

DS3 /122

On s'intéresse à l'évolution d'une population de petits organismes (typiquement des insectes) pendant une « saison » reproductrice de durée maximale T où $T \in \mathbb{N}^*$. Les insectes sont supposés vivre une unité de temps, au bout de laquelle ils meurent en pondant un certain nombre d'œufs. Au moment du dépôt d'un œuf, un processus chimique, la diapause, est susceptible de se mettre en marche qui entraîne l'arrêt de maturation de l'œuf jusqu'à la saison suivante. Ainsi, à chaque t de la saison, une génération d'insectes s'éteint, en déposant des œufs. Immédiatement, une proportion $p(t)$ de ces œufs se mettent en diapause. Les œufs qui ne sont pas entrés en diapause éclosent avant la date $t+1$, donnant naissance à une nouvelle génération d'insectes, qui s'éteindra à la date $t+1$ en déposant des œufs, etc. Comme, à la fin de la saison, tous les organismes vivants de la population meurent, hormis les œufs qui sont en diapause, ce sont ces derniers qui seront à l'origine d'une nouvelle population qui éclora à la saison suivante. Il est donc fondamental pour la survie de la lignée que les organismes adoptent une stratégie maximisant le nombre d'œufs en diapause accumulés jusqu'à la date où la saison s'achève.

Au cours du problème, on s'intéressera plus particulièrement au cas où la durée de la saison est une variable aléatoire τ pouvant prendre des valeurs entières entre 1 et T. Pour $t \in \{1, 2, \ldots, T\}$, l'événement $[\tau = t]$ signifiera donc que la saison s'arrête à la date t.

Toutes les variables aléatoires intervenant dans le problème sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Pour toute variable aléatoire Y, on notera $\mathbb{E}(Y)$ son espérance lorsqu'elle existe.

Partie I - Modèle de population saisonnière /51

Dans cette question, on définit l'évolution formelle du nombre d'œufs en diapause entre les dates 0 et T. On note $D(t)$ = nombre d'œufs en diapause à la date t. Les œufs pondus à la date t qui entrent en diapause sont comptabilisés à la date $t+1$.

$$\begin{array}{rcl} N(t) & = & \text{nombre moyen d'œufs produits à la date } t \\ p(t) & = & \text{proportion des œufs produits à la date } t \text{ qui entrent en diapause} \end{array}$$

Par convention, la date 0 d'une saison est celle où les insectes nés des œufs en diapause de la saison précédente pondent $N(0)$ œufs. On suppose pour simplifier :

- que $N(0)$ est un entier naturel non nul.
- que tous les œufs issus de la saison précédente ont éclos et donc que $D(0) = 0$.
- que pour tout $t \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$, $0 < p(t) \leqslant 1$

Enfin, on suppose qu'à chaque date t de la saison, un individu produit en moyenne α œufs (α étant un réel strictement positif). **Par simplicité, on supposera que α reste constant pendant toute la saison.**

1. a) Montrer que $D(t+1) = D(t) + p(t)\,N(t)$ pour tout entier t tel que $0 \leqslant t \leqslant T-1$.

- **1 pt**

b) Montrer que $N(t+1) = \alpha(1 - p(t))\,N(t)$ pour tout entier t tel que $0 \leqslant t \leqslant T-1$.

- **1 pt**

2. On suppose dans cette question que $\alpha \leqslant 1$.

a) Montrer que pour tout entier t tel que $0 \leqslant t \leqslant T-1$, $N(t+1) \leqslant N(t)$.

- **1 pt**

b) Montrer que pour tout entier t tel que $0 \leqslant t \leqslant T-1$:

$$D(t+1)+N(t+1) \ \leqslant \ D(t)+N(t)$$

- **1 pt :** $D(t+1)+N(t+1) = \big(D(t)+p(t)\,N(t)\big)+\alpha\,\big(1-p(t)\big)\,N(t)$
- **1 pt : majoration**

c) Montrer que pour tout entier t tel que $0 \leqslant t \leqslant T$:

$$D(t)+N(t) \leqslant N(0)$$

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

d) Montrer que pour tout entier t tel que $0 \leqslant t \leqslant T$, $D(t) \leqslant N(0)$.

- **1 pt :** $N(t) \in \mathbb{N}$ **donc** $N(t) \geqslant 0$

e) On suppose que $p(0)=1$.

(i) Montrer que pour tout entier t tel que $1 \leqslant t \leqslant T$, $N(t)=0$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

(ii) Montrer que pour tout entier t tel que $1 \leqslant t \leqslant T$, $D(t)=N(0)$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

(iii) En déduire que si $\alpha \leqslant 1$, la meilleure stratégie adaptée à la saison est que les $N(0)$ œufs produits à la date 0 entrent en diapause immédiatement.

- **2 pts : la stratégie optimale est que les $N(0)$ oeufs produits à la date 0 entrent en diapause immédiatement (dont 1 pt pour les explications)**

3. **On suppose désormais $\alpha > 1$ jusqu'à la fin du problème.**
On introduit maintenant τ une variable aléatoire à valeurs dans $\{1,2,\dots,T\}$ qui représente la date où s'achève la saison. On suppose que pour tout $t \in \{1,2,\dots,T\}$, $\mathbb{P}([\tau=t])>0$.

a) Montrer que pour tout $t \in \{1,2,\dots,T\}$, $\mathbb{P}([\tau \geqslant t])>0$. On définit alors $H(t)=\mathbb{P}_{[\tau \geqslant t]}([\tau=t])$.

- **1 pt :** $[\tau=t] \subset [\tau \leqslant t]$
- **1 pt : d'après l'énoncé** $\mathbb{P}\big(\,[\tau=t]\,\big)>0$

b) Montrer que : $H(t)=\dfrac{\mathbb{P}([\tau=t])}{\mathbb{P}([\tau \geqslant t])}$.

- **1 pt :** $H(t)=\dfrac{\mathbb{P}\big(\,[\tau \geqslant t]\cap[\tau=t]\,\big)}{\mathbb{P}\big(\,[\tau \geqslant t]\,\big)}$
- **1 pt :** $[\tau=t] \subset [\tau \geqslant t]$

c) Montrer que : $H(T)=1$.

- **1 pt :** $\tau(\Omega) \subset [\![1,T]\!]$ **donc** $[\tau \geqslant t]=[\tau=T]$

d) Calculer $H(t)$ pour $t \in \{1, 2, \dots, T\}$ si τ suit une loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, T\}$.

- **1 pt :** $[\tau \geqslant t] = \bigcap\limits_{k=t}^{T} [\tau = k]$
- **1 pt :** $[\tau = t]$**,** $\dots$**,** $[\tau = T]$ **incompatibles**
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([\tau \geqslant t]\big) = \dfrac{T-t+1}{T}$
- **1 pt :** $H(t) = \dfrac{1}{T-t+1}$

e) (i) Soient T réels λ_1, λ_2, $\dots$, λ_T tels que $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_T = 1$. Par convention, on pose $\lambda_0 = 0$. Soient $q_1 = \lambda_1$, $q_2 = \lambda_2 - \lambda_1$, $\dots$, $q_T = \lambda_T - \lambda_{T-1}$.
Montrer que $(q_i)_{1 \leqslant i \leqslant T}$ définit une loi de probabilité sur $\{1, 2, \dots, T\}$.

- **1 pt :** $\forall i \in [\![1, T]\!]$**,** $q_i = \lambda_i - \lambda_{i-1} \geqslant 0$
- **1 pt :** $\sum\limits_{i=1}^{T} q_i = \lambda_T - \lambda_0 = 1$

(ii) Calculer $H(t)$ si τ suit la loi précédente.

- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([\tau \geqslant t]\big) = \sum\limits_{i=t}^{T} q_i = \lambda_T - \lambda t - 1$
- **1 pt :** $H(t) = \dfrac{\lambda_t - \lambda_{t-1}}{\lambda_T - \lambda t - 1}$

(iii) On suppose que $T \geqslant 2$ et de plus que pour tout entier n tel que $1 \leqslant n \leqslant T-1$, on a $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant \lambda_n - \lambda_{n-1}$. Montrer que $t \mapsto H(t)$ est croissante sur $\{1, 2, \dots, T\}$.

- **1 pt : d'après *3.e)(ii)* :** $H(t+1) \geqslant H(t) \;\Leftrightarrow\; \dfrac{\lambda_{t+1} - \lambda_t}{\lambda_T - \lambda_t} \geqslant \dfrac{\lambda_t - \lambda_{t-1}}{\lambda_T - \lambda_{t-1}}$
- **1 pt :** $\lambda_{t+1} - \lambda_t \geqslant \lambda_t - \lambda_{t-1} \geqslant 0$ **d'après l'énoncé**
- **1 pt :** $\dfrac{1}{\lambda_T - \lambda_t} \geqslant \dfrac{1}{\lambda_T - \lambda_{t-1}} \;\Leftrightarrow\; \lambda_{t-1} \leqslant \lambda_t$ **(par stricte décroissance de la fonction inverse sur** $]0, +\infty[$**)**

On suppose désormais que $t \mapsto H(t)$ **est croissante.** Le but est maintenant de trouver une stratégie adéquate pour maximiser la quantité $\mathbb{E}\big(\ln(D(\tau))\big)$. On va commencer par regarder un exemple simple.

4. On suppose ici que $T = 2$, que H est donnée par $H(1) = \dfrac{1}{2}$ et $H(2) = 1$ et que $\alpha = 4$.

a) (i) Déterminer $\mathbb{P}([\tau = 1])$.

- **1 pt : d'après *3.b)*,** $\mathbb{P}\big([\tau = 1]\big) = H(1)\,\mathbb{P}\big([\tau \geqslant 1]\big) = \dfrac{1}{2}\,\mathbb{P}\big([\tau \geqslant 1]\big)$
- **1 pt :** $\tau(\Omega) \subset \{1, 2\}$ **donc** $\mathbb{P}\big([\tau \geqslant 1]\big) = 1$

(ii) Quelle est la loi de τ ?

- **1 pt :** $\big([\tau = 1], [\tau = 2]\big)$ **est un SCE**
- **1 pt :** $\tau \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 2]\!])$

b) Montrer que pour $D(1)$ et $N(1)$ donnés, $D(2)$ est maximum pour $p(1) = 1$.

- **1 pt : d'après *1.a)*,** $D(2) = D(1) + p(1)\, N(1)$
- **1 pt : comme** $D(1)$ **et** $N(1)$ **sont fixés,** $D(1) + p(1)\, N(1)$ **est maximal si** $p(1)$ **l'est**
- **1 pt :** $0 < p(1) \leqslant 1$ **donc** $p(1)$ **maximal lorsque** $p(1) = 1$

c) On suppose $p(1) = 1$. Montrer que :

$$\mathbb{E}\big(\ln(D(\tau)\big) \;=\; \frac{1}{2}\, \ln\big((4 - 3\, p(0))\, N(0)\big) + \frac{1}{2}\, \ln\big(p(0)\, N(0)\big)$$

- **1 pt : la v.a.r.** $\ln\big(D(\tau)\big)$ **admet une espérance car elle est finie**
- **1 pt : par théorème de transfert,** $\mathbb{E}\big(\ln(D(\tau))\big) = \ln\big(D(1)\big)\, \mathbb{P}\big(\, [\tau = 1]\, \big) + \ln\big(D(2)\big)\, \mathbb{P}\big(\, [\tau = 2]\, \big) = \dfrac{1}{2}\, \ln\big(D(1)\big) + \dfrac{1}{2}\, \ln\big(D(2)\big)$
- **1 pt :** $D(1) = D(0) + p(0)\, N(0) = p(0)\, N(0)$
- **1 pt :** $D(2) = D(1) + p(1)\, N(1) = D(1) + N(1)$
- **1 pt :** $D(2) = D(0) + p(0)\, N(0) + \alpha\, \big(1 - p(0)\big)\, N(0) = \big(4 - 3\, p(0)\big)\, N(0)$

d) Construire le tableau de variations sur $]0, 1]$ de la fonction φ définie par :

$$\varphi(x) \;=\; \frac{1}{2}\, \ln\big((4 - 3x)\, N(0)\big) + \frac{1}{2}\, \ln\big(N(0)\, x\big)$$

- **1 pt :** φ **est dérivable sur** $]0, 1]$ **en tant que somme et composées de fonctions dérivables sur des intervalles adéquats.**
- **1 pt :** $\varphi' : x \mapsto \dfrac{1 - 3x}{x\,(4 - 3x)}$
- **1 pt :** $x > 0$ **et** $4 - 3x > 0$ **donc** $\varphi'(x) \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; x \leqslant \dfrac{2}{3}$
- **1 pt : TV**

x	0		$\frac{2}{3}$		1
Signe de $\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de φ	$-\infty$	$\nearrow$	$\varphi(\frac{2}{3})$	$\searrow$	$\ln(N(0))$

e) Déterminer $p^*(0)$ qui maximise $\mathbb{E}\big(\ln(D(\tau))\big)$.

- **1 pt : d'après *4.c)* et *4.d)*,** $\mathbb{E}\big(\ln(D(\tau))\big) = \varphi\big(p(0)\big)$
- **1 pt : d'après *4.d)*,** φ **admet un unique maximum en** $\dfrac{2}{3}$**. Donc** $\mathbb{E}\big(\ln(D(\tau)\big)$ **est maximal pour** $p^*(0) = \dfrac{2}{3}$

Partie II - Transformation du problème /27

Par convention, on conviendra que si h est une fonction numérique définie sur $\{0, 1, 2, \ldots, T\}$, on a

$$\sum_{t=1}^{0} h(t) = 0$$

5. Montrer que pour tout $t \in \{0, 1, 2, \ldots, T\}$, $D(t) + N(t) > 0$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**
  - × **1 pt :** $D(t+1) + N(t+1) = D(t) + N(t) + \big(1 - p(t)\big)\,(\alpha - 1)\,N(t)$
  - × **1 pt : par hypothèse de récurrence** $D(t) + N(t) > 0$**, de plus** $1 - p(t) \geqslant 0$**,** $\alpha > 1$ **et** $N(t) \geqslant 0$ **car** $N(t) \in \mathbb{N}$

On pose

$$X(t) \;=\; \frac{D(t)}{D(t) + N(t)}$$

6. Montrer que pour tout $t \in \{0, 1, 2, \ldots, T-1\}$:

$$X(t+1) \;=\; \frac{p(t) + (1 - p(t))\,X(t)}{p(t) + \alpha\,(1 - p(t)) + (1 - \alpha)(1 - p(t))\,X(t)}$$

- **1 pt :** $X(t+1) = \dfrac{D(t) + p(t)\,N(t)}{D(t) + p(t)\,N(t) + \alpha\,\big(1 - p(t)\big)\,N(t)}$
- **1 pt :** $\dfrac{p(t) + \big(1 - p(t)\big)\,X(t)}{p(t) + \alpha\,\big(1 - p(t)\big) + (1 - \alpha)\,\big(1 - p(t)\big)\,N(t)}$

7. Soit $\xi \in [0, 1]$ fixé. Pour $x \in [0, 1]$, on pose :

$$\psi_\xi(x) \;=\; \frac{x + (1 - x)\xi}{x + \alpha\,(1 - x) + (1 - \alpha)(1 - x)\xi}$$

a) Montrer que ψ_ξ est croissante sur $[0, 1]$.

- **1 pt :** ψ_ξ **dérivable sur** $[0, 1]$ **en tant que quotient de fonctions dérivables sur** $[0, 1]$ **dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.**
- **2 pts :** $\forall x \in [0, 1]$, $x + \alpha\,(1 - x) + (1 - \alpha)\,(1 - x)\,\xi \neq 0$
- **1 pt :** $\psi'_\xi : x \mapsto \dfrac{\alpha\,(1 - \xi)}{\big((1 - \alpha)\,(1 - \xi)\,x + \alpha + (1 - \alpha)\,\xi\big)^2}$
- **1 pt :** $\alpha > 1 > 0$ **et** $1 - \xi \geqslant 0$ **donc** $\psi'_\xi(x) \geqslant 0$

b) Calculer $\psi_\xi(1)$.

- **1 pt :** $\psi_\xi(1) = 1$

c) (i) Calculer $\psi_\xi(0)$. On pose désormais $A(\xi) \;=\; \psi_\xi(0)$

- **1 pt :** $\psi_\xi(0) = \dfrac{\xi}{\alpha + (1 - \alpha)\,\xi}$

(ii) Montrer que pour tout $t \in \{0, 1, 2, \ldots, T-1\}$, $A(X(t)) \leqslant X(t+1) \leqslant 1$.

- **1 pt : d'après *6.*,** $X(t+1) = \psi_{X(t)}\big(p(t)\big)$
- **1 pt : d'après *7.a)*,** ψ_ξ **croissante sur** $[0,1]$ **donc :** $A(\xi) \leqslant \psi_\xi(x) \leqslant 1$ **(avec *7.b)* et *7.c)(i)*)**
- **1 pt : on applique l'encadrement précédent à** $x = p(t) \in \,]0,1]$ **et** $\xi = X(t) \in [0,1]$

(iii) Montrer que $\xi \mapsto A(\xi)$ est croissante sur $[0,1]$.

- **1 pt :** A **dérivable sur** $[0,1]$ **en tant que quotient de fonctions dérivables sur** $[0,1]$ **dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.**
- **1 pt :** $A' : \xi \mapsto \dfrac{\alpha}{\big(\alpha + (1-\alpha)\,\xi\big)^2} > 0$

8. Justifier l'égalité de variables aléatoires :

$$D(\tau) \; = \; \frac{D(\tau)}{D(\tau-1)} \cdot \frac{D(\tau-1)}{D(\tau-2)} \cdot \cdots \cdot \frac{D(2)}{D(1)} \cdot \frac{D(1)}{N(0)} \cdot N(0)$$

- **1 pt : par récurrence,** $\forall t \in [\![1,T]\!]$, $D(t) > 0$ **; et** $N(0) > 0$
- **1 pt : télescopage**

On pose $\hat{R}(0) = \ln\left(\dfrac{D(1)}{N(0)}\right)$ et $\hat{R}(t) = \ln\left(\dfrac{D(t+1)}{D(t)}\right)$ pour $1 \leqslant t \leqslant T-1$.

9. ***a)*** Montrer que :

$$\mathbb{E}\big(\ln(D(\tau))\big) \; = \; \ln(N(0)) + \mathbb{E}\left(\hat{R}(0) + \sum_{t=1}^{\tau-1} \hat{R}(t)\right)$$

- **1 pt :** $\ln\big(D(\tau)\big) = \sum\limits_{i=1}^{\tau-1} \hat{R}(t) + \hat{R}(0) + \ln\big(N(0)\big)$
- **1 pt : la v.a.r.** $\ln\big(D(\tau)\big)$ **admet une espérance car elle est finie**
- **1 pt : par linéarité de l'espérance,** $\mathbb{E}\big(\ln(D(\tau))\big) = \ln\big(N(0)\big) + \mathbb{E}\left(\hat{R}(0) + \sum\limits_{t=1}^{\tau-1} \hat{R}(t)\right)$

b) Montrer que : $\dfrac{D(1)}{N(0)} = \dfrac{\alpha\, X(1)}{1 + (\alpha-1)\, X(1)}$.

- **1 pt (avec les questions *1.a)* et *1.b)*)**

c) Montrer que : $\dfrac{D(t+1)}{D(t)} = \dfrac{\alpha\, X(t+1)}{X(t)\big(1 + (\alpha-1)\, X(t+1)\big)}$ pour $1 \leqslant t \leqslant T-1$.

- **1 pt**

Pour x et y deux réels strictement positifs, on pose $u(x,y) = \ln(\alpha) - \ln(x) + \ln(y) - \ln(1 + (\alpha-1)y)$.

d) Montrer que : $\hat{R}(0) = u(1, X(1))$.

- **1 pt (avec *9.b)*)**

e) Montrer que : $\hat{R}(t) = u(X(t), X(t+1))$ pour $1 \leqslant t \leqslant T-1$.

- **1 pt (avec *9.c)*)**

f) Conclure que :

$$\mathbb{E}\big(\ln(D(\tau))\big) \; = \; \ln(N(0)) + \mathbb{E}\left(u(1, X(1)) + \sum_{t=1}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right)$$

- **1 pt (avec *9.a)*, *9.d)* et *9.e)*)**

On voit donc que maximiser $\mathbb{E}\big(\ln(D(\tau))\big)$ revient à choisir, à chaque date t telle que $1 \leqslant t \leqslant \tau - 1$, la valeur $X(t+1)$ vérifiant la contrainte $A(X(t)) \leqslant X(t+1) \leqslant 1$ de façon à rendre maximale l'expression

$$\mathbb{E}\left(u(1, X(1)) + \sum_{t=1}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right)$$

Partie III - Programmation dynamique /44

On expose dans cette partie les deux premières étapes de la méthode de la programmation dynamique pour résoudre le problème.

10. Soit B un événement. On note $\mathbb{1}_B$ la variable aléatoire telle que

$$\mathbb{1}_B(\omega) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Déterminer la loi de $\mathbb{1}_B$.

- **1 pt :** $\mathbb{1}_B(\Omega) \subset \{0, 1\}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([\mathbb{1}_B = 1]\big) = \mathbb{P}(B)$

b) Soient B et C deux événements. Montrer l'égalité de variables aléatoires : $\mathbb{1}_{B \cap C} = \mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_C$.

- **1 pt : cas** $\omega \in B \cap C$
- **2 pts : cas** $\omega \in \overline{B \cap C}$

c) On suppose que $0 < \mathbb{P}(B) < 1$. Si Y est une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs, on définit la **variable aléatoire** notée $\mathbb{E}_B(Y)$ par :

$$\mathbb{E}_B(Y) \;=\; \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\, \mathbb{E}(Y\, \mathbb{1}_B)\, \mathbb{1}_B + \frac{1}{\mathbb{P}(\bar{B})}\, \mathbb{E}(Y\, \mathbb{1}_{\bar{B}})\, \mathbb{1}_{\bar{B}}$$

où $\bar{B}$ désigne l'événement contraire de B.

(i) Soient Y et Z deux variables aléatoires prenant un nombre fini de valeurs. Montrer que :

$$\mathbb{E}_B(Y + Z) \;=\; \mathbb{E}_B(Y) + \mathbb{E}_B(Z)$$

- **1 pt :** $\mathbb{E}_B(Y + Z)$ **est bien définie car la v.a.r.** $Y + Z$ **est finie**
- **1 pt :** $\mathbb{E}_B(Y + Z) \;=\; \mathbb{E}_B(Y) + \mathbb{E}_B(Z)$

(ii) Montrer que : $\mathbb{E}(\mathbb{E}_B(Y)) = \mathbb{E}(Y)$.

- **1 pt :** $\mathbb{E}_B(Y)$ **admet une espérance car c'est une v.a.r. finie (les v.a.r.** Y, $\mathbb{1}_B$ **et** $\mathbb{1}_{\overline{B}}$ **le sont)**
- **1 pt : avec *10.a)*,** $\mathbb{E}\big(\mathbb{E}_B(Y)\big) = \mathbb{E}\big(Y(\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_{\overline{B}})\big)$
- **1 pt :** $\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_{\overline{B}} = 1$

(iii) Montrer que : $\mathbb{E}_B(Y\, \mathbb{1}_B) = \mathbb{E}_B(Y)\, \mathbb{1}_B$.

- **1 pt :**

11. On suppose dans cette question que, quand l'événement $[\tau = T]$ est réalisé, $X(1)$, ..., $X(T-1)$ sont connus. Comme on l'a vu précédemment, si on pose $x = X(T-1)$, le meilleur choix à faire est alors de prendre pour $X(T)$ la valeur $y^*(x, T-1) \in [A(x), 1]$ qui maximise $u(x,y)$.

a) Montrer que : $y^*(x, T-1) = 1$.

- **1 pt : $f : y \mapsto u(x,y)$ est dérivable sur $]0,1]$ en tant que somme et composée de fonctions dérivables sur des intervalles adéquats.**
- **1 pt : $f' : y \mapsto \dfrac{1}{y\left(1 + (\alpha - 1)\, y\right)}$**
- **1 pt : $f'(y) > 0$ car $\alpha > 1$**
- **1 pt : TV**

y	0 $\qquad$ 1
Signe de $f'(y)$	$+$
Variations de f	$-\infty \nearrow f(1)$

- **1 pt : f atteint un unique maximum en 1 donc $y^*(x, T-1) = 1$**

b) Montrer que : $u(x,1) = -\ln(x)$.

- **1 pt**

12. On suppose maintenant que, quand l'événement $[\tau \geqslant T-1]$ est réalisé, les réels $X(1)$, ..., $X(T-2)$ sont connus.

La stratégie reste donc de choisir $X(T-1)$ et $X(T)$ de façon à maximiser $\mathbb{E}\left(\sum\limits_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right)$.

La variable aléatoire τ prend les deux valeurs $T-1$ et T avec les probabilités respectives

$$\mathbb{P}_{[\tau \geqslant T-1]}([\tau = T-1]) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{[\tau \geqslant T-1]}([\tau = T])$$

a) Montrer que :

$$\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} \sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1)) \;=\; \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}\, u(X(T-2), X(T-1)) + \mathbb{1}_{[\tau = T]}\, u(X(T-1), X(T))$$

- **2 pts : cas $\omega \in [\tau \geqslant T-1]$**
  - × **1 pt : cas $\omega \in [\tau = T-1]$**
  - × **1 pt : cas $\omega \in [\tau = T]$**
- **1 pt : $\omega \in \overline{[\tau \geqslant T-1]}$**

b) Montrer que :

$$\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]}\ \mathbb{E}_{[\tau \geqslant T-1]}\left(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right)$$

$$= \quad \mathbb{E}_{[\tau \geqslant T-1]}\Big(u(X(T-2), X(T-1)) \cdot \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} + u(X(T-1), X(T)) \cdot \mathbb{1}_{[\tau = T]}\Big)$$

- **1 pt : d'après *10.c)(iii)* : $\mathbb{E}_{[\tau \geqslant T-1]}\left(\sum\limits_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right) = \mathbb{E}_B(Y)\, \mathbb{1}_B = \mathbb{E}_B(\mathbb{1}_B\, Y)$ où $Y = \sum\limits_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))$ et $B = [\tau \geqslant T-1]$**
- **1 pt : utilisation *12.a)***

c) Montrer que :

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{[\tau\geqslant T-1]}\left(\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}\,u(X(T-2),X(T-1))+\mathbb{1}_{[\tau=T]}\,u(X(T-1),X(T))\right)\\ =\;& u(X(T-2),X(T-1))\,\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}+\frac{\mathbb{P}([\tau=T])}{\mathbb{P}([\tau\geqslant T-1])}\,u(X(T-1),X(T))\,\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}\end{aligned}$$

- **1 pt : d'après *10.c)(i)***

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{[\tau\geqslant T-1]}\left(u(X(T-2),X(T-1))\,\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}+u(X(T-1),X(T))\,\mathbb{1}_{[\tau=T]}\right)\\ =\;&\mathbb{E}_{[\tau\geqslant T-1]}\left(u(X(T-2),X(T-1))\,\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}\right)+\mathbb{E}_{[\tau\geqslant T-1]}\left(u(X(T-1),X(T))\,\mathbb{1}_{[\tau=T]}\right)\end{aligned}$$

- **2 pts : calcul de $\mathbb{E}_{[\tau\geqslant T-1]}\left(u(X(T-2),X(T-1))\,\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}\right)$**
  - $\times$ **1 pt : utilisation *10.c)(iii)* et fin du calcul**
  - $\times$ **1 pt : utilisation *10.c)* avec $\lambda=u\big(X(T-2),X(T-1)\big)\in\mathbb{R}$ et $\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}\hookrightarrow\mathcal{B}\left(\mathbb{P}\big([\tau\geqslant T-1]\big)\right)$**
- **3 pts : calcul de $\mathbb{E}_{[\tau\geqslant T-1]}\left(u(X(T-1),X(T))\,\mathbb{1}_{[\tau=T]}\right)$**
  - $\times$ **1 pt : par définition de $\mathbb{E}_{[\tau\geqslant T-1]}\left(\mu\,\mathbb{1}_{[\tau=T]}\right)$ et d'après *10.c)***

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{[\tau\geqslant T-1]}\left(\mu\,\mathbb{1}_{[\tau=T]}\right)\\ =\;&\frac{1}{\mathbb{P}([\tau\geqslant T-1])}\,\mathbb{E}\left(\mu\,\mathbb{1}_{[\tau=T]}\times\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}\right)\,\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}+\frac{1}{\mathbb{P}(\overline{[\tau\geqslant T-1]})}\,\mathbb{E}\left(\mu\,\mathbb{1}_{[\tau=T]}\times\mathbb{1}_{\overline{[\tau\geqslant T-1]}}\right)\,\mathbb{1}_{\overline{[\tau\geqslant T-1]}}\end{aligned}$$

  - $\times$ **1 pt : d'après *10.b)*, $\mathbb{1}_{[\tau=T]}\times\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}\;=\;\mathbb{1}_{[\tau=T]}$ et $\mathbb{1}_{[\tau=T]}\times\mathbb{1}_{\overline{[\tau\geqslant T-1]}}\;=\;0$**
  - $\times$ **1 pt : fin du calcul**

d) On suppose que $X(T-1)$ est donné.

(i) Montrer que le meilleur choix pour $X(T)$ est 1.

- **1 pt : Comme $[\tau\geqslant T-1]$ est réalisé, $X(1)$, …, $X(T-2)$ sont connus**
- **1 pt : d'après *11.*, si $X(1)$, …, $X(T-1)$ sont connus, alors le meilleur choix pour $X(T)$ est $y^*(X(T-1),T-1)=1$ (d'après *11.a)*).**

(ii) Montrer que pour un tel choix $u(X(T-1),X(T))=-\ln(X(T-1))$.

- **1 pt avec *11.b)***

e) Montrer que : $\mathbb{P}_{[\tau\geqslant T-1]}([\tau=T])=1-H(T-1)$.

- **1 pt : comme $[\tau=T]\subset[\tau\geqslant T-1]$: $\mathbb{P}_{[\tau\geqslant T-1]}([\tau=T])\;=\;\dfrac{\mathbb{P}([\tau=T])}{\mathbb{P}([\tau\geqslant T-1])}$**
- **1 pt : par définition de H, $1-H(T-1)=\mathbb{P}_{[\tau\geqslant T-1]}(\overline{[\tau=T-1]})=\dfrac{\mathbb{P}([\tau\geqslant T-1]\cap[\tau\neq T-1])}{\mathbb{P}([\tau\geqslant T-1])}=$** $\dfrac{\mathbb{P}([\tau=T])}{\mathbb{P}([\tau\geqslant T-1])}$

On veut maintenant choisir la stratégie optimale à la date $T-2$.

f) Montrer qu'on doit choisir pour $X(T-1)$ la valeur $y^*(X(T-2),T-2)\in[A(X(T-2)),1]$ de telle sorte que

$$\phi(y)\;=\;u(X(T-2),y)-(1-H(T-1))\,\ln(y)$$

soit maximal.

- **4 pts : on octroiera généreusement une bonne partie des points si quelques arguments pertinents sont présents**

g) Calculer $\phi'(y)$.

- **1 pt :** $\phi(y) = \ln(\alpha) - \ln(X(T-2)) + H(T-1)\,\ln(y) - \ln(1+(\alpha-1)\,y)$
- **1 pt :** ϕ **dérivable sur** $]0,1]$ **en tant que somme de fonctions dérivables sur** $]0,1]$
- **1 pt :** $\phi' : y \mapsto \dfrac{H(T-1) + (\alpha-1)(H(T-1)-1)\,y}{y\,\big(1+(\alpha-1)\,y\big)}$

h) Construire le tableau de variation de ϕ dans le cas $\dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))} \leqslant 1$.

- **1 pt :** $\phi'(y) \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; y \leqslant -\dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(H(T-1)-1)}$
- **1 pt : TV avec** $\beta = \dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))} \leqslant 1$

y	0		β		1
Signe de $\phi'(y)$		$+$	0	$-$	
Variations de ϕ	$-\infty$	$\nearrow$	$\phi(\beta)$	$\searrow$	$\phi(1)$

i) Construire le tableau de variation de ϕ dans le cas $\dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))} \geqslant 1$.

- **1 pt : Comme** $\beta \geqslant 1$**, avec les mêmes calculs qu'en question *12.h)*, on obtient le tableau de variations suivant :**

y	0		1
Signe de $\phi'(y)$		$+$	
Variations de ϕ	$-\infty$	$\nearrow$	$\phi(1)$

j) Donner la valeur de $y^*(X(T-2), T-2)$.

- **1 pt : Si** $\dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))} \leqslant 1$**, alors** $y^*(X(T-2), T-2) = \dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))}$
- **1 pt : Si** $\dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))} \geqslant 1$**, alors** $y^*(X(T-2), T-2) = 1$