frac{D(1)}{(1-\cancel{p(0)}+\cancel{p(0)})\, N(0)} = \frac{D(1)}{N(0)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{D(1)}{N(0)} = \frac{\alpha\, X(1)}{1+(\alpha-1)\, X(1)}}$$

□

c) Montrer que : $\dfrac{D(t+1)}{D(t)} = \dfrac{\alpha\, X(t+1)}{X(t)\big(1+(\alpha-1)\, X(t+1)\big)}$ pour $1 \leqslant t \leqslant T-1$.

Démonstration.
Soit $t \in \{1,\dots,T-1\}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha\, X(t+1)}{X(t)\big(1+(\alpha-1)\, X(t+1)\big)} &= \frac{\alpha\, \frac{D(t+1)}{D(t+1)+N(t+1)}}{\frac{D(t)}{D(t)+N(t)}\left(1+(\alpha-1)\frac{D(t+1)}{D(t+1)+N(t+1)}\right)} && \textit{(par définition de } X(t+1)\textit{)} \\
&= \frac{\alpha\, D(t+1)(D(t)+N(t))}{D(t)\big(\cancel{D(t+1)} + N(t+1) + (\alpha-\cancel{1})\, D(t+1)\big)} \\
&= \frac{\alpha\, D(t+1)(D(t)+N(t))}{D(t)\big(\alpha\,(1-p(t))\, N(t) + \alpha(D(t)+p(t)\, N(t))\big)} \\
&= \frac{\cancel{\alpha}\, D(t+1)(D(t)+N(t))}{\cancel{\alpha}\, D(t)\big((1-\cancel{p(t)}+\cancel{p(t)})\, N(t) + D(t)\big)} \\
&= \frac{D(t+1)\, \cancel{(D(t)+N(t))}}{D(t)\, \cancel{(N(t)+D(t))}} = \frac{D(t+1)}{D(t)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in \{1,\dots,T-1\},\ \frac{D(t+1)}{D(t)} = \frac{\alpha\, X(t+1)}{X(t)(1+(\alpha-1)\, X(t+1))}}$$

□

Pour x et y deux réels strictement positifs, on pose $u(x,y) = \ln(\alpha) - \ln(x) + \ln(y) - \ln(1+(\alpha-1)y)$.

d) Montrer que : $\hat{R}(0) = u(1, X(1))$.

Démonstration.
Par définition de la fonction u :

$$\begin{aligned} u(1, X(1)) &= \ln(\alpha) - \cancel{\ln(1)} + \ln(X(1)) - \ln\big(1 + (\alpha-1)\,X(1)\big) \\ &= \ln\left(\frac{\alpha\,X(1)}{1+(\alpha-1)\,X(1)}\right) = \ln\left(\frac{D(1)}{N(0)}\right) \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{9.b)}}\textit{)} \\ &= \hat{R}(0) \end{aligned}$$

$$\boxed{\hat{R}(0) = u(1, X(1))}$$

□

e) Montrer que : $\hat{R}(t) = u(X(t), X(t+1))$ pour $1 \leqslant t \leqslant T-1$.

Démonstration.
Soit $t \in \{1, \dots, T-1\}$.

$$\begin{aligned} u(X(t), X(t+1)) &= \ln(\alpha) - \ln(X(t)) + \ln(X(t+1)) - \ln\big(1+(\alpha-1)X(t+1)\big) \\ &= \ln\left(\frac{\alpha\,X(t+1)}{X(t)\big(1+(\alpha-1)\,X(t+1)\big)}\right) \\ &= \ln\left(\frac{D(t+1)}{D(t)}\right) \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{9.c)}}\textit{)} \\ &= \hat{R}(t) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in \{1, \dots, T-1\},\ \hat{R}(t) = u(X(t), X(t+1))}$$

□

f) Conclure que :

$$\mathbb{E}\big(\ln(D(\tau))\big) = \ln(N(0)) + \mathbb{E}\left(u(1, X(1)) + \sum_{t=1}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right)$$

Démonstration. On utilise les questions précédentes :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big(\ln(D(\tau))\big) &= \ln(N(0)) + \mathbb{E}\left(\hat{R}(0) + \sum_{t=1}^{\tau-1} \hat{R}(t)\right) \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{9.a)}}\textit{)} \\ &= \ln(N(0)) + \mathbb{E}\left(u(1, X(1)) + \sum_{t=1}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right) \qquad \textit{(d'après les questions } \textbf{\textit{9.d)}} \textit{ et } \textbf{\textit{9.e)}}\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}\big(\ln(D(\tau))\big) = \ln(N(0)) + \mathbb{E}\left(u(1, X(1)) + \sum_{t=1}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right)}$$

□

On voit donc que maximiser $\mathbb{E}\big(\ln(D(\tau))\big)$ revient à choisir, à chaque date t telle que $1 \leqslant t \leqslant \tau-1$, la valeur $X(t+1)$ vérifiant la contrainte $A(X(t)) \leqslant X(t+1) \leqslant 1$ de façon à rendre maximale l'expression

$$\mathbb{E}\left(u(1, X(1)) + \sum_{t=1}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right)$$

Partie III - Programmation dynamique

On expose dans cette partie les deux premières étapes de la méthode de la programmation dynamique pour résoudre le problème.

10. Soit B un événement. On note $\mathbb{1}_B$ la variable aléatoire telle que

$$\mathbb{1}_B(\omega) \ = \ \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } \omega \in B \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

a) Déterminer la loi de $\mathbb{1}_B$.

Démonstration.

- Par définition de $\mathbb{1}_B$, cette v.a.r. ne prend comme valeur que 0 ou 1.

$$\boxed{\mathbb{1}_B(\Omega) = \{0, 1\}}$$

- Soit $\omega \in \Omega$.

$$\omega \in [\mathbb{1}_B = 1] \ \Leftrightarrow \ \mathbb{1}_B(\omega) = 1 \ \Leftrightarrow \ \omega \in B$$

  D'où : $[\mathbb{1}_B = 1] = B$. Ainsi : $\mathbb{P}([\mathbb{1}_B = 1]) = \mathbb{P}(B)$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{1}_B \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\mathbb{P}(B)\right).}$$

Commentaire

Les variables aléatoires indicatrices sont des variables aléatoires régulièrement manipulées dans les sujets de concours. Il faut savoir déterminer leur loi.
Il peut aussi être utile de savoir démontrer les propriétés :
× $\mathbb{1}_{B\cap C} = \mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_C$ (c'est l'objet de la question suivante),
× $\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_{\bar{B}} = 1$ (démontré en question ***10.c)(ii)***).

□

b) Soient B et C deux événements. Montrer l'égalité de variables aléatoires : $\mathbb{1}_{B\cap C} = \mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_C$.

Démonstration.
Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent.

- Si $\omega \in B \cap C$, alors :
  × par définition de $\mathbb{1}_{B\cap C}$: $\mathbb{1}_{B\cap C}(\omega) = 1$,
  × comme $\omega \in B \cap C$, alors $\omega \in B$ `ET` $\omega \in C$.
  Donc, par définition de $\mathbb{1}_B$ et $\mathbb{1}_C$: $\mathbb{1}_B(\omega) = 1$ `ET` $\mathbb{1}_C(\omega) = 1$.
  D'où : $\mathbb{1}_B(\omega) \times \mathbb{1}_C(\omega) = 1 \times 1 = 1$.

  On en déduit : $\mathbb{1}_{B\cap C}(\omega) = 1 = \mathbb{1}_B(\omega) \times \mathbb{1}_C(\omega)$.
- Si $\omega \in \overline{B \cap C} = \overline{B} \cup \overline{C}$, alors :
  × par définition de $\mathbb{1}_{B\cap C}$: $\mathbb{1}_{B\cap C}(\omega) = 0$.
  × comme $\omega \in \overline{B} \cup \overline{C}$, alors : $\omega \in \overline{B}$ `OU` $\omega \in \overline{C}$.
  Donc, par définition de $\mathbb{1}_B$ et $\mathbb{1}_C$: $\mathbb{1}_B(\omega) = 0$ `OU` $\mathbb{1}_C(\omega) = 0$.
  D'où : $\mathbb{1}_B(\omega) \times \mathbb{1}_C(\omega) = 0$.

  On en déduit : $\mathbb{1}_{B\cap C}(\omega) = 0 = \mathbb{1}_B(\omega) \cdot \mathbb{1}_C(\omega)$.

Finalement : $\forall \omega \in \Omega$, $\mathbb{1}_{B\cap C}(\omega) = \mathbb{1}_B(\omega) \times \mathbb{1}_C(\omega)$.

$$\boxed{\mathbb{1}_{B\cap C} = \mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_C}$$

Commentaire

L'énoncé original demandait de démontrer l'égalité « $\mathbb{1}_{B\cap C} = \mathbb{1}_B \cdot \mathbb{1}_C$ » plutôt que « $\mathbb{1}_{B\cap C} = \mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_C$ ».
Il s'agit ici d'un léger abus puisque :
- la notation $\cdot$ correspond à la multiplication par un scalaire (appelée multiplication externe). On écrit par exemple : $\lambda \cdot M$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, ou encore $\lambda \cdot X$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et une v.a.r. X.
- la notation $\times$ correspond à la multiplication entre deux objets mathématiques de même nature (appelée multiplication interne). On écrit par exemple : $M \times N$ pour deux matrices $(M, N) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$, ou encore $X \times Y$ pour deux v.a.r. X et Y.

Ici, $\mathbb{1}_B$ et $\mathbb{1}_C$ sont toutes les deux des variables aléatoires. La notation standard pour la multiplication est donc $\mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_C$.

$\square$

c) On suppose que $0 < \mathbb{P}(B) < 1$. Si Y est une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs, on définit la **variable aléatoire** notée $\mathbb{E}_B(Y)$ par :

$$\mathbb{E}_B(Y) \ = \ \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\, \mathbb{E}(Y\, \mathbb{1}_B)\, \mathbb{1}_B + \frac{1}{\mathbb{P}(\bar{B})}\, \mathbb{E}(Y\, \mathbb{1}_{\bar{B}})\, \mathbb{1}_{\bar{B}}$$

où $\bar{B}$ désigne l'événement contraire de B.

Commentaire

Explicitons l'objet $\mathbb{E}_B(Y)$.

- Tout d'abord, le réel $\dfrac{1}{\mathbb{P}(B)}\, \mathbb{E}(Y\, \mathbb{1}_B)$ peut s'interpréter comme la valeur moyenne de Y quand l'événement B est réalisé.
  De même, le réel $\dfrac{1}{\mathbb{P}(\bar{B})}\, \mathbb{E}(Y\, \mathbb{1}_{\bar{B}})$ peut s'interpréter comme la valeur moyenne de Y quand l'événement $\bar{B}$ est réalisé.
- De plus, par définition des variables aléatoires indicatrices $\mathbb{1}_B$ et $\mathbb{1}_{\bar{B}}$, on obtient :

$$\forall \omega \in \Omega,\ \big(\mathbb{E}_B(Y)\big)(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathbb{P}(B)}\, \mathbb{E}(Y\, \mathbb{1}_B) & \text{si } \omega \in B \\[2ex] \dfrac{1}{\mathbb{P}(\bar{B})}\, \mathbb{E}(Y\, \mathbb{1}_{\bar{B}}) & \text{si } \omega \in \bar{B} \end{cases}$$

  Cette présentation avec accolades permet de repérer facilement que la v.a.r. $\mathbb{E}_B(Y)$ ne peut prendre que deux valeurs (d'une part, la valeur moyenne de Y quand B est réalisé ; d'autre part, celle de Y quand $\bar{B}$ est réalisé).
  L'énoncé choisit ici une notation plus condensée avec des v.a.r. indicatrices. Cela permet une plus grande aisance dans les démonstrations des propriétés sur $\mathbb{E}_B(Y)$ (comme on peut le constater dans les questions suivantes).
- On insiste enfin sur le fait que l'objet $\mathbb{E}_B(Y)$ est bien une **variable aléatoire** (comme le précise l'énoncé), et non un réel (comme peut le laisser croire la notation $\mathbb{E}$).

(i) Soient Y et Z deux variables aléatoires prenant un nombre fini de valeurs. Montrer que :

$$\mathbb{E}_B(Y+Z) \;=\; \mathbb{E}_B(Y)+\mathbb{E}_B(Z)$$

Démonstration.

- Si Y et Z sont des v.a.r. finies, alors $Y+Z$ est aussi une v.a.r. finie.
  Donc $\mathbb{E}_B(Y+Z)$ est bien définie.
- Par définition de $\mathbb{E}_B(Y)$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_B(Y+Z)\\
=\;& \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\,\mathbb{E}\big((Y+Z)\,\mathbb{1}_B\big)\,\mathbb{1}_B + \frac{1}{\mathbb{P}(\bar{B})}\,\mathbb{E}\big((Y+Z)\,\mathbb{1}_{\bar{B}}\big)\,\mathbb{1}_{\bar{B}}\\
=\;& \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\,\mathbb{E}\big(Y\,\mathbb{1}_B+Z\,\mathbb{1}_B\big)\,\mathbb{1}_B + \frac{1}{\mathbb{P}(\bar{B})}\,\mathbb{E}\big(Y\,\mathbb{1}_{\bar{B}}+Z\,\mathbb{1}_{\bar{B}}\big)\,\mathbb{1}_{\bar{B}}\\
=\;& \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\big(\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_B)+\mathbb{E}(Z\,\mathbb{1}_B)\big)\,\mathbb{1}_B + \frac{1}{\mathbb{P}(\bar{B})}\big(\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_{\bar{B}}+\mathbb{E}(Z\,\mathbb{1}_{\bar{B}})\big)\,\mathbb{1}_{\bar{B}}\\
=\;& \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\,\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_B)\,\mathbb{1}_B + \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\,\mathbb{E}(Z\,\mathbb{1}_B)\,\mathbb{1}_B + \frac{1}{\mathbb{P}(\bar{B})}\,\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_{\bar{B}})\,\mathbb{1}_{\bar{B}} + \frac{1}{\mathbb{P}(\bar{B})}\,\mathbb{E}(Z\,\mathbb{1}_{\bar{B}})\,\mathbb{1}_{\bar{B}}\\
=\;& \mathbb{E}_B(Y)+\mathbb{E}_B(Z)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}_B(Y+Z)=\mathbb{E}_B(Y)+\mathbb{E}_B(Z)}$$

□

(ii) Montrer que : $\mathbb{E}(\mathbb{E}_B(Y))=\mathbb{E}(Y)$.

Démonstration.

- D'après la question ***10.a)***, les v.a.r. $\mathbb{1}_B$ et $\mathbb{1}_{\bar{B}}$ sont des v.a.r. finies.
  Donc $\mathbb{E}_B(Y)$ est une v.a.r. finie en tant que combinaison linéaire de v.a.r. finies.

  $$\boxed{\text{Ainsi la v.a.r. } \mathbb{E}_B(Y) \text{ admet une espérance.}}$$
- Par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(\mathbb{E}_B(Y)\big) \;&=\; \mathbb{E}\left(\frac{1}{\mathbb{P}(B)}\,\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_B)\,\mathbb{1}_B + \frac{1}{\mathbb{P}(\bar{B})}\,\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_{\bar{B}})\,\mathbb{1}_{\bar{B}}\right)\\
&=\; \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\,\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_B)\,\mathbb{E}(\mathbb{1}_B) + \frac{1}{\mathbb{P}(\bar{B})}\,\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_{\bar{B}})\,\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\bar{B}})
\end{aligned}$$

  Or, d'après la question ***10.a)***, $\mathbb{1}_B \hookrightarrow \mathcal{B}\,(\mathbb{P}(B))$ et $\mathbb{1}_{\bar{B}} \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\mathbb{P}(\bar{B})\right)$.
  On en déduit : $\mathbb{E}(\mathbb{1}_B)=\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\bar{B}})=\mathbb{P}(\bar{B})$. D'où :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(\mathbb{E}_b(Y)\big) \;&=\; \frac{1}{\cancel{\mathbb{P}(B)}}\,\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_B)\,\cancel{\mathbb{P}(B)} + \frac{1}{\cancel{\mathbb{P}(\bar{B})}}\,\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_{\bar{B}})\,\cancel{\mathbb{P}(\bar{B})}\\
&=\; \mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_B)+\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_{\bar{B}}) \;=\; \mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_B+Y\,\mathbb{1}_{\bar{B}})\\
&=\; \mathbb{E}\big(Y(\mathbb{1}_B+\mathbb{1}_{\bar{B}})\big)
\end{aligned}$$

- Montrons la relation : $\mathbb{1}_B+\mathbb{1}_{\bar{B}}=1$.
  Soit $\omega\in\Omega$. Deux cas se présentent :

  × si $\omega\in B$, alors : $\mathbb{1}_B(\omega)=1$.
  Comme de plus $B\cap\bar{B}=\varnothing$, alors $\omega\notin\bar{B}$. Donc : $\mathbb{1}_{\bar{B}}(\omega)=0$.
  D'où : $\mathbb{1}_B(\omega)+\mathbb{1}_{\bar{B}}(\omega)=1+0=1$.

× si $\omega \in \bar{B}$, alors : $\mathbb{1}_{\bar{B}}(\omega) = 1$.
Avec le même raisonnement que précédemment : $\mathbb{1}_B(\omega) = 0$.
D'où : $\mathbb{1}_B(\omega) + \mathbb{1}_{\bar{B}}(\omega) = 0 + 1 = 1$.

Finalement : $\forall \omega \in \Omega$, $\mathbb{1}_B(\omega) + \mathbb{1}_{\bar{B}}(\omega) = 1$. Donc : $\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_{\bar{B}} = 1$ (où 1 désigne la variable aléatoire certaine égalé à 1).

- On en déduit : $\mathbb{E}\big(\mathbb{E}_B(Y)\big) = \mathbb{E}\big(Y(\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_{\bar{B}})\big) = \mathbb{E}(Y \times 1) = \mathbb{E}(Y)$.

$$\boxed{\mathbb{E}\big(\mathbb{E}_B(Y)\big) = \mathbb{E}(Y)}$$

□

(iii) Montrer que : $\mathbb{E}_B(Y\,\mathbb{1}_B) = \mathbb{E}_B(Y)\,\mathbb{1}_B$.

Démonstration.

- D'une part :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_B(Y\,\mathbb{1}_B) &= \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\,\mathbb{E}\big((Y\,\mathbb{1}_B)\,\mathbb{1}_B\big)\,\mathbb{1}_B + \frac{1}{\mathbb{P}(\bar{B})}\,\mathbb{E}\big((Y\,\mathbb{1}_{\bar{B}})\,\mathbb{1}_{\bar{B}}\big)\mathbb{1}_{\bar{B}} \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\,\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_{B\cap B})\,\mathbb{1}_B + \frac{1}{\mathbb{P}(\bar{B})}\,\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_{B\cap\bar{B}})\,\mathbb{1}_{\bar{B}} && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{10.b)}}\textit{)} \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\,\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_B)\,\mathbb{1}_B + \frac{1}{\mathbb{P}(\bar{B})}\,\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_{\varnothing})\,\mathbb{1}_{\bar{B}}
\end{aligned}$$

Or, par définition d'une variable aléatoire indicatrice : $\mathbb{1}_{\varnothing} = 0$ (où 0 désigne la variable aléatoire certaine égale à 0).
Ainsi : $\mathbb{E}_B(Y\,\mathbb{1}_B) = \dfrac{1}{\mathbb{P}(B)}\,\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_B)\,\mathbb{1}_B$.

- D'autre part :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_B(Y) &= \left(\frac{1}{\mathbb{P}(B)}\,\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_B)\,\mathbb{1}_B + \frac{1}{\mathbb{P}(\bar{B})}\,\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_{\bar{B}})\,\mathbb{1}_{\bar{B}}\right)\mathbb{1}_B \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\,\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_B)\,\mathbb{1}_{B\cap B} + \frac{1}{\mathbb{P}(\bar{B})}\,\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_{\bar{B}})\,\mathbb{1}_{B\cap\bar{B}} \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\,\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_B)\,\mathbb{1}_B + \cancel{\frac{1}{\mathbb{P}(\bar{B})}\,\mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_{\bar{B}})\,\mathbb{1}_{\varnothing}} \\
&= \mathbb{E}_B(Y\,\mathbb{1}_B)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}_B(Y\,\mathbb{1}_B) = \mathbb{E}_B(Y)\,\mathbb{1}_B}$$

□

11. On suppose dans cette question que, quand l'événement $[\tau = T]$ est réalisé, $X(1), \ldots, X(T-1)$ sont connus. Comme on l'a vu précédemment, si on pose $x = X(T-1)$, le meilleur choix à faire est alors de prendre pour $X(T)$ la valeur $y^*(x, T-1) \in [A(x), 1]$ qui maximise $u(x, y)$.

a) Montrer que : $y^*(x, T-1) = 1$.

Démonstration.

- On cherche à maximiser la fonction $f : y \mapsto u(x, y)$ sur $]0, 1]$.
La fonction f est dérivable sur $]0, 1]$ en tant que somme et composée de fonctions dérivables sur des intervalles adéquats. En effet : $1 + (\alpha - 1)y \in\,]1, \alpha]$.

- Soit $y \in]0,1]$.

$$f'(y) \;=\; \frac{1}{y} - \frac{\alpha-1}{1+(\alpha-1)y} \;=\; \frac{1+\cancel{(\alpha-1)y}-\cancel{(\alpha-1)y}}{y(1+(\alpha-1)y)} \;=\; \frac{1}{y(1+(\alpha-1)y)}$$

Or $\alpha - 1 > 0$, car $\alpha > 1$. De plus $y > 0$. Donc $f'(y) > 0$.
On obtient le tableau de variations suivant :

y	0 $\qquad$ 1
Signe de $f'(y)$	$+$
Variations de f	$-\infty \nearrow f(1)$

Donc f atteint son unique maximum pour $y = 1$.

$$\boxed{\text{Autrement dit : } y^*(x, T-1) = 1.}$$

Commentaire

L'énoncé de cette question ***11.*** comporte une confusion entre les objets « réel » et « fonction ». En effet, l'énoncé parle de « maximiser $u(x,y)$ ». Cependant $u(x,y)$ est un réel et « maximiser un réel » n'a pas de sens. Il fallait ici comprendre « maximiser la fonction $y \mapsto u(x,y)$ ». $\square$

b) Montrer que : $u(x,1) = -\ln(x)$.

Démonstration.
On calcule :

$$\begin{aligned} u(x,1) &= \ln(\alpha) - \ln(x) + \cancel{\ln(1)} - \ln(1 + (\alpha-1)\times 1) \\ &= \ln(\alpha) - \ln(x) - \ln(\cancel{1} + \alpha - \cancel{1}) \\ &= \cancel{\ln(\alpha)} - \ln(x) - \cancel{\ln(\alpha)} \\ &= -\ln(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{u(x,1) = -\ln(x)}$$

$\square$

12. On suppose maintenant que, quand l'événement $[\tau \geqslant T-1]$ est réalisé, les réels $X(1), \ldots, X(T-2)$ sont connus.

La stratégie reste donc de choisir $X(T-1)$ et $X(T)$ de façon à maximiser $\mathbb{E}\left(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right)$.

La variable aléatoire τ prend les deux valeurs $T-1$ et T avec les probabilités respectives

$$\mathbb{P}_{[\tau \geqslant T-1]}([\tau = T-1]) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{[\tau \geqslant T-1]}([\tau = T])$$

a) Montrer que :

$$\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} \sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1)) = \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} u(X(T-2), X(T-1)) + \mathbb{1}_{[\tau = T]} u(X(T-1), X(T))$$

Démonstration.
Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent.

- Soit $\omega \in [\tau \geqslant T-1]$, alors $\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}(\omega) = 1$.
  Comme la v.a.r. τ est à valeurs dans $\{1, \dots, T\}$, deux cas se présentent :
  × soit $\omega \in [\tau = T-1]$. Dans ce cas : $\mathbb{1}_{[\tau = T]}(\omega) = 0$.
  De plus : $\omega \in [\tau = T-1] \Leftrightarrow \tau(\omega) = T-1$. Donc, d'une part :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{t=T-2}^{\tau(\omega)-1} u(X(t), X(t+1))\right) \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}(\omega) &= \left(\sum_{t=T-2}^{(T-1)-1} u(X(t), X(t+1))\right) \times 1 \\ &= \sum_{t=T-2}^{T-2} u(X(t), X(t+1)) \\ &= u(X(T-2), X(T-1))\end{aligned}$$

  D'autre part :

$$\begin{aligned}& u(X(T-2), X(T-1))\, \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}(\omega) + u(X(T-1), X(T))\, \mathbb{1}_{[\tau = T]}(\omega) \\ =\ & u(X(T-2), X(T-1)) \times 1 + \cancel{u(X(T-1), X(T)) \times 0} \\ =\ & u(X(T-2), X(T-1))\end{aligned}$$

  On en déduit :

$$\begin{aligned}& \left(\sum_{t=T-2}^{\tau(\omega)-1} u(X(t), X(t+1))\right) \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}(\omega) \\ =\ & u(X(T-2), X(T-1))\, \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}(\omega) + u(X(T-1), X(T))\, \mathbb{1}_{[\tau = T]}(\omega)\end{aligned}$$

  × soit $\omega \in [\tau = T]$. Dans ce cas : $\mathbb{1}_{[\tau = T]}(\omega) = 1$.
  De plus : $\omega \in [\tau = T] \Leftrightarrow \tau(\omega) = T$. Donc, d'une part :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{t=T-2}^{\tau(\omega)-1} u(X(t), X(t+1))\right) \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}(\omega) &= \left(\sum_{t=T-2}^{T-1} u(X(t), X(t+1))\right) \times 1 \\ &= u(X(T-2), X(T-1)) + u(X(T-1), X(T))\end{aligned}$$

  D'autre part :

$$\begin{aligned}& u(X(T-2), X(T-1))\, \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}(\omega) + u(X(T-1), X(T))\, \mathbb{1}_{[\tau = T]}(\omega) \\ =\ & u(X(T-2), X(T-1)) \times 1 + u(X(T-1), X(T)) \times 1 \\ =\ & u(X(T-2), X(T-1)) + u(X(T-1), X(T))\end{aligned}$$

  On en déduit :

$$\begin{aligned}& \left(\sum_{t=T-2}^{\tau(\omega)-1} u(X(t), X(t+1))\right) \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}(\omega) \\ =\ & u(X(T-2), X(T-1))\, \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}(\omega) + u(X(T-1), X(T))\, \mathbb{1}_{[\tau = T]}(\omega)\end{aligned}$$

- Soit $\omega \in \overline{[\tau \geqslant T-1]}$. Comme la v.a.r. τ est à valeurs entières :

$$\overline{[\tau \geqslant T-1]} \ = \ [\tau < T-1] \ = \ [\tau \leqslant T-2]$$

Donc $\omega \notin [\tau \geqslant T-1]$ et $\omega \notin [\tau = T]$. Ainsi : $\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}(\omega) = 0$ et $\mathbb{1}_{[\tau = T]}(\omega) = 0$.
On a donc bien :

$$\left(\sum_{t=T-2}^{\tau(\omega)-1} u(X(t), X(t+1))\right) \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}(\omega) = 0 = u(X(T-2), X(T-1))\, \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}(\omega) + u(X(T-1), X(T))\, \mathbb{1}_{[\tau = T]}(\omega)$$

Finalement, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{t=T-2}^{\tau(\omega)-1} u(X(t), X(t+1))\right) \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}(\omega) \\ = \ & u(X(T-2), X(T-1))\, \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}(\omega) + u(X(T-1), X(T))\, \mathbb{1}_{[\tau = T]}(\omega) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} \sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1)) \ = \ \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}\, u(X(T-2), X(T-1)) + \mathbb{1}_{[\tau = T]}\, u(X(T-1), X(T)).}$$

Commentaire

Avec un peu plus d'aisance sur les variables aléatoires indicatrices, on pouvait utiliser le résultat suivant :

pour tous événements B et C incompatibles, $\mathbb{1}_{B \cup C} = \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C \qquad (\star)$

On obtient la rédaction qui suit.

– Tout d'abord : $[\tau \geqslant T-1] = [\tau = T-1] \cup [\tau = T]$.
  De plus, ces deux événements sont incompatibles. Donc : $\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} = \mathbb{1}_{[\tau = T-1]} + \mathbb{1}_{[\tau = T]}$.
– On en déduit les égalités entre variables aléatoires suivantes :

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right) \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} \\ = \ & \left(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right) \left(\mathbb{1}_{[\tau = T-1]} + \mathbb{1}_{[\tau = T]}\right) \\ = \ & \left(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right) \mathbb{1}_{[\tau = T-1]} + \left(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right) \mathbb{1}_{[\tau = T]} \\ = \ & \left(\sum_{t=T-2}^{(T-1)-1} u(X(t), X(t+1))\right) \mathbb{1}_{[\tau = T-1]} + \left(\sum_{t=T-2}^{T-1} u(X(t), X(t+1))\right) \mathbb{1}_{[\tau = T]} \\ = \ & u(X(T-2), X(T-1))\, \mathbb{1}_{[\tau = T-1]} + \big(u(X(T-2), X(T-1)) + u(X(T-1), X(T))\big)\, \mathbb{1}_{[\tau = T]} \\ = \ & u(X(T-2), X(T-1)) \left(\mathbb{1}_{[\tau = T-1]} + \mathbb{1}_{[\tau = T]}\right) + u(X(T-1), X(T))\, \mathbb{1}_{[\tau = T]} \\ = \ & u(X(T-2), X(T-1))\, \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} + u(X(T-1), X(T))\, \mathbb{1}_{[\tau = T]} \end{aligned}$$

Commentaire

Démontrons maintenant le résultat $(\star)$.
Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent :

- si $\omega \in B \cup C$, alors $\mathbb{1}_{B\cup C}(\omega) = 1$.
  De plus, si $\omega \in B \cup C$, alors $\omega \in B$ `OU` $\omega \in C$.
  - Si $\omega \in B$, alors $\omega \notin C$ car les événements B et C sont incompatibles.
    D'où $\mathbb{1}_B(\omega) = 1$ et $\mathbb{1}_C(\omega) = 0$.
    Ainsi : $\mathbb{1}_B(\omega) + \mathbb{1}_C(\omega) = 1 + 0 = 1$.
  - Si $\omega \in C$, alors $\omega \notin B$ car les événements B et C sont incompatibles.
    D'où $\mathbb{1}_B(\omega) = 0$ et $\mathbb{1}_C(\omega) = 1$.
    Ainsi : $\mathbb{1}_B(\omega) + \mathbb{1}_C(\omega) = 0 + 1 = 1$.

  Finalement, si $\omega \in B \cup C$, alors : $\mathbb{1}_{B\cup C}(\omega) = 1 = \mathbb{1}_B(\omega) + \mathbb{1}_C(\omega)$.
- si $\omega \in \overline{B \cup C} = \bar{B} \cap \bar{C}$, alors $\mathbb{1}_{B\cup C}(\omega) = 0$.
  De plus, si $\omega \in \bar{B} \cap \bar{C}$, alors $\omega \in \bar{B}$ `ET` $\omega \in \bar{C}$. Donc : $\mathbb{1}_B(\omega) = 0$ `ET` $\mathbb{1}_C(\omega) = 0$.
  D'où : $\mathbb{1}_{B\cup C}(\omega) = 0 = \mathbb{1}_B(\omega) + \mathbb{1}_C(\omega)$.

Finalement : $\forall \omega \in \Omega$, $\mathbb{1}_{B\cup C}(\omega) = \mathbb{1}_B(\omega) + \mathbb{1}_C(\omega)$.
Ainsi : $\mathbb{1}_{B\cup C} = \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C$.

□

b) Montrer que :

$$\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}\ \mathbb{E}_{[\tau \geqslant T-1]}\left(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right)$$

$$= \ \mathbb{E}_{[\tau \geqslant T-1]}\Big(u(X(T-2), X(T-1)) \cdot \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} + u(X(T-1), X(T)) \cdot \mathbb{1}_{[\tau = T]}\Big)$$

Démonstration.
On note $Y = \sum\limits_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))$ et $B = [\tau \geqslant T-1]$.
D'après la question ***10.c)(iii)*** :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{[\tau \geqslant T-1]}\left(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right) \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} &= \mathbb{E}_B(Y)\,\mathbb{1}_B \ = \ \mathbb{E}_B(Y\,\mathbb{1}_B) \ = \ \mathbb{E}_B(\mathbb{1}_B\ Y) \\ &= \mathbb{E}_{[\tau \geqslant T-1]}\left(\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} \sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right)\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la question ***12.a)*** :

$$\mathbb{E}_{[\tau \geqslant T-1]}\left(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right) \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}$$

$$= \ \mathbb{E}_{[\tau \geqslant T-1]}\Big(u(X(T-2), X(T-1)) \cdot \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} + u(X(T-1), X(T)) \cdot \mathbb{1}_{[\tau = T]}\Big).$$

□

c) Montrer que :

$$\mathbb{E}_{[\tau \geqslant T-1]}\left(\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}\, u(X(T-2), X(T-1)) + \mathbb{1}_{[\tau = T]}\, u(X(T-1), X(T))\right)$$
$$= \quad u(X(T-2), X(T-1))\, \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} + \frac{\mathbb{P}([\tau = T])}{\mathbb{P}([\tau \geqslant T-1])}\, u(X(T-1), X(T))\, \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}$$

Démonstration.

- D'après la question ***10.c)(i)*** :

$$\mathbb{E}_{[\tau \geqslant T-1]}\left(u(X(T-2), X(T-1))\, \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} + u(X(T-1), X(T))\, \mathbb{1}_{[\tau = T]}\right)$$
$$= \quad \mathbb{E}_{[\tau \geqslant T-1]}\left(u(X(T-2), X(T-1))\, \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}\right) + \mathbb{E}_{[\tau \geqslant T-1]}\left(u(X(T-1), X(T))\, \mathbb{1}_{[\tau = T]}\right)$$

- Déterminons $\mathbb{E}_{[\tau \geqslant T-1]}\left(u(X(T-2), X(T-1))\, \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}\right)$.
Tout d'abord, d'après la question ***10.c)(iii)*** :

$$\mathbb{E}_{[\tau \geqslant T-1]}\left(u(X(T-2), X(T-1))\, \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}\right) \quad = \quad \mathbb{E}_{[\tau \geqslant T-1]}\big(u(X(T-2), X(T-1))\big)\, \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}$$

Notons que $\lambda = u(X(T-2), X(T-1))$ est un réel (et non une v.a.r.) et rappelons que $\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\mathbb{P}([\tau \geqslant T-1])\right)$. On en déduit, d'après la définition donnée au ***10.c)*** :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{[\tau \geqslant T-1]}\big(u(X(T-2), X(T-1))\big) \quad = \quad \mathbb{E}_{[\tau \geqslant T-1]}(\lambda) \\
= \quad & \frac{1}{\mathbb{P}([\tau \geqslant T-1])}\, \mathbb{E}\big(\lambda\, \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}\big)\, \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} + \frac{1}{\mathbb{P}(\overline{[\tau \geqslant T-1]})}\, \mathbb{E}\big(\lambda\, \mathbb{1}_{\overline{[\tau \geqslant T-1]}}\big)\, \mathbb{1}_{\overline{[\tau \geqslant T-1]}} \\
= \quad & \frac{\lambda}{\mathbb{P}([\tau \geqslant T-1])}\, \mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}\big)\, \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} + \frac{\lambda}{\mathbb{P}(\overline{[\tau \geqslant T-1]})}\, \mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{\overline{[\tau \geqslant T-1]}}\big)\, \mathbb{1}_{\overline{[\tau \geqslant T-1]}} \\
= \quad & \frac{\lambda}{\cancel{\mathbb{P}([\tau \geqslant T-1])}}\, \cancel{\mathbb{P}([\tau \geqslant T-1])}\, \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} + \frac{\lambda}{\cancel{\mathbb{P}(\overline{[\tau \geqslant T-1]})}}\, \cancel{\mathbb{P}(\overline{[\tau \geqslant T-1]})}\, \mathbb{1}_{\overline{[\tau \geqslant T-1]}} \\
= \quad & \lambda \left(\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} + \mathbb{1}_{\overline{[\tau \geqslant T-1]}}\right) \quad = \quad \lambda \times 1 \\
= \quad & u(X(T-2), X(T-1))
\end{aligned}$$

D'où :

$$\mathbb{E}_{[\tau \geqslant T-1]}\left(u(X(T-2), X(T-1))\, \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}\right) \quad = \quad u(X(T-2), X(T-1))\, \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}$$

- Déterminons $\mathbb{E}_{[\tau \geqslant T-1]}\left(u(X(T-1), X(T))\, \mathbb{1}_{[\tau = T]}\right)$.
On note $\mu = u(X(T-1), X(T)) \in \mathbb{R}$.
Par définition de $\mathbb{E}_{[\tau \geqslant T-1]}\left(\mu\, \mathbb{1}_{[\tau = T]}\right)$ et toujours d'après ***10.c)*** :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{[\tau \geqslant T-1]}\left(\mu\, \mathbb{1}_{[\tau = T]}\right) \\
= \quad & \frac{1}{\mathbb{P}([\tau \geqslant T-1])}\, \mathbb{E}\left(\mu\, \mathbb{1}_{[\tau = T]} \times \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}\right)\, \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} + \frac{1}{\mathbb{P}(\overline{[\tau \geqslant T-1]})}\, \mathbb{E}\left(\mu\, \mathbb{1}_{[\tau = T]} \times \mathbb{1}_{\overline{[\tau \geqslant T-1]}}\right)\, \mathbb{1}_{\overline{[\tau \geqslant T-1]}}
\end{aligned}$$

Or, d'après la question ***10.b)*** :

× $\mathbb{1}_{[\tau = T]} \times \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} \; = \; \mathbb{1}_{[\tau = T] \cap [\tau \geqslant T-1]} \; = \; \mathbb{1}_{[\tau = T]}$ car $[\tau = T] \subset [\tau \geqslant T-1]$.

× $\mathbb{1}_{[\tau = T]} \times \mathbb{1}_{\overline{[\tau \geqslant T-1]}} \; = \; \mathbb{1}_{[\tau = T]} \times \mathbb{1}_{[\tau < T-1]} \; = \; \mathbb{1}_{[\tau = T] \cap [\tau < T-1]} \; = \; \mathbb{1}_{\varnothing} \; = \; 0$.

Donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{[\tau \geqslant T-1]}\left(\mu\,\mathbb{1}_{[\tau=T]}\right) &= \frac{1}{\mathbb{P}([\tau \geqslant T-1])}\,\mathbb{E}\left(\mu\,\mathbb{1}_{[\tau=T]}\right)\,\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]} \\
&= \frac{\mu}{\mathbb{P}([\tau \geqslant T-1])}\,\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{[\tau=T]}\right)\,\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]} \\
&= \frac{\mu}{\mathbb{P}([\tau \geqslant T-1])}\,\mathbb{P}([\tau=T])\,\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]} \\
&= \frac{\mathbb{P}([\tau=T])}{\mathbb{P}([\tau \geqslant T-1])}\,u(X(T-1),X(T))\,\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}
\end{aligned}$$

On en déduit : $\mathbb{E}_{[\tau \geqslant T-1]}\left(\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}\,u(X(T-2),X(T-1)) + \mathbb{1}_{[\tau=T]}\,u(X(T-1),X(T))\right)$

$$= u(X(T-2),X(T-1))\,\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]} + \frac{\mathbb{P}([\tau=T])}{\mathbb{P}([\tau \geqslant T-1])}\,u(X(T-1),X(T))\,\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}$$

.

□

d) On suppose que $X(T-1)$ est donné.

(i) Montrer que le meilleur choix pour $X(T)$ est 1.

Démonstration.
Comme $[\tau \geqslant T-1]$ est réalisé, $X(1)$, …, $X(T-2)$ sont connus.
On suppose de plus ici que $X(T-1)$ est connu.
D'après la question ***11.***, si $X(1)$, …, $X(T-1)$ sont connus, alors le meilleur choix pour $X(T)$ est $y^*(X(T-1),T-1)$.

D'après la question ***11.a)***, on en déduit que le meilleur choix pour $X(T)$ est 1.

Commentaire

Ce résultat est parfaitement logique dans le contexte de la diapause. En effet, on rappelle que l'objectif est de maximiser le nombre d'œufs en diapause accumulés à la fin de la saison.
Si la fin de la saison a lieu à l'instant T, alors tous les organismes **sauf ceux en diapause** meurent après cet instant T. La meilleure stratégie à cet instant est donc que tous les œufs pondus à l'instant $(T-1)$ entrent en diapause pour ne pas mourir.
Autrement dit la proportion d'œufs entrant en diapause à l'instant T doit être égale à 1, ce qui se traduit par : $X(T)=1$.

□

(ii) Montrer que pour un tel choix $u(X(T-1),X(T)) = -\ln(X(T-1))$.

Démonstration.
Si $X(T)=1$, alors, d'après la question ***11.b)*** :

$$u(X(T-1),X(T)) \;=\; u(X(T-1),1) \;=\; -\ln(X(T-1))$$

Pour $X(T)=1$, $u(X(T-1),X(T)) = -\ln(X(T-1))$

□

e) Montrer que : $\mathbb{P}_{[\tau \geqslant T-1]}([\tau = T]) = 1 - H(T-1)$.

Démonstration.

- D'une part, comme $[\tau = T] \subset [\tau \geqslant T-1]$:

$$\mathbb{P}_{[\tau \geqslant T-1]}([\tau = T]) = \frac{\mathbb{P}([\tau \geqslant T-1] \cap [\tau = T])}{\mathbb{P}([\tau \geqslant T-1])} = \frac{\mathbb{P}([\tau = T])}{\mathbb{P}([\tau \geqslant T-1])}$$

- D'autre part, par définition de H (question ***3.a)*** :

$$\begin{aligned} 1 - H(T-1) &= 1 - \mathbb{P}_{[\tau \geqslant T-1]}([\tau = T-1]) = \mathbb{P}_{[\tau \geqslant T-1]}(\overline{[\tau = T-1]}) \\ &= \mathbb{P}_{[\tau \geqslant T-1]}([\tau \neq T-1]) = \frac{\mathbb{P}([\tau \geqslant T-1] \cap [\tau \neq T-1])}{\mathbb{P}([\tau \geqslant T-1])} \\ &= \frac{\mathbb{P}([\tau = T])}{\mathbb{P}([\tau \geqslant T-1])} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}_{[\tau \geqslant T-1]}([\tau = T]) = 1 - H(T-1).}$$

□

On veut maintenant choisir la stratégie optimale à la date $T-2$.

f) Montrer qu'on doit choisir pour $X(T-1)$ la valeur $y^*(X(T-2), T-2) \in [A(X(T-2)), 1]$ de telle sorte que

$$\phi(y) = u(X(T-2), y) - (1 - H(T-1)) \ln(y)$$

soit maximal.

Démonstration.

- D'après l'énoncé du début de la question ***12.***, on souhaite choisir le réel $X(T-1)$ qui rend maximal $\mathbb{E}\left(\sum\limits_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right)$.
- On note $Y = \sum\limits_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))$ et $B = [\tau \geqslant T-1]$. On obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}\big(Y(\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_{\bar{B}})\big) && \textit{(car } \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_{\bar{B}} = 1\textit{)} \\ &= \mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_B) + \mathbb{E}(Y\,\mathbb{1}_{\bar{B}}) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \end{aligned}$$

- Or, comme τ est à valeurs entières :

$$\overline{[\tau \geqslant T-1]} = [\tau < T-1] = [\tau \leqslant T-2]$$

On en déduit que, si l'événement $\overline{[\tau \geqslant T-1]}$ est réalisé, alors l'ensemble d'indices de la somme $\sum\limits_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))$ est vide.

Ainsi, d'après l'énoncé : $Y\,\mathbb{1}_{\bar{B}} = \left(\sum\limits_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right) \mathbb{1}_{\overline{[\tau \geqslant T-1]}} = 0$.

- On en déduit :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right) = \mathbb{E}\left(Y\, \mathbb{1}_B\right) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}_B(Y\, \mathbb{1}_B)\Big) \qquad \textit{(d'après } \textbf{\textit{10.c)(ii)}}\textit{)}$$

$$= \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}_B(Y)\, \mathbb{1}_B\Big) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}_{[\tau \geqslant T-1]}\Big(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\Big)\, \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}\right)$$

$$= \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}_{[\tau \geqslant T-1]}\Big(u(X(T-2), X(T-1))\, \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} + u(X(T-1), X(T))\, \mathbb{1}_{[\tau = T]}\Big)\Big) \qquad \textit{(d'après } \textbf{\textit{12.b)}}\textit{)}$$

$$= \mathbb{E}\left(u(X(T-2), X(T-1))\, \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} + \frac{\mathbb{P}([\tau = T])}{\mathbb{P}([\tau \geqslant T-1])}\, u(X(T-1), X(T))\, \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}\right) \qquad \textit{(d'après } \textbf{\textit{12.c)}}\textit{)}$$

$$= \mathbb{E}\Big(u(X(T-2), X(T-1))\, \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} + (1 - H(T-1))\, u(X(T-1), X(T))\, \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}\Big) \qquad \textit{(d'après } \textbf{\textit{12.e)}}\textit{)}$$

De là, par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right) \\ = \ & u(X(T-2), X(T-1))\, \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}\right) + (1 - H(T-1))\, u(X(T-1), X(T))\, \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}\right) \\ = \ & \Big(u(X(T-2), X(T-1)) + (1 - H(T-1))\, u(X(T-1), X(T))\Big)\, \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}\right) \end{aligned}$$

- On rappelle que $\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\mathbb{P}([\tau \geqslant T-1])\right)$.
  Donc $\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}\right) = \mathbb{P}([\tau \geqslant T-1])$ est une constante strictement positive.
  Or, si λ est un réel **strictement positif**, maximiser la fonction $x \mapsto \lambda\, f(x)$ est équivalent à maximiser $x \mapsto f(x)$.
  On en déduit que maximiser $\mathbb{E}\left(\sum\limits_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right)$ est équivalent à maximiser :

$$u(X(T-2), X(T-1)) + (1 - H(T-1))\, u(X(T-1), X(T))$$

- On rappelle maintenant que, dans cette partie, on suppose connus $X(1)$, ..., $X(T-2)$ et que l'on cherche à déterminer $X(T-1)$ et $X(T)$ maximisant $\mathbb{E}\left(\sum\limits_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right)$.
  Dans cette question, on cherche plus particulièrement à déterminer $X(T-1)$.
  Or, d'après la question ***12.d)(i)***, si $X(T-1)$ est connu, alors le meilleur choix pour $X(T)$ est 1, **peu importe la valeur de** $X(T-1)$.
  Pour déterminer le meilleur choix pour $X(T-1)$, on fixe donc dès à présent $X(T) = 1$.
  On en déduit que l'on souhaite maximiser :

$$u(X(T-2), X(T-1)) + (1 - H(T-1))\, u(X(T-1), 1)$$

  Or, d'après la question ***12.d)(ii)*** : $u(X(T-1), 1) = -\ln(X(T-1))$. On souhaite donc maximiser :

$$u(X(T-2), X(T-1)) - (1 - H(T-1))\, \ln(X(T-1))$$

- Ainsi, choisir $X(T-1)$ pour maximiser $\mathbb{E}\left(\sum\limits_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right)$ revient à maximiser la fonction :

$$\phi : y \mapsto u(X(T-2), y) - (1 - H(T-1))\, \ln(y)$$

> Finalement, le meilleur choix pour $X(T-1)$ est le réel maximisant la fonction $\phi : y \mapsto u(X(T-2), y) - (1 - H(T-1))\, \ln(y)$.

Commentaire

Rappelons que l'idée générale de ce sujet est de déterminer les réels $X(1)$, $X(2)$, ..., $X(T-1)$, $X(T)$ pour que $\mathbb{E}\big(\ln(D(\tau))\big)$ soit maximale.
Dans le contexte, on souhaite déterminer la proportion optimale d'œufs en diapause à chaque instant $t \in \{1, \dots, T\}$.
On pourrait tout d'abord penser à déterminer dans l'ordre le réel $X(1)$ optimal, puis $X(2)$, ..., pour finir par $X(T-1)$ et $X(T)$.
L'énoncé indique cependant qu'il traite de l'étude des deux premières étapes de la résolution du problème : « On expose dans cette partie les deux premières étapes de la méthode de la programmation dynamique pour résoudre le problème ». Donc les deux premières étapes de résolution sont en fait ici, non pas la détermination de $X(1)$ puis $X(2)$, mais celle de $X(T)$ puis $X(T-1)$.

□

g) Calculer $\phi'(y)$.

Démonstration.

- Soit $y \in \,]0,1]$.

$$\begin{aligned} \phi(y) &= u(X(T-2), y) - (1 - H(T-1)) \ln(y) \\ &= \ln(\alpha) - \ln(X(T-2)) + \ln(y) - \ln(1 + (\alpha-1)\,y) - (1 - H(T-1)) \ln(y) \\ &= \ln(\alpha) - \ln(X(T-2)) + H(T-1) \ln(y) - \ln(1 + (\alpha-1)\,y) \end{aligned}$$

  On en déduit que la fonction ϕ est dérivable sur $]0,1]$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0,1]$.

- Soit $y \in \,]0,1]$.

$$\begin{aligned} \phi'(y) &= \frac{H(T-1)}{y} - \frac{\alpha-1}{1+(\alpha-1)\,y} = \frac{H(T-1)\big(1+(\alpha-1)\,y\big) - (\alpha-1)\,y}{y\,\big(1+(\alpha-1)\,y\big)} \\ &= \frac{H(T-1) + (\alpha-1)(H(T-1)-1)\,y}{y\,\big(1+(\alpha-1)\,y\big)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall y \in \,]0,1],\ \phi'(y) = \frac{H(T-1) + (\alpha-1)(H(T-1)-1)\,y}{y\,\big(1+(\alpha-1)\,y\big)}}$$

□

h) Construire le tableau de variation de ϕ dans le cas $\dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))} \leqslant 1$.

Démonstration.

- Avec le même raisonnement qu'à la question ***11.a)*** : $y\,\big(1+(\alpha-1)\,y\big) > 0$. Donc :

$$\begin{aligned} \phi'(y) \geqslant 0 &\Leftrightarrow H(T-1) + (\alpha-1)(H(T-1)-1)\,y \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow (\alpha-1)(H(T-1)-1)\,y \geqslant -H(T-1) \\ &\Leftrightarrow y \leqslant -\frac{H(T-1)}{(\alpha-1)(H(T-1)-1)} \end{aligned}$$

  En effet :
  × $\alpha - 1 > 0$, car $\alpha > 1$.
  × $1 - H(T-1) \geqslant 0$, car $H(T-1)$ est une probabilité, donc en particulier $H(T-1) \leqslant 1$.

De plus : $-\dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(H(T-1)-1)} = \dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))}$. Donc :

$$\phi'(y) \geqslant 0 \ \Leftrightarrow \ y \leqslant \frac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))}$$

- Comme $\beta = \dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))} \leqslant 1$, alors on obtient le tableau de variations suivant :

y	0		β		1
Signe de $\phi'(y)$		$+$	0	$-$	
Variations de ϕ	$-\infty$	$\nearrow$	$\phi(\beta)$	$\searrow$	$\phi(1)$

- Détaillons les éléments de ce tableau.
  - × Tout d'abord : $\lim\limits_{y \to 0} \ln\big(1 + (\alpha-1)\, y\big) = \ln(1) = 0$.
    De plus : $H(T-1) \geqslant 0$ et $\lim\limits_{y\to 0} \ln(y) = -\infty$.
    On en déduit : $\lim\limits_{y \to 0} \phi(y) = -\infty$.
  - × Ensuite :

$$\begin{array}{rcl} \phi(1) & = & \ln(\alpha) - \ln(X(T-2)) + \cancel{H(T-1)\ln(1)} - \ln(1 + (\alpha-1)\times 1) \\ & = & \cancel{\ln(\alpha)} - \ln(X(T-2)) - \cancel{\ln(\alpha)} \\ & = & -\ln(X(T-2)) \end{array}$$

□

i) Construire le tableau de variation de ϕ dans le cas $\dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))} \geqslant 1$.

Démonstration.
Soit $y \in \,]0,1]$.
On a toujours : $\phi'(y) \geqslant 0 \ \Leftrightarrow \ y \leqslant \dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))} = \beta$.
Comme $\beta \geqslant 1$, avec les mêmes calculs qu'en question ***12.h)***, on obtient le tableau de variations suivant :

y	0		1
Signe de $\phi'(y)$		$+$	
Variations de ϕ	$-\infty$	$\nearrow$	$\phi(1)$

□

j) Donner la valeur de $y^*(X(T-2), T-2)$.

Démonstration.
Deux cas se présentent :
- × si $\beta \leqslant 1$, alors d'après la question ***12.h)***, la fonction ϕ atteint son maximum en β.

$$\boxed{\text{Si } \dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))} \leqslant 1, \text{ alors } y^*(X(T-2), T-2) = \dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))}.}$$

- × si $\beta \geqslant 1$, alors d'après la question ***12.i)***, la fonction ϕ atteint son maximum en 1.

$$\boxed{\text{Si } \dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))} \geqslant 1, \text{ alors } y^*(X(T-2), T-2) = 1.}$$

□