DS2 (version B)

Exercice 1 (HEC 2017)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrés à n lignes et n colonnes à coefficients réels et B_n l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 0 ou à 1.

1. *Exemple 1.* Soit A la matrice de B_2 définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer la matrice A^2.

Démonstration.

$$\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = I_2.}$$

□

b) Quelles sont les valeurs propres de A ?

Démonstration.

- D'après la question ***1.a)***, $A^2 - I_2 = 0$.
  On en déduit que le polynôme $P(X) = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ est un polynôme annulateur de A. Le polynôme P admet donc 1 et -1 comme racines.
  Or, le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines de P.
  $$\boxed{\text{Autrement dit : } \mathrm{Sp}(A) \subset \{-1, 1\}.}$$
- Vérifions que 1 est valeur propre de A.
  $$\det(A - I_2) = \det\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right) = 1 - 1 = 0$$
  Ainsi, $A - I_2$ n'est pas inversible. Donc 1 est valeur propre de A.
- Vérifions que -1 est valeur propre de A.
  $$\det(A + I_2) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1 - 1 = 0$$
  Donc $A + I_2$ n'est pas inversible. Donc -1 est valeur propre de A.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 1\}.}$$

Commentaire

- Étant en présence d'une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on privilégie ici l'utilisation du déterminant. Cependant, on peut aussi rédiger à l'aide d'un calcul de rang. Par exemple :
  $$\mathrm{rg}(A + I_2) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) < 2 \quad \text{car } L_1 = L_2$$
- Au vu de la première question, introduire un polynôme annulateur est un bon réflexe. Cependant, on peut faire une démonstration directe.
  Détaillons la. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
  $$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(A) &\Leftrightarrow A - \lambda\, I \text{ non inversible} \\ &\Leftrightarrow \det(A - \lambda\, I_2) = 0 \end{aligned}$$
  Or : $\det(A - \lambda I_2) = \det\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$.
  On obtient bien : $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 1\}$.

□

c) La matrice A est-elle diagonalisable ?

Démonstration.
La matrice A est carrée d'ordre 2 et admet 2 valeurs propres **distinctes**.

$$\boxed{\text{Ainsi, la matrice } A \text{ est diagonalisable.}}$$

□

2. *Exemple 2.* Soit B la matrice de $\mathcal{B}_3$ définie par : $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère les instructions et la sortie **Python** suivantes :

```
B = np.matrix([[0,1,0], [1,0,0], [0,0,1]])
P = np.matrix([[1,1,0], [1,-1,0], [0,0,1]])
Q = np.linalg.inv(P)
D = np.dot(Q, np.dot(B, P))
```

```
In [1] : D
Out [1] : matrix( [ [1.,  0.,  0.],
                    [0., −1.,  0.],
                    [0.,  0.,  1.] ] )
```

a) Déduire les valeurs propres de B de la séquence **Python** précédente.

Démonstration.
Notons $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

D'après la séquence **Python**, $P^{-1}BP = D$, d'où $B = PDP^{-1}$.
Ainsi, B est semblable à une matrice diagonale.
Elle est donc diagonalisable et ses valeurs propres sont les coefficients diagonaux de D.

$$\boxed{\text{Sp}(B) = \{-1, 1\}}$$

□

b) Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de B.

Démonstration.

- Le programme **Python** précédent nous fournit la diagonalisation de la matrice B :
$$B = PDP^{-1}$$
La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ constituée des colonnes de la matrice P est une base de vecteurs propres de B. Plus précisément, pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, le $i^{\text{ème}}$ vecteur de $\mathcal{F}$ est un vecteur propre associé au coefficient diagonal $d_{i,i}$.
- On en déduit :
$$E_{-1}(B) \supset \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{et} \qquad E_1(B) \supset \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

- Ainsi, $\dim(E_{-1}(B)) \geqslant 1$ et $\dim(E_1(B)) \geqslant 2$.
  Or, comme B est diagonalisable :
  $$\dim(E_{-1}(B)) + \dim(E_1(B)) = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})) = 3$$
  On en déduit : $\dim(E_{-1}(B)) = 1$ et $\dim(E_1(B)) = 2$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } E_{-1}(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_1(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right).}$$

Commentaire

- On aurait aussi pu déterminer ces deux sous-espaces propres « à la main ».
- Détaillons la méthode. Soit $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} X \in E_{-1}(B) & \Leftrightarrow & (B + I_3)\ X = 0 \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x + y & = & 0 \\ x + y & = & 0 \\ 2\,z & = & 0 \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -y \\ z & = & 0 \end{array}\right. \end{array}$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} E_{-1}(B) & = & \{X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid X \in E_{-1}(B)\} \\ & = & \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mid x = -y \ \texttt{ET} \ z = 0\} \\ & = & \{\begin{pmatrix}-y\\y\\0\end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{y \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right) \end{array}$$

La famille $\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ est donc :

× génératrice de $E_{-1}(B)$,

× libre car constituée d'un unique vecteur non nul.

C'est donc une base de $E_{-1}(B)$.

- De même, on démontre : $E_1(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

□

3. ***a)*** Combien existe-t-il de matrices appartenant à B_n ?

Démonstration.
Une matrice M de B_n est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont chaque coefficient vaut soit 0 soit 1.
Une telle matrice est entièrement déterminée par :

× le choix du coefficient m_{11} : 2 possibilités.

× ...

× le choix du coefficient m_{1n} : 2 possibilités.

× le choix du coefficient m_{21} : 2 possibilités.

× ...

× le choix du coefficient m_{2n} : 2 possibilités.

× ...

× le choix du coefficient m_{n1} : 2 possibilités.

× ...

× le choix du coefficient m_{nn} : 2 possibilités.

Il y a donc 2^{n^2} telles matrices.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathrm{Card}(B_n) = 2^{n^2}.}$$

□

b) Combien existe-t-il de matrices de B_n dont chaque ligne et chaque colonne comporte exactement un coefficient égal à 1 ?

Démonstration.
Une matrice M de B_n dont chaque ligne et chaque colonne comporte exactement un coefficient égal à 1 est entièrement déterminée par :

× la position du 1 sur la $1^{\text{ère}}$ ligne : n possibilités.
(on peut le placer sur n'importe quelle colonne)

× la position du 1 sur la $2^{\text{ème}}$ ligne : $n-1$ possibilités.
(on peut le placer sur n'importe quelle colonne non déjà choisie)

× la position du 1 sur la $3^{\text{ème}}$ ligne : $n-2$ possibilités.
(on peut le placer sur n'importe quelle colonne non déjà choisie)

× ...

× la position du 1 sur la $n^{\text{ème}}$ ligne : 1 possibilité.
(on peut le placer sur n'importe quelle colonne non déjà choisie)

Il existe donc $n\ (n-1)\ (n-2) \cdots 1 = n!$ telles matrices.

L'ensemble des matrices de B_n dont chaque ligne et chaque colonne comporte exactement un coefficient égal à 1 comporte exactement $n!$ éléments.

Commentaire

- Une matrice de B_n dont chaque ligne et chaque colonne comporte exactement un coefficient égal à 1 peut être représentée par le n-uplet $(c_1, \dots, c_n)$ où $c_i \in [\![1, n]\!]$ est le numéro de colonne où se situe le coefficient égal à 1 de la ligne i.
- Dans cette question, on demande donc de dénombrer l'ensemble des n-uplets d'éléments distincts (il n'y a qu'un 1 sur chaque ligne) de $[\![1, n]\!]$. Autrement dit, on s'intéresse aux n-arrangements de $[\![1, n]\!]$ ou encore aux permutations de $[\![1, n]\!]$.
Il y en a exactement $n!$

□

4. Dans cette question, n est un entier supérieur ou égal à 2.
Soit E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E. On note :
– id l'endomorphisme identité de E ;
– F le noyau de l'endomorphisme $(u + \mathrm{id})$ et G le noyau de l'endomorphisme $(u - \mathrm{id})$;
– p la dimension de F et q la dimension de G.
On suppose que $u \circ u = \mathrm{id}$.

a) Justifier que l'image de $(u - \mathrm{id})$ est incluse dans F.

Démonstration.
Il s'agit de montrer que $\mathrm{Im}(u - \mathrm{id}) \subset \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}) = F$.

Soit $y \in \mathrm{Im}(u - \mathrm{id})$. Par définition, il existe $x \in E$ tel que $y = (u - \mathrm{id})(x) = u(x) - x$.
Démontrons que $y \in \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})$.

$$\begin{array}{rcll} (u + \mathrm{id})(y) & = & u(y) + y & \\ & = & u(u(x) - x) + (u(x) - x) & \textit{(par définition de } y\textit{)} \\ & = & u(u(x)) - \cancel{u(x)} + \cancel{u(x)} - x & \textit{(par linéarité de } u\textit{)} \\ & = & \cancel{x} - \cancel{x} \ = \ 0_E & \textit{(car } u \circ u = \mathrm{id}\textit{)} \end{array}$$

Donc $y \in \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}) = F$.

$$\boxed{\mathrm{Im}(u - \mathrm{id}) \subset F}$$

□

b) En déduire l'inégalité : $p + q \geqslant n$.

Démonstration.
- D'après la question ***4.a)***, $\mathrm{Im}(u - \mathrm{id}) \subset \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \dim(\mathrm{Im}(u - \mathrm{id})) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})) = p.}$$

- D'après le théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc} \dim(E) & = & \dim(\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})) & + & \dim(\mathrm{Im}(u - \mathrm{id})) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \\ n & & q & & \end{array}$$

$$\boxed{\dim(\mathrm{Im}(u - \mathrm{id})) = n - q}$$

- En combinant ces deux résultats, on obtient : $n - q \leqslant p$.

$$\boxed{\text{Ainsi, on a bien : } p + q \geqslant n.}$$

□

On suppose désormais que $1 \leqslant p < q$.
Soit $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ une base de F et $(g_1, g_2, \ldots, g_q)$ une base de G.

c) Justifier que $(f_1, f_2, \ldots, f_p,\ g_1, g_2, \ldots, g_q)$ est une base de E.

Démonstration.
- On suppose ici que $\dim(\mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})) = p \geqslant 1$. En particulier : $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}) \neq \{0_E\}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } -1 \text{ est valeur propre de } u \text{ et } F = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}) = E_{-1}(u).}$$

- De même, $\dim(\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})) = q > 1$. En particulier : $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}) \neq \{0_E\}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } 1 \text{ est valeur propre de } u \text{ et } G = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}) = E_1(u).}$$

- On a alors :
  - × la famille $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ est une base de $E_{-1}(u)$.
    En particulier, c'est donc une famille libre de $E_{-1}(u)$.
  - × la famille $(g_1, g_2, \ldots, g_q)$ est une base de $E_1(u)$.
    En particulier, c'est donc une famille libre de $E_1(u)$.

  La famille $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_p,\ g_1, g_2, \ldots, g_q)$ est la concaténation de deux familles libres de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{F} \text{ est une famille libre de } E.}$$

Commentaire

L'énoncé demande de « Justifier » que $\mathcal{F}$ est une base de G. Cette terminologie est souvent associée à des démonstrations courtes. Ici, il est aussi possible de démontrer que $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_p, g_1, g_2, \ldots, g_q)$ est libre en revenant à la définition. Ce raisonnement est tout aussi rigoureux mais plus long à mettre en place, ce qui provoque une perte de temps pénalisante pour la suite. Détaillons cette rédaction.

- Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_q) \in \mathbb{R}^{p+q}$. On suppose :

$$\lambda_1 \cdot f_1 \quad + \quad \ldots \quad + \quad \lambda_p \cdot f_p \quad + \quad \mu_1 \cdot g_1 \quad + \quad \ldots \quad + \quad \mu_q \cdot g_q \quad = \quad 0_E \quad (*)$$

  En appliquant l'endomorphisme u de part et d'autre, on obtient par linéarité :

$$\begin{array}{lrcl} & u\big(\lambda_1 \cdot f_1 + \ldots + \lambda_p \cdot f_p + \mu_1 \cdot g_1 + \ldots + \mu_q \cdot g_q\big) & = & u(0_E) \\ \text{puis} & \lambda_1 \cdot u(f_1) + \ldots + \lambda_p \cdot u(f_p) + \mu_1 \cdot u(g_1) + \ldots + \mu_q \cdot u(g_q) & = & 0_E \\ \text{et} & -\lambda_1 \cdot f_1 - \ldots - \lambda_p \cdot f_p + \mu_1 \cdot g_1 + \ldots + \mu_q \cdot g_q & = & 0_E \quad (**) \end{array}$$

  En effet :
  - × pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $f_i \in F = \text{Ker}(u + \text{id})$. Et ainsi :

$$\begin{array}{rcl} (u + \text{id})(f_i) & = & 0_E \\ \shortparallel & & \\ u(f_i) + \text{id}(f_i) & = & u(f_i) + f_i \end{array}$$

    On en déduit : $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $u(f_i) = -f_i$.
  - × pour tout $j \in [\![1, q]\!]$, $g_j \in G = \text{Ker}(u - \text{id})$. Et ainsi : $(u - \text{id})(g_j) = 0_E$.
    On obtient de même : $\forall j \in [\![1, q]\!]$, $u(g_j) = g_j$.
- En sommant membre à membre les égalités $(*)$ et $(**)$, on obtient :

$$\mu_1 \cdot g_1 + \ldots + \mu_q \cdot g_q = 0_E$$

  Or $(g_1, \ldots, g_q)$ est une base de G. En particulier, c'est une famille libre.
  On en déduit : $\mu_1 = \ldots = \mu_q = 0_{\mathbb{R}}$.
- On reporte dans $(*)$ et on obtient : $\lambda_1 \cdot f_1 + \ldots + \lambda_p \cdot f_p = 0_E$.
  Or $(f_1, \ldots, f_q)$ est une base de F. En particulier, c'est une famille libre.
  On en déduit : $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0_{\mathbb{R}}$.
- Finalement : $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = \mu_1 = \ldots = \mu_q = 0$.

$$\boxed{\text{La famille } (f_1, f_2, \ldots, f_p, g_1, g_2, \ldots, g_q) \text{ est libre.}}$$

- La famille $\mathcal{F}$ est une famille libre de E, espace vectoriel de dimension n. Ainsi :

$$\text{Card}(\mathcal{F}) = p + q \leqslant n = \dim(E)$$

Or, d'après la question précédente : $p + q \geqslant n$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } p + q = n.}$$

- En résumé :
  - × la famille $\mathcal{F}$ est libre.
  - × $\text{Card}(\mathcal{F}) = n = \dim(E)$.

$$\boxed{\text{La famille } \mathcal{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_p, g_1, g_2, \ldots, g_q) \text{ est donc une base de } E.}$$ □

d) Calculer $u(g_1 - f_1)$ et $u(g_1 + f_1)$.

Démonstration.
- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} u(g_1 - f_1) & = & u(g_1) - u(f_1) \quad \textit{(par linéarité de } u\textit{)} \\ & = & 1 \cdot g_1 - (-1) \cdot f_1 \quad \textit{(car } g_1 \in E_1(u) \textit{ et } f_1 \in E_{-1}(u)\textit{)} \\ & = & g_1 + f_1 \end{array}$$

- On démontre de même : $u(g_1 + f_1) = u(g_1) + u(f_1) = g_1 - f_1$.

$$\boxed{u(g_1 - f_1) = g_1 + f_1 \quad \text{et} \quad u(g_1 + f_1) = g_1 - f_1}$$ □

e) Trouver une base de E dans laquelle la matrice de u appartient à B_n.

Démonstration.
On considère $\mathscr{B}'$ la famille :

$$\mathscr{B}' = (g_1 - f_1,\ g_1 + f_1,\ g_2 - f_2,\ g_2 + f_2, \ldots,\ g_p - f_p,\ g_p + f_p,\ g_{p+1},\ g_{p+2}, \ldots,\ g_q)$$

(qui est bien définie car $p < q$)

- Montrons tout d'abord que $\mathscr{B}'$ est une famille libre.
Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_p, \gamma_{p+1}, \ldots, \gamma_q) \in \mathbb{R}^n$. Supposons :

$$\lambda_1 \cdot (g_1 - f_1) + \mu_1 \cdot (g_1 + f_1) + \ldots + \lambda_p \cdot (g_p - f_p) + \mu_p \cdot (g_p + f_p) + \gamma_{p+1} \cdot g_{p+1} + \ldots + \gamma_q \cdot g_q = 0_E$$

En réordonnant :

$$(\mu_1 - \lambda_1) \cdot f_1 + \ldots + (\mu_p - \lambda_p) \cdot f_p + (\mu_1 + \lambda_1) \cdot g_1 + \ldots + (\mu_p + \lambda_p) \cdot g_p + \gamma_{p+1} \cdot g_{p+1} + \ldots + \gamma_q \cdot g_q = 0_E$$

Or, d'après la question ***4.c)***, $(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ est une base de E.
C'est donc une famille libre. Ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i \in [\![1, p]\!], \quad \mu_i - \lambda_i = 0 \\ \forall i \in [\![1, p]\!], \quad \mu_i + \lambda_i = 0 \\ \forall j \in [\![p+1, q]\!], \quad \gamma_j = 0 \end{array} \right.$$

Or, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} \mu_i & - & \lambda_i & = & 0 \\ \mu_i & + & \lambda_i & = & 0 \end{array} \right. \underset{}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff}} \left\{ \begin{array}{rcrcl} \mu_i & - & \lambda_i & = & 0 \\ & & 2\,\lambda_i & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \mu_i & = & 0 \\ \lambda_i & = & 0 \end{array} \right.$$

(par remontées successives)

Ainsi : $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = \mu_1 = \ldots = \mu_p = \gamma_{p+1} = \ldots = \gamma_q = 0$.

$$\boxed{\text{La famille } \mathscr{B}' \text{ est libre.}}$$

- On a alors :
  - × la famille $\mathscr{B}'$ est libre.
  - × $\mathrm{Card}(\mathscr{B}') = n = \dim(E)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathscr{B}' \text{ est une base de } E.}$$

- Déterminons la matrice de u dans cette base.
  Pour plus de lisibilité, notons : $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $r_i = g_i - f_i$ et $s_i = g_i + f_i$.
  On démontre, par le même raisonnement que dans la question précédente :

$$\forall i \in [\![1,p]\!],\ u(g_i - f_i) = g_i + f_i \quad \text{et} \quad u(g_i + f_i) = g_i - f_i$$

La base $\mathscr{B}'$ s'écrit alors : $\mathscr{B}' = (r_1,\ s_1,\ \ldots,\ r_i,\ s_i, \ldots,\ r_p,\ s_p,\ g_{p+1},\ \ldots,\ g_q)$ et :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall i \in [\![1,p]\!], & u(r_i) = s_i \\ \forall i \in [\![1,p]\!], & u(s_i) = r_i \\ \forall j \in [\![p+1,q]\!], & u(g_j) = g_j \end{array} \right.$$

On en déduit la matrice représentative de u dans la base $\mathscr{B}'$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} u(r_1) & u(s_1) & \ldots & u(r_i) & u(s_i) & \ldots & u(r_p) & u(s_p) & u(g_{p+1}) & \ldots & u(g_q) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccccccc} 0 & 1 & & & & & & & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & & & & & & \vdots & & \vdots \\ & & \ddots & & & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & 0 & 1 & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & 1 & 0 & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & \ddots & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & 0 & 1 & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & & \\ \vdots & & & & & & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & & 1 \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} \\ r_1 \\ s_1 \\ \vdots \\ r_i \\ s_i \\ \vdots \\ r_p \\ s_p \\ g_{p+1} \\ \vdots \\ g_q \end{array}$$

$$\boxed{\text{Dans la base } \mathscr{B}' \text{, la matrice de } u \text{ appartient à } B_n.}$$

Commentaire

Cette question est difficile car elle demande de prendre beaucoup d'initiatives.

- Il faut tout d'abord se rendre compte que la base $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ ne convient pas. En effet, comme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall i \in [\![1,p]\!], & u(f_i) = -f_i \\ \forall i \in [\![1,q]\!], & u(g_i) = g_i \end{array} \right.$$

  la matrice représentative de u dans $\mathcal{F}$ contient des -1 (en plus des 0 et des 1).
- L'idée est alors de créer une base sur laquelle u a pour effet d'échanger les éléments de cette base. Cette idée est guidée par la question précédente dans laquelle on démontre : $u(g_1 - f_1) = g_1 + f_1$ et $u(g_1 + f_1) = g_1 - f_1$.

□

Commentaire

Prenons un peu de recul sur le thème développé dans cet exercice.

- Dans cet exercice, on s'intéresse aux endomorphismes involutifs de E, c'est à dire aux applications $s \in \mathscr{L}(E)$ qui vérifient :

$$s \circ s = \mathrm{id}$$

(cette égalité démontre que s est bijectif de réciproque s)
Les cas les plus simples de telles applications sont : $s = \mathrm{id}$ et $s = -\mathrm{id}$.

- Lors de l'étude de s, on considère généralement les espaces vectoriels suivants :
  - × $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id})$: c'est l'ensemble des vecteurs invariants par s.
    En effet, si $x \in F$, alors : $(s - \mathrm{id})(x) = 0$ et donc $s(x) = x$.
  - × $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id})$: c'est l'ensemble des vecteurs changés en leur opposé par s.
    En effet, si $x \in G$, alors : $(s + \mathrm{id})(x) = 0$ et donc $s(x) = -x$.

  (on prend ici les notations classiques - dans l'énoncé, les rôles de F et G sont échangés)

  Dès lors, on comprend pourquoi un endomorphisme involutif $s \in \mathscr{L}(E)$ est appelé **symétrie** par rapport à F parallèlement à G.

- On peut aussi étudier les symétries dans le cadre de la réduction.
On suppose que $F \neq \{0_E\}$ et $G \neq \{0_E\}$. Alors :

$$F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}) = E_1(s) \quad \text{ et } \quad G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}) = E_{-1}(s)$$

On peut démontrer :

$$E \ = \ \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}) \ \oplus \ \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id})$$

Cette égalité signifie que tout vecteur de E s'écrit de manière unique sous la forme d'une somme d'un vecteur de $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id})$ et d'un vecteur de $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id})$.
Autrement dit :

$$\forall x \in E, \exists !(y, z) \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}) \times \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}), \ x = y + z$$

Considérons alors la famille $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_{-1}$ obtenue en concaténant une base $\mathscr{B}_1$ de $E_1(s) = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id})$ et une base $\mathscr{B}_{-1}$ de $E_{-1}(s) = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id})$.
Cette famille est libre par construction.
De plus, elle est génératrice de E par la décomposition précédente $E = F + G$ (tout vecteur de E peut s'écrire comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G).

Finalement $\mathscr{B}$ est une base de vecteurs propres et s s'écrit dans cette base comme matrice diagonale dont la diagonale ne contient que des 1 et des -1.

- La notion de symétrie n'est pas au programme de la voie ECE.
Toutefois, on peut faire l'étude de tels endomorphismes avec des outils au programme.
C'est donc un candidat idéal pour faire un sujet de concours.

- Cette notion est très liée à la notion de **projecteurs** qui ne sont autres que les endomorphismes idempotents de E, c'est à dire les applications $p \in \mathscr{L}(E)$ qui vérifient :

$$p \circ p = p$$

Ceci n'est pas non plus au programme mais revient régulièrement pour les raisons citées au-dessus.

Exercice 2 (`Ecricome 2018 voie S`)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

et on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2 - 6y$$

On pose enfin $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1. Vérifier que $\varphi > 1$ et que les réels φ et $\dfrac{-1}{\varphi}$ sont les solutions de l'équation : $x^2 - x - 1 = 0$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{lrcll} & 5 & \geqslant & 4 & \\ \text{donc} & \sqrt{5} & \geqslant & \sqrt{4} = 2 & \textit{(par croissance de la fonction } \sqrt{\cdot} \textit{ sur } [0,+\infty[\textit{)} \\ \text{et} & \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & \geqslant & \dfrac{1+2}{2} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \varphi \geqslant \frac{3}{2} > 1.}$$

- Déterminons les racines du polynôme $P(X) = X^2 - X - 1$.
  Ce polynôme admet pour discriminant : $\Delta = (-1)^2 - 4\,(-1) = 1 + 4 = 5 > 0$.
  Ainsi, P admet deux racines distinctes :

$$r_+ = \frac{-(-1)+\sqrt{5}}{2} = \varphi \qquad \text{et} \qquad r_- = \frac{-(-1)-\sqrt{5}}{2}$$

Enfin :

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{(1-\sqrt{5})\,(1+\sqrt{5})}{2\,(1+\sqrt{5})} = \frac{(1-5)}{2\,(1+\sqrt{5})} = -\frac{2}{(1+\sqrt{5})} = -\frac{1}{\varphi}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, l'équation } x^2 - x - 1 = 0 \text{ admet deux solutions : } \varphi \text{ et } -\frac{1}{\varphi}.}$$

Commentaire

- On pouvait aussi démontrer ce résultat par calcul. Plus précisément :

$$\begin{aligned} \varphi^2 - \varphi - 1 &= \varphi\,(\varphi - 1) - 1 \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1\right) - 1 \\ &= \frac{1}{2}\,(1+\sqrt{5})\ \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}-2) - 1 \\ &= \frac{1}{4}\,(\sqrt{5}+1)\,(\sqrt{5}-1) - 1 \\ &= \frac{1}{4}\,(5-1) - 1 \ = \ 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \varphi \text{ est solution de l'équation } x^2 - x - 1 = 0.}$$

Commentaire

- Et :

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^2 - \left(-\frac{1}{\varphi}\right) - 1 &= \frac{1}{\varphi^2} + \frac{1}{\varphi} - 1 \\ &= \frac{1}{\varphi^2}\,\left(1 + \varphi - \varphi^2\right) \\ &= -\frac{1}{\varphi^2}\,\left(\varphi^2 - \varphi - 1\right) \ = \ 0 \qquad \textit{(car } \varphi \textit{ est solution de } x^2 - x - 1 = 0\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } -\frac{1}{\varphi} \text{ est solution de } x^2 - x - 1 = 0.}$$

□

2. a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{La fonction } f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^2 \text{ en tant que fonction polynomiale.}}$$

□

b) Montrer que les seuls points critiques de f sont $(\varphi, \varphi+1)$ et $\left(-\dfrac{1}{\varphi}, \dfrac{1}{\varphi+1}\right)$.

Démonstration.

- La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Elle admet donc des dérivées partielles à l'ordre 1. De plus, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\partial_1(f)(x,y) = 6x^2 - 6y \quad \text{et} \quad \partial_2(f)(x,y) = -6x + 6y - 6$$

- Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
  Le couple (x,y) est un point critique de f si et seulement si $\nabla(f)(x,y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$. Or :

$$\begin{array}{rcll}
\nabla(f)(x,y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} \partial_1(f)(x,y) = 0 \\ \partial_2(f)(x,y) = 0 \end{array}\right. & \\
& \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} 6x^2 - 6y = 0 \\ -6x + 6y - 6 = 0 \end{array}\right. & \\
& \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} x^2 - y = 0 \\ y = x + 1 \end{array}\right. & \\
& \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} x^2 - x - 1 = 0 \\ y = x + 1 \end{array}\right. & \begin{array}{l}\textit{(en remplaçant } y \textit{ par } x+1 \\ \textit{dans la première équation)}\end{array} \\
& \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} x = \varphi \ \texttt{OU} \ x = -\frac{1}{\varphi} \\ y = x + 1 \end{array}\right. & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{1.}}\textit{)}
\end{array}$$

$\boxed{\text{On en déduit que } f \text{ admet pour points critiques : } (\varphi, \varphi+1) \text{ et } (-\frac{1}{\varphi}, -\frac{1}{\varphi}+1).}$

- Remarquons enfin :

$$-\frac{1}{\varphi} + 1 \;=\; \frac{\varphi - 1}{\varphi} \;=\; \frac{(\varphi-1)(\varphi+1)}{\varphi(\varphi+1)} \;=\; \frac{\varphi^2 - 1}{\varphi(\varphi+1)} \;=\; \frac{\varphi}{\varphi(\varphi+1)}$$

$\boxed{\text{On en déduit que } f \text{ admet pour points critiques : } (\varphi, \varphi+1) \text{ et } (-\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi+1}).}$

Commentaire

- La difficulté de cette question réside dans le fait qu'il n'existe pas de méthode générale pour résoudre l'équation $\nabla(f)(x,y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$.
  On est donc confronté à une question bien plus complexe qu'une résolution de système d'équations linéaires (que l'on résout aisément à l'aide de la méthode du pivot de Gauss).
- Lors de la recherche de points critiques, on doit faire appel à des méthodes ad hoc.
  Il est par exemple assez fréquent de faire apparaître une équation du type :

$$\psi(x) = \psi(y)$$

  où $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction bijective. Cela permet alors de conclure : $x = y$.
- Ici, c'est plus simple puisque y s'exprime comme transformée affine de x ($y = x+1$).
  En remplaçant y par $x+1$ dans la première équation, on obtient une nouvelle équation qui ne dépend plus que d'une variable et qui est donc plus simple de résoudre.

□

c) Étudier la nature des points critiques de f.

Démonstration.

- La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
  Elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 2 sur $\mathbb{R}^2$.
- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
  Tout d'abord :
$$\partial_{11}^2(f)(x, y) \;=\; 12\,x$$
- Ensuite :
$$\partial_{12}^2(f)(x, y) \;=\; -6 \;=\; \partial_{21}^2(f)(x, y)$$
  La dernière égalité est obtenue en vertu du théorème de Schwarz puisque la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'**ouvert** $\mathbb{R}^2$.
- Enfin :
$$\partial_{22}^2(f)(x, y) \;=\; 6$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \partial_{11}^2(f)(x, y) \;=\; 12\,x, \quad \partial_{12}^2(f)(x, y) \;=\; -6 \;=\; \partial_{21}^2(f)(x, y) \\ \text{et } \partial_{22}^2(f)(x, y) \;=\; 6.\end{array}}$$

Commentaire

- Il faut penser à utiliser le théorème de Schwarz dès que la fonction à deux variables considérée est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$.
- Ici, le calcul de $\partial_{12}^2(f)(x, y)$ et $\partial_{21}^2(f)(x, y)$ est aisé. Il faut alors concevoir le résultat du théorème de Schwarz comme une mesure de vérification : en dérivant par rapport à la $1^{\text{ère}}$ variable puis par rapport à la $2^{\text{ème}}$, on doit obtenir le même résultat que dans l'ordre inverse.

- On rappelle que la matrice hessienne de f en un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est :
$$\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_{11}^2(f)(x, y) & \partial_{12}^2(f)(x, y) \\ \partial_{21}^2(f)(x, y) & \partial_{22}^2(f)(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12\,x & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 2\,x & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
- Pour conlure quant à la nature de chaque point critique, on cherche à déterminer le signe des valeurs propres des matrices hessiennes $H_1 = \nabla^2(f)(\varphi, \varphi + 1)$ et $H_2 = \nabla^2(f)(-\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi+1})$.

  Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Rappelons tout d'abord que, pour toute matrice $H \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$:
$$\begin{aligned} \lambda \text{ est une valeur propre de } H \quad &\Leftrightarrow \quad H - \lambda\, I \text{ n'est pas inversible} \\ &\Leftrightarrow \quad \det(H - \lambda\, I) = 0 \end{aligned}$$

- Commençons par l'étude de $H_1 = \begin{pmatrix} 12\,\varphi & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$.

  Pour simplifier les calculs, introduisons $\mu = \frac{\lambda}{6}$:

$$\begin{array}{rcl} \det\Big(H_1 - \lambda\, I\Big) & = & \det\Big(H_1 - 6\,\mu\, I\Big) \\ & = & \det\left(\begin{pmatrix} 12\,\varphi - 6\,\mu & -6 \\ -6 & 6 - 6\,\mu \end{pmatrix}\right) \\ & = & 6\,(2\,\varphi - \mu) \times 6\,(1-\mu) - (-6)^2 \\ & = & 36\,\big(2\,\varphi - (2\,\varphi + 1)\,\mu + \mu^2\big) - 36 \\ & = & 36\,\Big((2\,\varphi - 1) - (2\,\varphi+1)\,\mu + \mu^2\Big) \end{array}$$

  Le polynôme $P(X) = (2\,\varphi - 1) - (2\,\varphi + 1)\,X + X^2$ admet pour discriminant :

$$\begin{array}{rcll} \Delta & = & \big(-(2\,\varphi+1)\big)^2 - 4 \times (2\,\varphi - 1) & \\ & = & (4\,\varphi^2 + 4\,\varphi + 1) - (8\,\varphi - 4) & \\ & = & 4\,\varphi^2 - 4\,\varphi + 5 & \\ & = & 4\,\big(\varphi^2 - \varphi - 1\big) + 9 \;=\; 9 & \textit{(car } \varphi \textit{ est solution de } x^2 - x - 1 = 0\textit{)} \end{array}$$

  Ainsi, P admet deux racines distinctes :

$$\mu_1 = \frac{(2\,\varphi+1) + \sqrt{9}}{2} = \frac{2\,\varphi + 4}{2} = \varphi + 2 \qquad \text{et} \qquad \mu_2 = \frac{(2\,\varphi+1) - \sqrt{9}}{2} = \frac{2\,\varphi - 2}{2} = \varphi - 1$$

Ainsi, $\nabla^2(f)(\varphi, \varphi+1)$ admet pour valeurs propres $\lambda_1 = 6\,\mu_1 = 6\,(\varphi+2) > 0$ et $\lambda_2 = 6\,\mu_2 = 6\,(\varphi - 1) > 0$. La fonction f admet donc un minimum local au point $(\varphi, \varphi+1)$.

- Continuons par l'étude de $H_2 = \begin{pmatrix} 12\,\frac{-1}{\varphi} & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$.

  Pour simplifier les calculs, introduisons $\mu = \frac{\lambda}{6}$:

$$\begin{array}{rcl} \det\Big(H_2 - \lambda\, I\Big) & = & \det\Big(H_2 - 6\,\mu\, I\Big) \\ & = & \det\left(\begin{pmatrix} \frac{-12}{\varphi} - 6\,\mu & -6 \\ -6 & 6 - 6\,\mu \end{pmatrix}\right) \\ & = & 6\,(\frac{-2}{\varphi} - \mu) \times 6\,(1-\mu) - (-6)^2 \\ & = & 36\,\big(\frac{-2}{\varphi} - (\frac{-2}{\varphi} + 1)\,\mu + \mu^2\big) - 36 \\ & = & 36\,\Big((\frac{-2}{\varphi} - 1) - (\frac{-2}{\varphi}+1)\,\mu + \mu^2\Big) \end{array}$$

  Le polynôme $Q(X) = (\frac{-2}{\varphi} - 1) - (\frac{-2}{\varphi} + 1)\,X + X^2$ admet pour discriminant :

$$\begin{array}{rcll} \Delta & = & \big(-(\frac{-2}{\varphi}+1)\big)^2 - 4 \times (\frac{-2}{\varphi} - 1) & \\ & = & (\frac{4}{\varphi^2} - 4\,\frac{1}{\varphi} + 1) + (8\,\frac{1}{\varphi} + 4) & \\ & = & 4\,\frac{1}{\varphi^2} + 4\,\frac{1}{\varphi} + 5 & \\ & = & \dfrac{4}{\varphi^2}\,\big(1 + \varphi\big) + 5 & \\ & = & \dfrac{4}{\varphi^2}\,\big(\varphi^2\big) + 5 \;=\; 9 & \textit{(car } \varphi \textit{ est solution de } x^2 - x - 1 = 0\textit{)} \end{array}$$

Ainsi, Q admet deux racines distinctes :

$$\mu_1 = \frac{(\frac{-2}{\varphi}+1)+\sqrt{9}}{2} = \frac{\frac{-2}{\varphi}+4}{2} = \frac{-1}{\varphi}+2 \qquad \text{et} \qquad \mu_2 = \frac{(\frac{-2}{\varphi}+1)-\sqrt{9}}{2} = \frac{\frac{-2}{\varphi}-2}{2} = \frac{-1}{\varphi}-1$$

Remarquons enfin :

× comme $\varphi > 1$

alors $-\frac{1}{\varphi} > -1$ *(par stricte croissance de l'application $x \mapsto \frac{-1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$)*

ainsi $-\frac{1}{\varphi} + 2 > 1$

× comme $\varphi > 0$ alors $-\left(\frac{1}{\varphi}+1\right) < 0$.

> Ainsi, $\nabla^2(f)(-\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi+1})$ admet pour valeurs propres $\lambda_1 = 6\,\mu_1 = 6\,(\frac{-1}{\varphi}+2) > 0$ et $\lambda_2 = 6\,\mu_2 = 6\,(-\frac{1}{\varphi}-1) < 0$. La fonction f admet donc un point selle au point $(\frac{-1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi+1})$.

Commentaire

L'étude de H_2 est analogue à celle faite pour H_1. C'est même une redite. Il aurait certainement été préférable de déterminer les valeurs propres de toute matrice :

$$H_x = \begin{pmatrix} 12x & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. On aurait alors trouvé : $\mu_1 = x+2$ et $\mu_2 = x-1$. Cela permet de conclure quant aux valeurs propres de H_1 et H_2 en considérant respectivement $x = \varphi$ et $x = \frac{-1}{\varphi}$. □

3. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $u_n\,u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_n\,u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.

▸ **Initialisation**

- D'une part : $(-1)^{0+1} = (-1)^1 = -1$.
- D'autre part : $u_0\,u_{0+2} - u_{0+1}^2 = u_0\,u_2 - u_1^2 = 0 \times (0+1) - 1^2 = -1$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1}\,u_{n+3} - u_{n+2}^2 = (-1)^{n+2}$).

$$\begin{aligned}
u_{n+1}\,u_{n+3} - u_{n+2}^2 &= u_{n+1}\,(u_{n+1}+u_{n+2}) - u_{n+2}^2 \\
&= u_{n+1}^2 + u_{n+1}\,u_{n+2} - u_{n+2}^2 \\
&= \big(u_n\,u_{n+2} - (-1)^{n+1}\big) + u_{n+1}\,u_{n+2} - u_{n+2}^2 && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= -(-1)^{n+1} + u_n\,u_{n+2} + u_{n+1}\,u_{n+2} - u_{n+2}^2 && \textit{(en réordonnant)} \\
&= -(-1)^{n+1} + (u_n + u_{n+1})\,u_{n+2} - u_{n+2}^2 \\
&= -(-1)^{n+1} + u_{n+2}\,u_{n+2} - u_{n+2}^2 && \textit{(par définition de la suite } (u_n))\\
&= -(-1)^{n+1} = (-1)^{n+2}
\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

> Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$.

□

4. a) Recopier et compléter la fonction **Python** suivante afin que, prenant en argument un entier $n \geqslant 2$, elle calcule et renvoie la valeur du terme u_n de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

```
1  def suite(n) :
2      v = 0
3      w = 1
4      for k in range(2, n+1) :
5          ..........
6          ..........
7          ..........
8      u = ..........
9      return u
```

Démonstration.

```
1  def suite(n) :
2      v = 0
3      w = 1
4      for k in range(2, n+1) :
5          aux = v + w
6          v = w
7          w = aux
8      u = w
9      return u
```

Détaillons les éléments de ce programme.

- **Début du programme**
  Les premières lignes servent à initialiser les variables `v` et `w` destinées à recevoir respectivement les valeurs successives des éléments u_n et u_{n+1}.
  × intialement, `v` est affectée à la valeur u_0.

```
2      v = 0
```

  × et `w` est affectée à la valeur u_1.

```
3      w = 1
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 4 à 7 consistent à mettre à jour les variables `v` et `w`.
  Pour cela, on utilise une structure itérative (boucle for) :

```
4      for k in range(2, n+1) :
5          aux = v + w
6          v = w
7          w = aux
```

Pour ce faire, on a introduit une variable auxiliaire `aux`. Détaillons le principe de cette boucle :

× avant le 1$^{\text{er}}$ tour de boucle :

`v` contient u_0 et `w` contient u_1

lors du 1$^{\text{er}}$ tour de boucle (`k` contient 2) :

`aux = v + w`	(`aux` contient alors $u_0 + u_1 = u_2$, valeur obtenue en sommant les valeurs actuelles de `v` et `w`)
`v = w`	(`v` contient alors u_1, dernière valeur en date de `w`)
`w = aux`	(`w` contient alors u_2, dernière valeur en date de `w`)

Commentaire

Si on avait réalisé en ligne 7 l'affectation `w = v + w` alors, on aurait affecté à la variable `w` la somme de u_1 (dernière valeur en date de `v`) et u_1 (dernière valeur en date de `w`).

× avant le 2$^{\text{ème}}$ tour de boucle, d'après ce qui précède :

`v` contient u_1 et `w` contient u_2

lors du 2$^{\text{ème}}$ tour de boucle (`k` contient 3) :

`aux = v + w`	(`aux` contient alors $u_1 + u_2 = u_3$, valeur obtenue en sommant les valeurs actuelles de `v` et `w`)
`v = w`	(`v` contient alors u_2, dernière valeur en date de `w`)
`w = aux`	(`w` contient alors u_3, dernière valeur en date de `w`)

× ...

× avant le $(n-1)^{\text{ème}}$ tour de boucle :

`v` contient u_{n-2} et `w` contient u_{n-1}

lors du $(n-1)^{\text{ème}}$ tour de boucle (`k` contient n) :

`aux = v + w`	(`aux` contient alors $u_{n-2} + u_{n-1} = u_n$, valeur obtenue en sommant les valeurs actuelles de `v` et `w`)
`v = w`	(`v` contient alors u_{n-1}, dernière valeur en date de `w`)
`w = aux`	(`w` contient alors u_n, dernière valeur en date de `w`)

- **Fin du programme**
  À l'issue de cette boucle, la variable `w` contient la quantité u_n. Il n'y a plus qu'à affecter à `u`, variable de retour de la fonction, la valeur contenue dans `w`.

```
8    u = w
```

Commentaire

- Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, écrire correctement la fonction **Python** démontre la bonne compréhension et permet certainement d'obtenir tous les points alloués.
- On a démontré dans cette question que si, avant le $i^{\text{ème}}$ tour de boucle :

  `aux` contient u_i, `v` contient u_{i-1} et `w` contient u_i

  alors, à l'issue de ce tour de boucle :

  `aux` contient u_{i+1}, `v` contient u_i et `w` contient u_{i+1}

  Cette propriété est ce qu'on appelle un **invariant de boucle**. Elle permet d'assurer la correction de la fonction implémentée et notamment le fait qu'à l'issue du dernier tour de boucle la variable `w` contient u_n.
- Il est à noter que si on teste la fonction avec une valeur de `n` strictement inférieure à 2, alors on n'entre pas dans la boucle (l'instruction `2:n` crée une matrice ligne vide). Dans ce cas, la variable `w` n'est pas mise à jour et la variable `u` contient à la fin du programme u_1, soit la valeur initialement affectée à `w`. Ainsi, la fonction renvoie la bonne valeur aussi lorsque la variable `n` prend la valeur 1.
- Pour le calcul informatique du $n^{\text{ème}}$ terme d'une suite (z_n) récurrente d'ordre 1 (dont chaque terme dépend uniquement du précédent), il suffit d'introduire une variable `u` et de mettre à jour son contenu à l'aide d'une boucle. La suite (u_n) de l'énoncé est récurrente d'ordre 2 (chaque terme dépend des deux précédents). Obtenir son $n^{\text{ème}}$ terme nécessite non pas deux mais bien trois variables distinctes (la mise à jour de `v` écrase la valeur précédente de `v` qui est pourtant nécessaire pour définir la nouvelle valeur de `w`. On fait donc appel à une variable auxiliaire `aux` qui permet de stocker en mémoire de l'information.

□

b) Justifier qu'il existe des réels λ et μ, que l'on déterminera, tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda\, \varphi^n + \mu \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n$$

Démonstration.
La suite (u_n) vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
C'est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

- L'équation caractéristique associée à la suite (u_n) est : $x^2 = x + 1$.
  D'après la question cette équation admet deux racines distinctes : φ et $-\frac{1}{\varphi}$.
- On en déduit la formule explicite de (u_n) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda \times \varphi^n + \mu \times \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n$$

  où les valeurs λ et μ sont données par le système :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcrcl} \lambda & + & \mu & = & 0 \qquad \textit{(valeur de } u_0\textit{)} \\ \lambda\,\varphi & - & \dfrac{1}{\varphi}\,\mu & = & 1 \qquad \textit{(valeur de } u_1\textit{)} \end{array} \right.$$

Résolvons-le.

$$(S) \underset{}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - \varphi L_1}{\Longleftrightarrow}} \left\{ \begin{array}{rcrcl} \lambda & + & \mu & = & 0 \\ & - & \left(\dfrac{1}{\varphi} + \varphi\right) \mu & = & 1 \end{array} \right.$$

Remarquons enfin :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi} + \varphi &= \frac{1+\varphi^2}{\varphi} = \frac{2+\varphi}{\varphi} \qquad (\textit{car } \varphi^2 = \varphi + 1) \\ &= \frac{2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \\ &= \frac{4 + (1+\sqrt{5})}{1+\sqrt{5}} = \frac{5+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \\ &= \frac{(5+\sqrt{5})\,(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})\,(1-\sqrt{5})} = \frac{5 - 4\sqrt{5} - 5}{1-5} = \frac{-4\sqrt{5}}{-4} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lambda = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad \mu = -\lambda = -\frac{1}{\sqrt{5}}.}$$

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda \times \varphi^n + \mu \times \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\ \varphi^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\ \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n}$$

□

c) En déduire que la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \geqslant 1}$ converge et déterminer sa limite.

Démonstration.

- D'après la question ***1.*** : $\varphi > 1$. On en déduit :
  - × $\varphi^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$,
  - × $-\dfrac{1}{\varphi} \in \,]-1, 1[$ donc : $\left(-\dfrac{1}{\varphi}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

  En particulier : $\left(-\dfrac{1}{\varphi}\right)^n \underset{n \to +\infty}{=} o(\varphi^n)$.

$$\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{5}}\ \varphi^n}$$

- On en déduit :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\cancel{\frac{1}{\sqrt{5}}}\ \varphi^{n+1}}{\cancel{\frac{1}{\sqrt{5}}}\ \varphi^n} = \varphi \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \varphi$$

$$\boxed{\text{On en conclut que la suite } \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \geqslant 1} \text{ est convergente, de limite } \varphi.}$$

□

5. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{u_k\, u_{k+1}}$.

a) Montrer, sans chercher à calculer de somme, que la série de terme général $\dfrac{1}{u_n\, u_{n+1}}$ converge.

Démonstration.
Remarquons :

× $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{5}{\varphi} \left(\dfrac{1}{\varphi^2}\right)^n \geqslant 0$,

× $\dfrac{1}{u_n\, u_{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}}\,\varphi^n\ \frac{1}{\sqrt{5}}\,\varphi^{n+1}} = \dfrac{5}{\varphi^{2n+1}} = \dfrac{5}{\varphi} \left(\dfrac{1}{\varphi^2}\right)^n$,

× la série $\sum \left(\dfrac{1}{\varphi^2}\right)^n$ est convergente en tant que série géométrique de raison $\dfrac{1}{\varphi^2} \in\,]-1,1[$.

Il en est de même de la série $\sum \dfrac{5}{\varphi} \left(\dfrac{1}{\varphi^2}\right)^n$.

(on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par $\dfrac{5}{\varphi} \neq 0$*)*

Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum \dfrac{1}{u_n\ u_{n+1}}$ est convergente.

Commentaire

L'énoncé est très clair : il s'agit de déterminer la nature d'une série sans effectuer de calcul de somme. Cela ne laisse d'autre choix que de mettre en place un critère de comparaison / équivalence / négligeabilité des séries à termes positifs.

□

b) En déduire que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

Démonstration.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left|\frac{(-1)^n}{u_n\, u_{n+1}}\right| = \frac{|(-1)^n|}{|u_n\, u_{n+1}|} = \frac{1}{|u_n|\,|u_{n+1}|} = \frac{1}{u_n\, u_{n+1}}$$

En effet, par une récurrence immédiate, on peut démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.

- On en déduit, d'après la question prédente, que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{u_n\, u_{n+1}}$ est absolument convergente.

On en déduit que la suite (S_n) des sommes partielles associée à cette série est convergente.

Commentaire

Il est à noter que l'on peut résoudre cette question sans avoir traité la précédente.

□

c) En utilisant le résultat de la question 3, montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_{n+1} - S_n \ = \ \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{u_k\, u_{k+1}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{u_k\, u_{k+1}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1}\, u_{n+2}} \\ &= \frac{u_n\, u_{n+2} - u_{n+1}^2}{u_{n+1}\, u_{n+2}} \\ &= \frac{u_n\, \cancel{u_{n+2}}}{u_{n+1}\, \cancel{u_{n+2}}} - \frac{u_{n+1}^{\cancel{2}}}{\cancel{u_{n+1}}\, u_{n+2}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_{n+1} - S_n \ = \ \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}}$$

□

d) Montrer : $\varphi = 1 - \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{u_k\, u_{k+1}}$.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_{n+1} - S_n \ = \ \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}$$

- Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En sommant ces inégalités pour n variant entre 1 et N, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} \sum\limits_{n=1}^{N} (S_{n+1} - S_n) & = & \sum\limits_{n=1}^{N} \left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}} - \dfrac{u_{n+1}}{u_{n+2}} \right) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ S_{N+1} - S_1 & & \dfrac{u_1}{u_2} - \dfrac{u_{N+1}}{u_{N+2}} \end{array} \qquad \textit{(par télescopage)}$$

- Or :
  - × $u_1 = 1$ et $u_2 = u_1 + u_0 = 1 + 0 = 1$,
  - × $S_1 = \sum\limits_{k=1}^{1} \dfrac{(-1)^k}{u_k\, u_{k+1}} = \dfrac{(-1)^1}{u_1\, u_2} = -\dfrac{1}{1} = -1$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall N \in \mathbb{N}^*,\ S_{N+1} = S_1 + \frac{u_1}{u_2} - \frac{u_{N+1}}{u_{N+2}} = -\frac{u_{N+1}}{u_{N+2}}.}$$

- Par ailleurs :
  - × $\dfrac{u_{N+1}}{u_{N+2}} = \dfrac{1}{\frac{u_{N+2}}{u_{N+1}}} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\varphi}$ *(d'après la question **4.c)**)*
  - × d'après la question ***5.b)***, la suite (S_n) est convergente, de limite : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{u_k\, u_{k+1}}$.

- Finalement, par passage à la limite dans l'égalité précédente, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{u_k\, u_{k+1}} = -\frac{1}{\varphi}$$

  On remarque enfin que comme $\varphi^2 = \varphi + 1$ alors $\varphi \; = \; 1 + \dfrac{1}{\varphi}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{u_k\, u_{k+1}} = -\frac{1}{\varphi} = -(\varphi - 1) = 1 - \varphi.}$$

□

Problème (`Ecricome 2018 voie S`)

Toutes les variables aléatoires dans ce problème sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Partie 1 – Variables vérifiant une relation de Panjer

On dit qu'une variable aléatoire N, à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifie une relation de Panjer s'il existe un réel $a < 1$ et un réel b tels que :

$$\mathbb{P}([N=0]) \neq 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([N=k]) = \left(a + \frac{b}{k}\right) \mathbb{P}([N=k-1])$$

1. On suppose **dans cette question** que $a = 0$, et que b est un réel strictement positif.

a) Montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}([N=k]) = \frac{b^k}{k!}\, \mathbb{P}([N=0])$$

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(k)$ où $\mathcal{P}(k)$: $\mathbb{P}([N=k]) = \dfrac{b^k}{k!}\, \mathbb{P}([N=0])$.

▸ **Initialisation** :

$$\frac{b^0}{0!}\, \mathbb{P}([N=0]) \;=\; \frac{1}{1}\, \mathbb{P}([N=0]) \;=\; \mathbb{P}([N=0])$$

D'où $\mathcal{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(k)$ et démontrons $\mathcal{P}(k+1)$ (*i.e.* $\mathbb{P}([N=k+1]) = \dfrac{b^{k+1}}{(k+1)!}\, \mathbb{P}([N=0])$).

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([N=k+1]) & = & \left(0 + \dfrac{b}{k+1}\right) \mathbb{P}([N=k]) & \textit{(car } N \textit{ vérifie une relation de Panjer avec } a = 0\textit{)} \\ & = & \dfrac{b}{k+1} \times \dfrac{b^k}{k!}\, \mathbb{P}([N=0]) & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & \dfrac{b^{k+1}}{(k+1)!}\, \mathbb{P}([N=0]) & \end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(k+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([N=k]) = \frac{b^k}{k!}\, \mathbb{P}([N=0]).}$$

□

b) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N=k])$. En déduire que N suit une loi de Poisson de paramètre b.
Préciser son espérance et sa variance.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([N=k]) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{b^k}{k!}\, \mathbb{P}([N=0]) & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & \mathbb{P}([N=0]) \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{b^k}{k!} & \end{array}$$

Or la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{b^n}{n!}$ est la série exponentielle de paramètre b. Elle est donc convergente. De plus :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{b^k}{k!} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b^k}{k!} = \mathrm{e}^b$$

$$\boxed{\text{On obtient : } \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N=k]) \ = \ \mathbb{P}([N=0])\ \mathrm{e}^b.}$$

- D'après l'énoncé, la v.a.r. N est à valeurs dans $\mathbb{N}$. On en déduit que la famille $\big([N=k]\big)_{k \in \mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements. On en déduit :

$$\begin{array}{ll} & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N=k]) = 1 \\ \text{donc} & \mathbb{P}([N=0])\,\mathrm{e}^b = 1 \\ \text{d'où} & \mathbb{P}([N=0]) = \mathrm{e}^{-b} \end{array}$$

- Ainsi :
  × $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$ (d'après l'énoncé),
  × $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([N=k]) = \dfrac{b^k}{k!}\ \mathrm{e}^{-b}$ (d'après la question précédente).

$$\boxed{\text{On en déduit : } N \hookrightarrow \mathcal{P}(b).}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{E}(N) = b \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(N) = b.}$$

□

2. On suppose **dans cette question** que $a < 0$ et que $b = -2a$.

a) Montrer :

$$\forall k \geqslant 2, \quad \mathbb{P}([N=k]) = 0$$

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall k \geqslant 2$, $\mathcal{P}(k)$ où $\mathcal{P}(k)$: $\mathbb{P}([N=k]) = 0$.

▶ **Initialisation**

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([N=2]) & = & \left(a + \dfrac{-\cancel{2}\,a}{\cancel{2}}\right) \mathbb{P}([N=1]) & \textit{(car N vérifie une relation de Panjer de paramètres a et $b=-2a$)} \\ & = & 0 \times \mathbb{P}([N=1]) & \\ & = & 0 & \end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(2)$.

▶ **Hérédité** : soit $k \geqslant 2$.
Supposons $\mathcal{P}(k)$ et démontrons $\mathcal{P}(k+1)$ (*i.e.* $\mathbb{P}([N=k+1]) = 0$).

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([N=k+1]) & = & \left(a + \dfrac{-2a}{k+1}\right) \mathbb{P}([N=k]) & \\ & = & \left(a - \dfrac{2a}{k+1}\right) \times 0 & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & 0 & \end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(k+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall k \geqslant 2,\ \mathbb{P}([N=k]) = 0.}$$

□

b) En déduire que N suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre en fonction de a.

Démonstration.

- On sait déjà :
  - × $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$,
  - × $\forall k \geqslant 2$, $\mathbb{P}([N = k]) = 0$.

  On en déduit : $N \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, où : $p = \mathbb{P}([N = 1])$.

Commentaire

- Dans le cours, il est précisé qu'une v.a.r. X qui suit une loi de Bernoulli (de paramètre p) admet pour ensemble image $\{0, 1\}$. Ici, N a pour ensemble image $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$ mais prend les valeurs $k \in [\![2, +\infty[\![$ avec probabilité nulle. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}([X = x]) = \mathbb{P}([N = x])$$

(et ces probabilités sont nulles si $x \in \mathbb{N}^*$)

  On considère alors que les v.a.r. discrètes X et N sont toutes deux de même loi $\mathcal{B}(p)$.

- Cette propriété se généralise comme suit.
  Soient X et Y deux v.a.r. **discrètes**. Alors :

$$X \text{ et } Y \text{ ont même loi } \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}([X = x]) = \mathbb{P}([Y = x])$$

- On insiste sur le fait que la propriété précédente n'est vérifiée que pour les v.a.r. discrètes.
  Rappelons que si X est une v.a.r. à densité alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathbb{P}\big([X = x]\big) = 0$.

- Il reste à déterminer $\mathbb{P}([N = 1])$. Or :
  - × d'une part : $\mathbb{P}([N = 1]) \ = \ \left(a - \dfrac{2a}{1}\right) \mathbb{P}([N = 0]) \ = \ -a\mathbb{P}([N = 0])$,
  - × d'autre part : $\mathbb{P}([N = 1]) = 1 - \mathbb{P}([N = 0])$.

  Or :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} \mathbb{P}([N = 0]) & + & \mathbb{P}([N = 1]) & = & 1 \\ a\,\mathbb{P}([N = 0]) & + & \mathbb{P}([N = 1]) & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - a\,L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcr} \mathbb{P}([N = 0]) & + & \mathbb{P}([N = 1]) & = & 1 \\ & & (1 - a)\,\mathbb{P}([N = 1]) & = & -a \end{array} \right.$$

  Ainsi, comme $a \neq 1$: $\mathbb{P}([N = 1]) = -\dfrac{a}{1 - a}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(-\dfrac{a}{1 - a}\right).}$$

□

3. On suppose **dans cette question** que Z suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \,]0,1[$.

a) Montrer :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \mathbb{P}([Z=k]) = \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \times \mathbb{P}([Z=k-1])$$

Démonstration.
Soit $k \in [\![1,n]\!]$.

$$\begin{array}{cl} & \dfrac{p}{1-p} \times \dfrac{n-k+1}{k} \times \mathbb{P}([Z=k-1]) \\[2ex] = & \dfrac{p}{1-p} \times \dfrac{n-k+1}{k} \times \dbinom{n}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-(k-1)} \qquad \textit{(car } Z \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)\textit{)} \\[2ex] = & \dfrac{n-k+1}{k} \times \dfrac{n!}{(n-(k-1))!\,(k-1)!}\; p^k \dfrac{(1-p)^{n-k+\cancel{1}}}{\cancel{1-p}} \\[2ex] = & \dfrac{n-k+1}{(n-k+1)!} \times \dfrac{n!}{k \times (k-1)!}\; p^k\,(1-p)^{n-k} \\[2ex] = & \dfrac{n!}{(n-k)!\;k!}\; p^k\,(1-p)^{n-k} \\[2ex] = & \dbinom{n}{k}\; p^k\,(1-p)^{n-k} \\[2ex] = & \mathbb{P}([Z=k]) \qquad \textit{(car } Z \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On obtient : } \forall k \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}([Z=k]) = \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \times \mathbb{P}([Z=k-1]).}$$

□

b) En déduire que Z vérifie une relation de Panjer en précisant les valeurs de a et b correspondantes, en fonction de n et p.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme $Z(\Omega) = [\![0,n]\!]$, on a bien : $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
- Ensuite : $\mathbb{P}([Z=0]) \;=\; \dbinom{n}{0} p^0(1-p)^{n-0} \;=\; (1-p)^n$.
  Or, d'après l'énoncé, $p > 0$, donc : $\mathbb{P}([Z=0]) \neq 1$.
- Déterminons $a < 1$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([Z=k]) = \left(a + \dfrac{b}{k}\right) \mathbb{P}([Z=k-1])$.
  Trois cas se présentent :
  × si $k \in [\![1,n]\!]$, d'après la question précédente :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([Z=k]) & = & \dfrac{p}{1-p} \times \dfrac{n-k+1}{k} \times \mathbb{P}([Z=k-1]) \\[2ex] & = & \dfrac{p}{1-p} \left(\dfrac{n+1}{k} - 1 \right) \mathbb{P}([Z=k-1]) \\[2ex] & = & \left(-\dfrac{p}{1-p} + \dfrac{\frac{(n+1)p}{1-p}}{k} \right) \mathbb{P}([Z=k-1]) \end{array}$$

On pose alors :

$$a = -\frac{p}{1-p} \quad \text{et} \quad b = \frac{(n+1)p}{1-p} = -(n+1)a$$

Ainsi :

- comme $p \in \,]0,1[$: $a < 0$. D'où : $a < 1$.
- on a évidemment : $b \in \mathbb{R}$.
- d'après le calcul précédent :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \ \mathbb{P}([Z = k]) = \left(a + \frac{b}{k}\right) \mathbb{P}([Z = k-1])$$

× si $k = n+1$.

- D'une part : $\mathbb{P}([Z = n+1]) = 0$.
- D'autre part :

$$\left(a + \frac{b}{n+1}\right) \mathbb{P}([Z = n]) \ = \ \left(a - \frac{\cancel{(n+1)}\, a}{\cancel{n+1}}\right) \mathbb{P}([Z = n]) \ = \ 0$$

Ainsi :

$$\mathbb{P}([Z = n+1]) \ = \ \left(a + \frac{b}{n+1}\right) \mathbb{P}([Z = n])$$

× si $k \in [\![n+2, +\infty[\![$.

- D'une part : $\mathbb{P}([Z = k]) = 0$.
- D'autre part :

$$\left(a + \frac{b}{k}\right) \mathbb{P}([Z = k-1]) \ = \ \left(a - \frac{b}{k}\right) \times 0 \ = \ 0$$

Finalement, on a bien :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}([Z = k]) \ = \ \left(a + \frac{b}{k}\right) \mathbb{P}([Z = k-1])$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } Z \text{ vérifie donc bien une relation de Panjer de paramètres } a = -\frac{p}{1-p} \text{ et } b = \frac{p}{1-p}\,(n+1).}$$

□

4. On revient dans cette question au cas général : a est un réel vérifiant $a < 1$, b est un réel, et on suppose que N est une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifiant la relation de Panjer.

a) Calculer $\mathbb{P}([N = 1])$. En déduire : $a + b \geqslant 0$.

Démonstration.

- Comme la v.a.r. N vérifie la relation de Panjer de paramètres a et b :

$$\mathbb{P}([N = 1]) \ = \ \left(a + \frac{b}{1}\right) \mathbb{P}([N = 0])$$

$$\boxed{\mathbb{P}([N = 1]) \ = \ (a+b)\, \mathbb{P}([N = 0])}$$

- Comme $\mathbb{P}$ est une probabilité :

$$\mathbb{P}([N = 1]) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([N = 0]) \geqslant 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } a + b \geqslant 0.}$$

□

b) Montrer, pour tout entier $m \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{m} k\,\mathbb{P}([N=k]) \;=\; a \sum_{k=0}^{m-1} (k+1)\,\mathbb{P}([N=k]) + b \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k])$$

Démonstration.
Soit $m \geqslant 1$.

$$\begin{array}{rcll}
\sum\limits_{k=1}^{m} k\,\mathbb{P}([N=k]) & = & \sum\limits_{k=1}^{m} k \left(a + \dfrac{b}{k}\right) \mathbb{P}([N=k-1]) & \textit{(car N vérifie une relation de Panjer)} \\
& = & a \sum\limits_{k=1}^{m} k\,\mathbb{P}([N=k-1]) + b \sum\limits_{k=1}^{m} \cancel{k}\, \dfrac{1}{\cancel{k}}\, \mathbb{P}([N=k-1]) & \\
& = & a \sum\limits_{k=1}^{m} k\,\mathbb{P}([N=k-1]) + b \sum\limits_{k=1}^{m} \mathbb{P}([N=k-1]) & \\
& = & a \sum\limits_{k=0}^{m-1} (k+1)\,\mathbb{P}([N=k]) + b \sum\limits_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k]) & \textit{(par décalage d'indice)}
\end{array}$$

$$\boxed{\forall m \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{m} k\,\mathbb{P}([N=k]) \;=\; a \sum_{k=0}^{m-1} (k+1)\,\mathbb{P}([N=k]) + b \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k])}$$ □

c) En déduire que $\left((1-a) \sum\limits_{k=1}^{m} k\,\mathbb{P}([N=k])\right)_{m \geqslant 1}$ est majorée, puis que N admet une espérance.
Préciser alors la valeur de $\mathbb{E}(N)$ en fonction de a et b.

Démonstration.

- Soit $m \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\begin{array}{rcl}
\sum\limits_{k=1}^{m} k\,\mathbb{P}([N=k]) & = & a \sum\limits_{k=0}^{m-1} (k+1)\mathbb{P}([N=k]) + b \sum\limits_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k]) \\
& = & a \sum\limits_{k=0}^{m-1} k\,\mathbb{P}([N=k]) + a \sum\limits_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k]) + b \sum\limits_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k])
\end{array}$$

  On en déduit :

$$\sum_{k=1}^{m} k\,\mathbb{P}([N=k]) - a \sum_{k=0}^{m-1} k\,\mathbb{P}([N=k]) \;=\; (a+b) \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k])$$

  Or :
  × d'une part : $\sum\limits_{k=1}^{m} k\,\mathbb{P}([N=k]) = \sum\limits_{k=1}^{m-1} k\,\mathbb{P}([N=k]) + m\,\mathbb{P}([N=m])$.
  × d'autre part : $\sum\limits_{k=0}^{m-1} k\,\mathbb{P}([N=k]) = \sum\limits_{k=1}^{m-1} k\,\mathbb{P}([N=k])$.

  D'où :

$$\sum_{k=1}^{m-1} k\,\mathbb{P}([N=k]) + m\,\mathbb{P}([N=m]) - a \sum_{k=1}^{m-1} k\,\mathbb{P}([N=k]) \;=\; (a+b) \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k])$$

  Finalement :

$$(1-a) \sum_{k=1}^{m-1} k\,\mathbb{P}([N=k]) \;=\; (a+b) \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k]) - m\,\mathbb{P}([N=m]) \qquad (\star)$$

- Comme $m\,\mathbb{P}([N=m]) \geqslant 0$, on obtient :

$$(1-a) \sum_{k=1}^{m-1} k\,\mathbb{P}([N=k]) \;\leqslant\; (a+b) \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k])$$

De plus, comme $\big([N=k]\big)_{k\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N=k]) = 1$.
Ainsi :

$$\begin{array}{ccc} \sum\limits_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k]) & \leqslant & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N=k]) \\ & & \shortparallel \\ & & 1 \end{array}$$

Comme $a+b \geqslant 0$, on en déduit :

$$(a+b) \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k]) \ \leqslant \ a+b$$

D'où :

$$(1-a) \sum_{k=1}^{m-1} k\, \mathbb{P}([N=k]) \ \leqslant \ (a+b) \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k]) \ \leqslant \ a+b$$

$$\boxed{\text{La suite } \left((1-a) \sum_{k=1}^{m} k\, \mathbb{P}([N=k])\right)_{m\geqslant 1} \text{ est donc majorée par } a+b.}$$

Commentaire

On a démontré :

$$\forall m \geqslant 1,\ (a+b) \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k]) \ \leqslant \ a+b$$

Dans cette propriété, la variable m est muette (car portée par le quantificateur $\forall$). En posant $r = m-1$, on obtient donc :

$$\forall r \geqslant 0,\ (a+b) \sum_{k=0}^{r} \mathbb{P}([N=k]) \ \leqslant \ a+b$$

Ceci permet bien de conclure que la suite $\left((1-a) \sum\limits_{k=1}^{m} k\, \mathbb{P}([N=k])\right)_{m\geqslant 1}$ est majorée par $a+b$.

- La suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{m} k\, \mathbb{P}([N=k])\right)_{m\geqslant 1}$ est donc :

  × croissante, car c'est la suite des sommes partielles d'une série à termes positifs,

  × majorée par $\dfrac{a+b}{1-a}$, car $1-a > 0$.

  On en déduit que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{m} k\, \mathbb{P}([N=k])\right)_{m\geqslant 1}$ converge, c'est-à-dire la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} n\, \mathbb{P}([N=n])$ est convergente. Cette série est donc absolument convergente car c'est une série à termes positifs.

$$\boxed{\text{Ainsi, la v.a.r. } N \text{ admet une espérance.}}$$

- En reprenant $(\star)$, on a :

$$\sum_{k=1}^{m-1} k\, \mathbb{P}([N=k]) \ = \ \frac{a+b}{1-a} \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k]) - \frac{1}{1-a}\ m\, \mathbb{P}([N=m])$$

Or :

- × on a déjà montré : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N=k]) = 1$,
- × comme la série $\sum\limits_{m\geqslant 1} m\,\mathbb{P}([N=m])$ est convergente, son terme général tend vers 0, *i.e.* : $\lim\limits_{m\to+\infty} m\,\mathbb{P}([N=m]) = 0$.

Ainsi, en passant à la limite quand m tend vers $+\infty$ dans l'égalité précédente :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\,\mathbb{P}([N=k]) \;=\; \frac{a+b}{1-a}\times 1 - \frac{1}{1-a}\times 0$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{E}(N) = \frac{a+b}{1-a}.}$$

□

d) Montrer que N admet un moment d'ordre 2 et :

$$\mathbb{E}\big(N^2\big) \;=\; \frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2}$$

Démonstration.

- La v.a.r. N admet un moment d'ordre 2 si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^2\,\mathbb{P}([N=n])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Soit $m\in\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m} k^2\,\mathbb{P}([N=k]) &= \sum_{k=1}^{m} k^2\,\mathbb{P}([N=k]) \\
&= \sum_{k=1}^{m} k^2\left(a+\frac{b}{k}\right)\mathbb{P}([N=k-1]) \\
&= a\sum_{k=1}^{m} k^2\,\mathbb{P}([N=k-1]) + b\sum_{k=1}^{m} k\,\mathbb{P}([N=k-1]) \\
&= a\sum_{k=0}^{m-1} (k+1)^2\,\mathbb{P}([N=k]) + b\sum_{k=0}^{m-1} (k+1)\,\mathbb{P}([N=k]) \\
&= a\sum_{k=0}^{m-1} k^2\,\mathbb{P}([N=k]) + 2a\sum_{k=0}^{m-1} k\,\mathbb{P}([N=k]) + a\sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k]) \\
&\quad + b\sum_{k=0}^{m-1} k\,\mathbb{P}([N=k]) + b\sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k]) \\
&= a\sum_{k=0}^{m-1} k^2\,\mathbb{P}([N=k]) + (2a+b)\sum_{k=0}^{m-1} k\,\mathbb{P}([N=k] \\
&\quad + (a+b)\sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k])
\end{aligned}$$

D'où :

$$\sum_{k=0}^{m} k^2\,\mathbb{P}([N=k]) - a\sum_{k=0}^{m-1} k^2\,\mathbb{P}([N=k]) \;=\; (2a+b)\sum_{k=0}^{m-1} k\,\mathbb{P}([N=k]) + (a+b)\sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k])$$

Or :

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{m} k^2\, \mathbb{P}([N=k]) - a \sum_{k=0}^{m-1} k^2\, \mathbb{P}([N=k]) \\
= \ & \sum_{k=0}^{m-1} k^2\, \mathbb{P}([N=k]) + m^2\, \mathbb{P}([N=m]) - a \sum_{k=0}^{m-1} k^2\, \mathbb{P}([N=k]) \\
= \ & (1-a) \sum_{k=0}^{m-1} k^2\, \mathbb{P}([N=k]) + m^2\, \mathbb{P}([N=m])
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\boxed{(1-a) \sum_{k=0}^{m-1} k^2\, \mathbb{P}([N=k]) \ = \ (2a+b) \sum_{k=0}^{m-1} k\, \mathbb{P}([N=k]) + (a+b) \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k]) - m^2\, \mathbb{P}([N=m])} \qquad (\star\star)$$

- Or $m^2\, \mathbb{P}([N=m]) \geqslant 0$, donc :

$$(1-a) \sum_{k=0}^{m-1} k^2\, \mathbb{P}([N=k]) \ \leqslant \ (2a+b) \sum_{k=0}^{m-1} k\, \mathbb{P}([N=k]) + (a+b) \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k])$$

D'où, comme $1-a > 0$:

$$\sum_{k=0}^{m-1} k^2\, \mathbb{P}([N=k]) \ \leqslant \ \frac{2a+b}{1-a} \sum_{k=0}^{m-1} k\, \mathbb{P}([N=k]) + \frac{a+b}{1-a} \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k])$$

De plus :

× comme N admet une espérance, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n\, \mathbb{P}([N=n])$ est convergente. Elle est de plus à termes positifs. Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{m-1} k\, \mathbb{P}([N=k]) \ \leqslant \ \sum_{k=0}^{+\infty} k\, \mathbb{P}([N=k]) \ = \ \mathbb{E}(N)$$

× on a déjà vu :

$$\sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k]) \ \leqslant \ \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N=k]) \ = \ 1$$

On en déduit :

$$\sum_{k=0}^{m-1} k^2\, \mathbb{P}([N=k]) \ \leqslant \ \frac{2a+b}{1-a}\, \mathbb{E}(N) + \frac{a+b}{1-a}$$

La suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{m-1} k^2 \mathbb{P}([N=k])\right)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est donc :

× croissante, car c'est la suite des sommes partielles d'une série à termes positifs,

× majorée par $\dfrac{2a+b}{1-a}\, \mathbb{E}(N) + \dfrac{a+b}{1-a}$.

Elle est donc convergente. On en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^2 \mathbb{P}([N=n])$ est convergente.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } N \text{ admet donc un moment d'ordre 2.}}$$

- Soit $m \in \mathbb{N}^*$. En reprenant $(\star\star)$:

$$\sum_{k=0}^{m-1} k^2\, \mathbb{P}([N=k]) = \frac{2a+b}{1-a} \sum_{k=0}^{m-1} k\, \mathbb{P}([N=k]) + \frac{a+b}{1-a} \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k]) - \frac{1}{1-a}\, m^2\, \mathbb{P}([N=m])$$

Or, comme $\sum\limits_{m \geqslant 0} m^2 \mathbb{P}([N=m])$ est une série convergente, son terme général tend vers 0, *i.e.* : $\lim\limits_{m \to +\infty} m^2\, \mathbb{P}([N=m]) = 0$.
On en déduit :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} k^2\, \mathbb{P}([N=k]) &= \frac{2a+b}{1-a}\, \mathbb{E}(N) + \frac{a+b}{1-a} - \cancel{\frac{1}{1-a} \times 0} \\ &= \frac{2a+b}{1-a} \times \frac{a+b}{1-a} + \frac{a+b}{1-a} \\ &= \frac{a+b}{1-a} \times \left(\frac{2a+b}{1-a} + 1 \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{E}(N^2) = \frac{a+b}{1-a} \times \frac{2a+b+(1-a)}{1-a} = \frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2}.}$$

□

e) En déduire que N admet une variance et préciser la valeur de $\mathbb{V}(N)$ en fonction de a et b.

Démonstration.

- D'après la question précédente, la v.a.r. N admet un moment d'ordre 2.

$$\boxed{\text{On en déduit que } N \text{ admet une variance.}}$$

- Par formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(N) &= \mathbb{E}(N^2) - \big(\mathbb{E}(N)\big)^2 \\ &= \frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2} - \left(\frac{a+b}{1-a}\right)^2 \\ &= \frac{a+b}{(1-a)^2} \big((\cancel{a} + \cancel{b} + 1) - (\cancel{a} + \cancel{b}) \big) \\ &= \frac{a+b}{(1-a)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(N) = \frac{a+b}{(1-a)^2}}$$

□

f) Montrer que $\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N)$ si, et seulement si, N suit une loi de Poisson.

Démonstration.
On procède par double implication.

($\Leftarrow$) Supposons que N suit une loi de Poisson.
Alors, par propriété de la loi de Poisson : $\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N)$.

($\Rightarrow$) Supposons : $\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N)$.
On aimerait montrer : $a = 0$ et $b > 0$, pour pouvoir appliquer le résultat de la question ***1.***.

- Tout d'abord, d'après les questions ***4.c)*** et ***4.e)*** :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N) & \Leftrightarrow & \dfrac{a+b}{1-a} = \dfrac{a+b}{(1-a)^2} \\[2mm]
& \Leftrightarrow & (a+b)(1-a) = a+b \qquad \textit{(car : } 1-a \neq 0\textit{)} \\[2mm]
& \Leftrightarrow & (a+b)(1-a) - (a+b) = 0 \\[2mm]
& \Leftrightarrow & (a+b)(\cancel{1} - a - \cancel{1}) = 0 \\[2mm]
& \Leftrightarrow & a(a+b) = 0 \\[2mm]
& \Leftrightarrow & a = 0 \ \texttt{OU} \ a+b = 0
\end{array}$$

- Raisonnons par l'aburde pour montrer : $a = 0$.
Supposons : $a + b = 0$. Alors, d'après ***4.a)*** :

$$\mathbb{P}([N=1]) \ = \ (a+b)\,\mathbb{P}([N=0]) \ = \ 0$$

Ainsi, par récurrence immédiate : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([N=k]) = 0$.

On en déduit :

  × d'une part : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N=k]) = 1$ (car la famille $\big([N=k]\big)_{k\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements)

  × d'autre part : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N=k]) = \mathbb{P}([N=0])$ (car : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([N=k]) = 0$).

Ainsi : $\mathbb{P}([N=0]) = 1$. Absurde ! (d'après l'énoncé)
On en déduit : $a = 0$.

- Montrons alors : $b > 0$.

  × D'après ce qui précède : $a = 0$.

  × D'après la question ***4.a)*** : $a + b \geqslant 0$.
  De plus, d'après le raisonnement par l'absurde précédent : $a + b \neq 0$. Ainsi : $a + b > 0$.

On en déduit : $b > 0$.

- On sait alors : $a = 0$ et $b > 0$.
On en déduit, d'après la question ***1.***, que N suit une loi de Poisson (de paramètre b).

$$\boxed{\text{Finalement, } \mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N) \text{ si et seulement si la v.a.r. } N \text{ suit une loi de Poisson.}}$$

□

Partie 2 – Fonction génératrice

On notera dans la suite :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p_k = \mathbb{P}([N = k])$$

où N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

5. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0, 1]$, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} p_n\, x^n$ est convergente.

Démonstration.
Soit $x \in [0, 1]$. Deux cas se présentent.

- Si $x = 1$, alors on étudie la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} p_n$.
  La famille $\big([N = k]\big)_{k \in \mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements. On en déduit que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \mathbb{P}([N = n])$ converge et : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = k]) = 1$.
  Ainsi, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} p_n$ converge.
- Si $x \in [0, 1[$.
  Par propriété de $\mathbb{P}$: $\forall k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant p_k \leqslant 1$.
  On obtient :
  × $\forall k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant p_k\, x^k \leqslant x^k$ (car : $x^k \geqslant 0$),
  × la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} x^n$ est la série géométrique de raison $x \in\,]-1, 1[$. Elle est donc convergente.

  Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} p_n\, x^n$ est convergente.

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } x \in [0, 1], \text{ la série } \sum\limits_{n \geqslant 0} p_n\, x^n \text{ est convergente.}}$$

□

On appelle alors **fonction génératrice de** N la fonction G définie sur $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad G(x) \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty} p_k\, x^k \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = k])\, x^k$$

et on suppose dans cette partie que N vérifie une relation de Panjer avec $0 < a < 1$ et que $\dfrac{b}{a} > 0$. On pose : $\alpha = \dfrac{-(a + b)}{a}$.

On note enfin f la fonction définie par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = p_0\, (1 - a\, x)^{\alpha}$$

6. Montrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in [0,1], \quad f^{(k)}(x) \ = \ k! \times p_k\, (1 - a\,x)^{\alpha - k}$$

Démonstration.

- La fonction $g : x \mapsto (1 - a\,x)^\alpha$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$, car elle est la composée $g = h_2 \circ h_1$ de :
  - × $h_1 : x \mapsto 1 - a\,x$ qui :
    - est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$,
    - vérifie : $h_1([0,1]) \ \subset \ ]0,+\infty[$. En effet, pour tout $x \in [0,1]$:

    $$1 - a\,x > 0 \ \Leftrightarrow \ 1 > a\,x \ \Leftrightarrow \ \frac{1}{a} > x \quad \textit{(car } a > 0\textit{)}$$

    Or, comme $a < 1$, par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$: $\dfrac{1}{a} > 1$.
    Ainsi : $0 \leqslant x \leqslant 1 < \dfrac{1}{a}$. D'où : $1 - a\,x > 0$.
  - × $h_2 : x \mapsto x^\alpha$ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ en tant que fonction puissance.

  $\boxed{\text{On en déduit que la fonction } f_0 \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } [0,1].}$

Commentaire

On peut aussi écrire f_0 sous la forme :

$$f_0 : x \mapsto p_0\ \frac{1}{(1 - a\,x)^{-\alpha}}$$

- Comme $\alpha = -\dfrac{a+b}{a} < 0$, cette écriture a l'avantage de présenter f_0 comme l'inverse d'une puissance positive.
- Pour démontrer que la fonction f_0 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$, on aurait alors insisté sur le fait qu'elle est l'inverse de la fonction $x \mapsto (1 - a\,x)^{-\alpha}$ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$ et qui ne s'annule pas sur cette intervalle.
  Cependant, il aurait bien fallu démontrer que la fonction $x \mapsto (1 - a\,x)^{-\alpha}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$ par composition.

- Démontrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(k)$ où $\mathcal{P}(k) : \forall x \in [0,1],\ f^{(k)}(x) = k! \times p_k\, (1 - a\,x)^{\alpha - k}$.
  - ► **Initialisation**
    Soit $x \in [0,1]$.
    × D'une part : $f^{(0)}(x) \ = \ f(x) \ = \ p_0\, (1 - a\,x)^\alpha$.
    × D'autre part : $0! \times p_0\, (1 - a\,x)^{\alpha - 0} \ = \ p_0 \times (1 - a\,x)^\alpha$.
    D'où $\mathcal{P}(0)$.
  - ► **Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathcal{P}(k)$ et démontrons $\mathcal{P}(k+1)$
    (*i.e.* $\forall x \in [0,1],\ f^{(k+1)}(x) = (k+1)! \times p_{k+1}\, (1 - a\,x)^{\alpha - (k+1)}$).
    Soit $x \in [0,1]$. Par hypothèse de récurrence :

    $$f^{(k)}(x) \ = \ k! \times p_k\ (1 - a\,x)^{\alpha - k}$$

    Comme f_0 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$, la fonction $f^{(k)}$ est dérivable sur $[0,1]$, et :

    $$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= k! \times p_k \times (-a)\,(\alpha - k)\ (1 - a\,x)^{\alpha - k - 1} \\ &= k!\,(-a) \left(-\frac{a+b}{a} - k \right) \mathbb{P}([N = k])\ (1 - a\,x)^{\alpha - (k+1)} \\ &= k!\,(a + b + a\,k)\, \mathbb{P}([N = k]) \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
(k+1)! \times p_{k+1} &= (k+1)! \times \mathbb{P}([N = k+1]) \\
&= (k+1)! \left(a + \frac{b}{k+1} \right) \mathbb{P}([N = k]) \\
&= (k+1) \times k! \left(a + \frac{b}{k+1} \right) \mathbb{P}([N = k]) \\
&= k! \big(a(k+1) + b \big) \; \mathbb{P}([N = k]) \\
&= k! \, (a + b + a\,k) \, \mathbb{P}([N = k])
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$f^{(k+1)}(x) = (k+1)! \times p_{k+1} \, (1 - a\,x)^{\alpha - (k+1)}$$

D'où $\mathcal{P}(k+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall x \in [0,1], \; f^{(k)}(x) = k! \times p_k \; (1 - a\,x)^{\alpha - k}.}$$

□

7. Soit $x \in [0,1]$.

a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, montrer :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k \, x^k + (n+1) \, p_{n+1} \int_0^x (1 - a\,t)^{\alpha - n - 1} \, (x - t)^n \; dt$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
D'après la question précédente, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$. En particulier, elle est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[0,x]$.
Ainsi, par formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n entre 0 et x, on obtient :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \, x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \; f^{(n+1)}(t) \; dt$$

Or, d'après la question précédente :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^{(k)}(x) = k! \; p_k \; (1 - a\,x)^{\alpha - k}$$

On en déduit :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cancel{k!} \; p_k \; 1^{\alpha - k}}{\cancel{k!}} \, x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \; (n+1)! \; p_{n+1} \; (1 - a\,t)^{\alpha - (n+1)} \; dt$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}, \; f(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k \, x^k + (n+1) \, p_{n+1} \int_0^x (1 - a\,t)^{\alpha - n - 1} \; (x - t)^n \; dt.}$$

Commentaire

- Dans ce sujet tiré de la voie S, on attendait dans cette question l'utilisation de la formule de Taylor avec reste intégral. Ce résultat est bien au programme d'ECS, mais pas dans celui d'ECE. Pour l'adapter à la voie E, il aurait donc fallu admettre le résultat de cette question.
- La formule de Taylor avec reste intégral peut s'énoncer comme suit.
  Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I. Soit $a \in I$.
  Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\forall x \in I, \quad f(x) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \, (x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \, (x-t)^n \, dt$$
- Ce résultat peut se démontrer par récurrence en posant : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$:
$$\forall x \in I, \quad f(x) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \, (x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \, (x-t)^n \, dt$$
  Pour démontrer l'hérédité, on procède par intégration par parties (IPP) :
$$\left| \begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & f^{(n+1)}(t) & \quad & u'(t) & = & f^{(n+2)}(t) \\ v'(t) & = & (x-t)^n & \quad & v(t) & = & -\dfrac{1}{n+1} \, (x-t)^{n+1} \end{array} \right.$$
  Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

□

b) Vérifier, pour tout $t \in [0, x]$: $\dfrac{x-t}{1-at} \leqslant 1$. Puis montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$0 \ \leqslant \ \int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1} \, (x-t)^n \, dt \ \leqslant \ \int_0^x (1-at)^{\alpha-1} \, dt$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Soit $t \in [0, x]$.
$$\begin{array}{rcll} \dfrac{x-t}{1-a\,t} \leqslant 1 & \Leftrightarrow & x - t \leqslant 1 - a\,t & \textit{(car, comme } t \in [0,x] \subset [0,1] \textit{ :} \\ & & & 1 - a\,t > 0, \textit{ d'après } \textbf{\textit{6.}}\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & x - 1 \leqslant (1-a)\,t & \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{x-1}{1-a} \leqslant t & \textit{(car } 1 - a > 0\textit{)} \end{array}$$
  La dernière inégalité est vérifiée car, comme $x \in [0,1]$: $\dfrac{x-1}{1-a} \leqslant 0 \leqslant t$.
  Ainsi, par équivalence, la première aussi.
$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall t \in [0, x], \ \dfrac{x-t}{1-a\,t} \leqslant 1.}$$

- Soit $t \in [0, x]$.

$$\begin{array}{rcl} (1-a\,t)^{\alpha-n-1}\ (x-t)^n & = & (1-a\,t)^{\alpha-1}\ (1-a\,t)^{-n}\ (x-t)^n \\ & = & (1-a\,t)^{\alpha-1}\ \dfrac{(x-t)^n}{(1-a\,t)^n} \\ & = & (1-a\,t)^{\alpha-1}\ \left(\dfrac{x-t}{1-a\,t}\right)^n \end{array}$$

Or, d'après la question précédente :

$$0 \leqslant \frac{x-t}{1-a\,t} \leqslant 1$$

donc $\quad 0^n \leqslant \left(\dfrac{x-t}{1-a\,t}\right)^n \leqslant 1^n \quad$ *(par croissance de $x \mapsto x^n$ sur $[0, +\infty[$)*

d'où $\quad 0 \leqslant (1-a\,t)^{\alpha-1} \left(\dfrac{x-t}{1-a\,t}\right)^n \leqslant (1-a\,t)^{\alpha-1} \quad$ *(car : $(1-a\,t)^{\alpha-1} > 0$)*

ainsi $\quad 0 \leqslant (1-a\,t)^{\alpha-n-1}\ (x-t)^n \leqslant (1-a\,t)^{\alpha-1}$

- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant x$) :

$$0 \ \leqslant \ \int_0^x (1-a\,t)^{\alpha-n-1}\ (x-t)^n\ dt \ \leqslant \ \int_0^x (1-a\,t)^{\alpha-1}\ dt$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \ \leqslant \ \int_0^x (1-a\,t)^{\alpha-n-1}\ (x-t)^n\ dt \ \leqslant \ \int_0^x (1-a\,t)^{\alpha-1}\ dt}$$

□

c) En déduire :

$$G(x) \ = \ p_0\,(1-ax)^\alpha$$

En calculant $G(1)$, exprimer p_0 en fonction de a, b et α, et vérifier : $G'(1) = \mathbb{E}(N)$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente :

$$0 \ \leqslant \ \int_0^x (1-a\,t)^{\alpha-n-1}\ (x-t)^n\ dt \ \leqslant \ \int_0^x (1-a\,t)^{\alpha-1}\ dt$$

Ainsi, comme $(n+1)\,p_{n+1} \geqslant 0$:

$$0 \ \leqslant \ (n+1)\,p_{n+1} \int_0^x (1-a\,t)^{\alpha-n-1}\ (x-t)^n\ dt \ \leqslant \ (n+1)\,p_{n+1} \int_0^x (1-a\,t)^{\alpha-1}\ dt$$

De plus :

× $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$,

× $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)p_{n+1} = 0$, car $(n+1)p_{n+1}$ est terme général de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n\,p_n$ qui est convergente (car N admet une espérance d'après ***4.c)***).

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)\,p_{n+1} \displaystyle\int_0^x (1-a\,t)^{\alpha-1}\ dt = 0$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Par théorème d'encadrement :}\\ \lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)\,p_{n+1} \displaystyle\int_0^x (1-a\,t)^{\alpha-n-1}\ (x-t)^n\ dt \ = \ 0.\end{array}}$$

- De plus, d'après la question ***7.a)*** :

$$f(x) \; = \; \sum_{k=0}^{n} p_k \, x^k + (n+1) \, p_{n+1} \int_0^x (1 - a\,t)^{\alpha-n-1} \, (x-t)^n \; dt \quad (*)$$

Or, d'après la question ***5.***, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} p_n \, x^n$ est convergente et :

$$\sum_{k=0}^{n} p_n \, x^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} p_k \, x^k \; = \; G(x)$$

Ainsi, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans $(*)$, on obtient :

$$f(x) \; = \; G(x) + 0$$

$$\boxed{\text{On obtient bien : } G(x) = f(x) = p_0 \, (1 - a\,x)^{\alpha}.}$$

- Par définition de G :

$$G(1) \; = \; \sum_{k=0}^{+\infty} p_k \; 1^k \; = \; \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = k])$$

Or, la famille $\big([N = k] \big)_{k \in \mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements.

$$\boxed{\text{On en déduit : } G(1) = 1.}$$

- De plus : $G(1) = p_0 \, (1 - a \times 1)^{\alpha}$. Ainsi :

$$p_0 \, (1-a)^{\alpha} \; = \; 1$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } p_0 = \dfrac{1}{(1-a)^{\alpha}}.}$$

- Soit $x \in [0, 1]$.

$$G'(x) \; = \; p_0 \, (-a) \, \alpha \, (1 - a\,x)^{\alpha - 1}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} G'(1) \; &= \; -a \, \alpha \, p_0 \, (1-a)^{\alpha-1} \\ &= \; -\cancel{a} \left(-\frac{a+b}{\cancel{a}} \right) \frac{1}{(1-a)^{\alpha}} \, (1-a)^{\alpha-1} \\ &= \; (a+b) \; (1-a)^{\cancel{\alpha}-1-\cancel{\alpha}} \\ &= \; \frac{a+b}{1-a} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'après } \textit{4.c)} : G'(1) \; = \; \frac{a+b}{1-a} \; = \; \mathbb{E}(N).}$$

□

Partie 3 – formule de récursivité

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$, mutuellement indépendantes et indépendantes de la variable N étudiée dans la question ***4.*** de la **Partie 1**.
On considère alors la variable aléatoire S définie par :

$$S \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } N = 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{N} X_k & \text{si } N \geqslant 1 \end{cases}$$

Autrement dit :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad S(\omega) = 0 \;\text{ si }\; N(\omega) = 0 \qquad \text{et} \qquad S(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega) \;\text{ sinon}$$

Commentaire

On rappelle qu'une v.a.r. est un application. Pour cette raison, une définition plus rigoureuse de la v.a.r. S serait :

$$S : \omega \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } N(\omega) = 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega) & \text{si } N(\omega) \geqslant 1 \end{cases}$$

8. Calculer $\mathbb{P}([S=0])$ lorsque $a \in]0,1[$ à l'aide de la **Partie 2**.

Démonstration.

- La famille $\big([N=i]\big)_{i\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([S=0]) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}([S=0]\cap[N=i]) \\ &= \mathbb{P}([S=0]\cap[N=0]) + \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([S=0]\cap[N=i]) \end{aligned}$$

- Tout d'abord, par définition de la v.a.r. S : $[N=0] \subset [S=0]$. D'où :

$$[S=0]\cap[N=0] \;=\; [N=0]$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}([S=0]\cap[N=0]) \;=\; \mathbb{P}([N=0]) \;=\; p_0 \;=\; \frac{1}{(1-a)^{\alpha}} \qquad \textit{d'après } \textbf{\textit{7.c)}}\textit{, car } a \in]0,1[$$

- De plus, soit $i \in \mathbb{N}^*$, toujours par définition de S :

$$[S=0]\cap[N=i] \;=\; \left[\sum_{k=1}^{N} X_k = 0\right] \cap [N=i] \;=\; \left[\sum_{k=1}^{i} X_k = 0\right] \cap [N=i]$$

Les v.a.r. X_k sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, donc : $\left[\sum\limits_{k=1}^{i} X_k = 0\right] = \bigcap\limits_{k=1}^{i} [X_k = 0]$.
Ainsi :

$$[S=0]\cap[N=i] \;=\; \left(\bigcap_{k=1}^{i} [X_k=0]\right) \cap [N=i]$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([S=0]\cap[N=i]) & = & \mathbb{P}\left(\left(\bigcap\limits_{k=1}^{i} [X_k=0]\right)\cap[N=i]\right) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left(\bigcap\limits_{k=1}^{i} [X_k=0]\right)\right)\times\mathbb{P}([N=i]) & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \ldots, X_i \textit{ sont indépendantes de } N\textit{)} \\ & = & \left(\prod\limits_{k=1}^{i} \mathbb{P}([X_k=0])\right)\times\mathbb{P}([N=i]) & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \ldots, X_i \textit{ sont mutuellement indépendantes)} \\ & = & \big(\mathbb{P}([X_1=0])\big)^i\ \mathbb{P}([N=i]) & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \ldots, X_i \textit{ ont même loi)} \end{array}$$

On note alors $x_0 = \mathbb{P}([X_1=0])$. On obtient :

$$\mathbb{P}([S=0]\cap[N=i]) \ = \ x_0^i\ \mathbb{P}([N=i]) \ = \ p_i\, x_0^i$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([S=0]) & = & p_0 + \sum\limits_{i=1}^{+\infty} p_i\ x_0^i \\ & = & p_0\ x_0^0 + \sum\limits_{i=1}^{+\infty} p_i\ x_0^i \\ & = & \sum\limits_{i=0}^{+\infty} p_i\ x_0^i \\ & = & G(x_0) \end{array}$$

Or, comme $a \in\ ]0,1[$, d'après la question ***7.c)*** :

$$G(x_0) \ = \ p_0\ (1-a\,x_0)^\alpha \ = \ \frac{1}{(1-a)^\alpha}\ (1-a\,x_0)^\alpha$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}([S=0]) = \left(\frac{1-a\,x_0}{1-a}\right)^\alpha, \text{ où } x_0 = \mathbb{P}([X_1=0]).}$$

□

9. a) Calculer $\mathbb{P}([S=0])$ lorsque N suit une loi de Poisson de paramètre λ.

Démonstration.
On peut ré-itérer le raisonnement de la question précédente.

- La famille $\big([N=i]\big)_{i\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([S=0]) & = & \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}([S=0]\cap[N=i]) \\ & = & \mathbb{P}([S=0]\cap[N=0]) + \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([S=0]\cap[N=i]) \end{array}$$

- Tout d'abord :

$$\mathbb{P}([S=0]\cap[N=0]) \ = \ \mathbb{P}([N=0]) \ = \ \frac{\lambda^0}{0!}\ \mathrm{e}^{-\lambda} \ = \ \mathrm{e}^{-\lambda}$$

- De plus :

$$[S=0] \cap [N=i] \ = \ \left(\bigcap_{k=1}^{i} \ [X_k = 0] \right) \cap [N=i]$$

On en déduit, avec les mêmes arguments qu'en question précédente :

$$\mathbb{P}([S=0] \cap [N=i]) \ = \ \big(\mathbb{P}([X_1=0])\big)^i \ \mathbb{P}([N=i]) \ = \ \big(\mathbb{P}([X_1=0])\big)^i \ \frac{\lambda^i}{i!} \ \mathrm{e}^{-\lambda}$$

On note toujours $x_0 = \mathbb{P}([X_1 = 0])$. On obtient :

$$\mathbb{P}([S=0] \cap [N=i]) \ = \ x_0^i \ \frac{\lambda^i}{i!} \ \mathrm{e}^{-\lambda} \ = \ \frac{(\lambda\, x_0)^i}{i!} \ \mathrm{e}^{-\lambda}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([S=0]) \ &= \ \mathrm{e}^{-\lambda} + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(\lambda\, x_0)^i}{i!} \ \mathrm{e}^{-\lambda} \\
&= \ \mathrm{e}^{-\lambda} \left(1 + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(\lambda\, x_0)^i}{i!} \right) \\
&= \ \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\lambda\, x_0)^i}{i!} \\
&= \ \mathrm{e}^{-\lambda} \ \mathrm{e}^{\lambda\, x_0} && \textit{(car } \sum_{n \geqslant 0} \frac{(\lambda\, x_0)^n}{n!} \textit{ est une série exponentielle de paramètre } \lambda\, x_0\textit{)} \\
&= \ \mathrm{e}^{-\lambda + \lambda\, x_0}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}([S=0]) = \mathrm{e}^{-(1-x_0)\,\lambda}, \text{ où } x_0 = \mathbb{P}([X_1 = 0]).}$$

□

b) On considère la fonction **Python** suivante, où n est un paramètre dont dépend la loi commune des X_k :

```python
def simuX(n) :
    y = 0 ;
    for i in range(n) :
        if rd.random() < 1/2 :
            y = y + 1
    return y
```

Quelle loi de probabilité est simulée par la fonction `simuX` ? Préciser ses paramètres.

Commentaire

L'énoncé s'autorise ici une confusion entre « loi » et « v.a.r. ». On parle en effet de simulation d'une v.a.r. et non d'une loi de probabilité.

Démonstration.

La fonction `simuX` simule une v.a.r. de loi $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$.

On reconnaît en effet une fonction du cours qui permet de simuler une v.a.r. X de loi $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$.
Pour se remémorer à quoi correspondent les étapes de cette fonction, on rappelle qu'on peut écrire la v.a.r. X sous la forme :

$$X = \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

où Z_1, ..., Z_n sont des v.a.r. indépendantes et de même loi $\mathcal{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
La fonction proposée ne consiste donc en rien d'autre que coder une somme.
Détaillons maintenant cette fonction.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `simuX`,
  × elle prend en paramètre la variable `n`,
  × elle admet pour variable de sortie la variable `y`.

```
1  def simuX(n) :
```

```
6      return y
```

  On initialise ensuite la variable `y` à 0 (choix naturel d'initialisation lorsqu'on souhaite coder une somme puisque 0 est l'élément neutre de l'opérateur de sommation)

```
2      y = 0
```

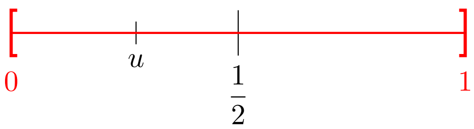
- **Structure itérative**
  Les lignes 3 à 5 consistent à mettre à jour la variable `y` pour qu'elle contienne une simulation de la v.a.r. $X = \sum\limits_{i=1}^{n} Z_i$. Pour cela, on utilise une structure itérative (boucle for).

```
3      for i in range(n) :
```

  Au $i^{\text{ème}}$ tour de boucle, on souhaite ajouter à la variable `y` une simulation de la v.a.r. Z_i.
  Or Z_i suit une loi $\mathcal{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Elle prend donc :
  × la valeur 0 avec probabilité $\dfrac{1}{2}$,
  × la valeur 1 avec probabilité $\dfrac{1}{2}$.
  Pour mettre à jour la variable `y`, on souhaite donc :
  × ajouter 0 (c'est-à-dire ne pas mettre à jour `y`) avec probabilité $\dfrac{1}{2}$,
  × ajouter 1 avec probabilité $\dfrac{1}{2}$.
  C'est ce que permettent les instructions suivantes :

```
4          if rd.random() < 1/2 :
5              y = y + 1
```

Détaillons la simulation de Z_i.
L'instruction `rd.random()` renvoie un réel u choisit aléatoirement dans $[0,1]$.
Plus formellement, il s'agit de simuler une v.a.r. U telle que : $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.



Deux cas se présentent :

× si $u < \dfrac{1}{2}$, alors la v.a.r. Z prend la valeur 1 (on incrémente alors la variable `y` de 1).
Ce cas se produit avec la probabilité :

$$\mathbb{P}\left(\left[0 \leqslant U < \frac{1}{2}\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[U < \frac{1}{2}\right]\right) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}([Z=1])$$

× si $u \geqslant \dfrac{1}{2}$, alors la v.a.r. Z prend la valeur 0 (on ne met pas à jour la variable `y`).
Ce cas se produit avec la probabilité :

$$1 - \mathbb{P}\left(\left[0 \leqslant U < \frac{1}{2}\right]\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \mathbb{P}([Z=0])$$

- **Fin de la fonction**
À l'issue de cette boucle, la variable `y` contient bien une simulation de $\sum\limits_{i=1}^{n} Z_i = X$.
La fonction `simuX` simule donc bien une v.a.r. de loi $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$.

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, founir la bonne réponse démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir la majorité des points alloués à cette question.

□

c) On rappelle qu'en **Python** l'instruction `nr.poisson(lambda, 1)` (du module `numpy.random`, abrégé en `nr`) renvoie une réalisation d'une loi de Poisson de paramètre `lambda`.
On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ, et que la loi des variables X_k est celle simulée à la question précédente par la fonction `simuX`.
Recopier et compléter la fonction **Python** suivante, afin qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire S :

```
def simulS(lambda, n) :
    N = nr.poisson(lambda, 1)
    ..........
    ..........
    ..........
    ..........
    return s
```

Commentaire

L'énoncé s'autorise ici une confusion entre « loi » et « événement ». On parle en effet de réalisation d'un événement et non d'une loi de probabilité.

Démonstration.
On propose le script suivant.

```
def simulS(lambda, n) :
    N = nr.poisson(lambda, 1)
    s = 0
    if N >= 1 :
        for k in range(N) :
            s = s + simuX(n)
    return s
```

Détaillons les éléments de cette fonction.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `simulS`,
  × elle prend en paramètre les variables `lambda` et `n`,
  × elle admet pour variable de sortie la variable `s`.

```
def simulS(lambda, n) :
```

  On simule ensuite la v.a.r. N qui suit, d'après l'énoncé, la loi $\mathcal{P}(\lambda)$, et on stocke le résultat dans une variable `N`.

```
    N = nr.poisson(lambda, 1)
```

  On souhaite qu'à l'issue de ce programme, la variable `s` contienne une simulation de la v.a.r. S qui :
  × soit prend la valeur 0,
  × soit prend la valeur d'une simulation de la somme de v.a.r. $\sum\limits_{k=1}^{N} X_k$.

  On initialise donc ensuite la variable `s` à 0 (choix naturel d'initialisation lorsqu'on souhaite coder une somme puisque 0 est l'élément neutre de l'opérateur de sommation)

```
    s = 0
```

- **Structure itérative**
  La variable `s` contiendra une simulation de la v.a.r. S. Pour la mettre à jour, deux cas se présentent donc :
  × soit $\mathtt{N} = 0$, alors la variable `s` doit prendre la valeur 0.
  Comme c'est déjà le cas avec l'initialisation choisie précédement, aucune mise à jour de `s` n'est nécessaire dans ce cas.
  × soit $\mathtt{N} \geqslant 1$, alors la variable `s` doit contenir une simulation de la v.a.r. $\sum\limits_{k=1}^{\mathtt{N}} X_k$.
  Insistons sur le fait que le dernier terme de la somme est bien $X_{\mathtt{N}}$ et non X_N. En effet, à ce stade du programme, la v.a.r. N a déjà été simulée et la valeur qu'elle a prise a été stockée dans la variable `N`. *On se place donc dans le cas où l'événement $[N = \mathtt{N}]$ est réalisé.*

Pour effectuer cette disjonction de cas, on utilise une structure conditionnelle :

```
4       if N >= 1 :
```

Les lignes 5 à 6 consistent à mettre à jour la variable `s` pour qu'elle contienne une simulation de la v.a.r. $\sum\limits_{k=1}^{\mathtt{N}} X_k$. Pour cela, on utilise une structure itérative (boucle `for`).

```
5           for k in range(N) :
6               s = s + simuX(n)
```

On rappelle en effet que les v.a.r. X_k suivent toutes la même loi, simulée par la fonction `simuX` de la question précédente.

- **Fin de la fonction**
  À l'issue de cette boucle, la variable `s` contient donc bien une simulation de la v.a.r. S. □

10. Dans la suite du problème, on revient au cas général où N vérifie la relation de Panjer. On note toujours :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p_k = \mathbb{P}([N = k])$$
et on notera également :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad q_k = \mathbb{P}([X_1 = k])$$
On considère pour tout entier $n \geqslant 1$, la variable aléatoire $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, en convenant qu'on a $S_0 = 0$. Enfin, on admet le résultat suivant :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{b\, j}{k}\right) q_j\, \mathbb{P}([S_n = k - j]) \ = \ \left(a + \frac{b}{n+1}\right) \mathbb{P}([S_{n+1} = k])$$
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer :
$$\forall j \in [\![0, k]\!], \quad \mathbb{P}([S = k - j]) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} p_n\, \mathbb{P}([S_n = k - j])$$

Démonstration.
Soit $j \in [\![0, k]\!]$.

- La famille $\big([N = n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par formule des probabilités totales :
$$\mathbb{P}([S = k - j]) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = n] \cap [S = k - j])$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminons $[N = n] \cap [S = k - j]$. Deux cas se présentent :
  × si $n = 0$, alors :
$$\begin{aligned} [N = 0] \cap [S = k - j] \ &= \ [N = 0] \cap [0 = k - j] \quad \textit{(par définition de } S\textit{)} \\ &= \ [N = 0] \cap [S_0 = k - j] \quad \textit{(par définition de } S_0\textit{)} \end{aligned}$$

× si $n \geqslant 1$, alors :

$$\begin{array}{rcll} [N = n] \cap [S = k - j] & = & [N = n] \cap \left[\sum\limits_{i=1}^{N} X_i = k - j \right] & \textit{(par définition de } S\textit{)} \\ & = & [N = n] \cap \left[\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = k - j \right] & \\ & = & [N = n] \cap [S_n = k - j] & \textit{(par définition de } S_n\textit{)} \end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([S = k - j]) & = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = n] \cap [S_n = k - j]) & \\ & = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = n])\ \mathbb{P}([S_n = k - j]) & \textit{(car, par lemme des coalitions, les v.a.r. } S_n \textit{ et } N \textit{ sont indépendantes)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall j \in [\![0, k]\!],\ \mathbb{P}([S = k - j]) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n\ \mathbb{P}([S_n = k - j]).}$$

□

b) Montrer :

$$\sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{b\,j}{k} \right) q_j\, \mathbb{P}([S = k - j]) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1}\, \mathbb{P}([S_{n+1} = k])$$

Démonstration.

- Soit $j \in [\![0, k]\!]$. D'après la question précédente :

$$\begin{array}{rcl} \left(a + \dfrac{b\,j}{k} \right) q_j\ \mathbb{P}([S = k - j]) & = & \left(a + \dfrac{b\,j}{k} \right) q_j\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n\ \mathbb{P}([S_n = k - j]) \\ & = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n\ \left(a + \dfrac{b\,j}{k} \right) q_j\ \mathbb{P}([S_n = k - j]) \end{array}$$

- Pour tout $j \in [\![0,k]\!]$, les séries $\sum\limits_{n \geqslant 0} p_n \ \left(a + \dfrac{b\,j}{k}\right) q_j \ \mathbb{P}([S_n = k-j])$ sont convergentes. Ainsi leur somme **finie** (pour j variant de 0 à k) l'est aussi. On obtient de plus :

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{b\,j}{k}\right) q_j \ \mathbb{P}([S = k-j]) \\
= \ & \sum_{j=0}^{k} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p_n \ \left(a + \frac{b\,j}{k}\right) q_j \ \mathbb{P}([S_n = k-j]) \right) \\
= \ & \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(p_n \ \left(a + \frac{b\,j}{k}\right) q_j \ \mathbb{P}([S_n = k-j]) \right) \\
= \ & \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} p_n \ \left(a + \frac{b\,j}{k}\right) q_j \ \mathbb{P}([S_n = k-j]) \right) \\
= \ & \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \left(\sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{b\,j}{k}\right) q_j \ \mathbb{P}([S_n = k-j]) \right) \\
= \ & \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \left(a + \frac{b}{n+1}\right) \mathbb{P}([S_{n+1} = k]) && \textit{(d'après le résultat admis par l'énoncé)} \\
= \ & \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1} \ \mathbb{P}([S_{n+1} = k]) && \textit{(car } N \textit{ vérifie une relation de Panjer de paramètres } a \textit{ et } b\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{b\,j}{k}\right) q_j \, \mathbb{P}([S = k-j]) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1} \, \mathbb{P}([S_{n+1} = k])}$$

□

c) Justifier :

$$\mathbb{P}([S = k]) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1} \, \mathbb{P}([S_{n+1} = k])$$

Démonstration.

- La famille $\big([N = n]\big)_{n \in \mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}([S = k]) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = n] \cap [S = k])$$

  Avec le même raisonnement qu'en question ***10.a)***, on obtient :

$$\mathbb{P}([S = k]) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \ \mathbb{P}([S_n = k])$$

- Or :

$$[S_0 = k] \ = \ [0 = k] \ = \ \varnothing \quad \textit{(car } k \in \mathbb{N}^*\textit{)}$$

  Donc : $\mathbb{P}([S_0 = k]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
- On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([S = k]) \ &= \ \sum_{n=1}^{+\infty} p_n \ \mathbb{P}([S_n = k]) \\
&= \ \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1} \ \mathbb{P}([S_{n+1} = k]) \quad \textit{(par décalage d'indice)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([S = k]) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1} \ \mathbb{P}([S_{n+1} = k])}$$

□

d) En déduire finalement :

$$\mathbb{P}([S = k]) \;=\; \frac{1}{1 - a\, q_0} \sum_{j=1}^{k} \left(a + \frac{b\, j}{k}\right) q_j \, \mathbb{P}([S = k - j])$$

Démonstration.
D'après la question ***10.b)*** :

$$\sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{b\, j}{k}\right) q_j \, \mathbb{P}([S = k - j]) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1} \, \mathbb{P}([S_{n+1} = k])$$

D'après la question ***10.c)*** :

$$\mathbb{P}([S = k]) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1} \; \mathbb{P}([S_{n+1} = k])$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([S = k]) \;&=\; \sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{b\, j}{k}\right) q_j \, \mathbb{P}([S = k - j]) \\
&=\; \left(a + \frac{b \times 0}{k}\right) q_0 \; \mathbb{P}([S = k - 0]) + \sum_{j=1}^{k} \left(a + \frac{b\, j}{k}\right) q_j \, \mathbb{P}([S = k - j]) \\
&=\; a\, q_0 \; \mathbb{P}([S = k]) + \sum_{j=1}^{k} \left(a + \frac{b\, j}{k}\right) q_j \, \mathbb{P}([S = k - j])
\end{aligned}$$

D'où :

$$(1 - a\, q_0) \; \mathbb{P}([S = k]) \;=\; \sum_{j=1}^{k} \left(a + \frac{b\, j}{k}\right) q_j \, \mathbb{P}([S = k - j])$$

Or, comme $q_0 \in [0, 1]$: $1 - a\, q_0 > 0$ (démontré en question ***6.***).

$$\boxed{\text{On obtient : } \mathbb{P}([S = k]) \;=\; \frac{1}{1 - a\, q_0} \sum_{j=1}^{k} \left(a + \frac{b\, j}{k}\right) q_j \, \mathbb{P}([S = k - j]).}$$

□