DS2 (version B) /168

Exercice 1 (HEC 2017) /33

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrés à n lignes et n colonnes à coefficients réels et B_n l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 0 ou à 1.

1. *Exemple 1.* Soit A la matrice de B_2 définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer la matrice A^2.

- **1 pt :** $A^2 = I_2$

b) Quelles sont les valeurs propres de A ?

- **1 pt :** $\mathrm{Sp}(A) \subset \{-1, 1\}$
- **1 pt :** $1 \in \mathrm{Sp}(A)$
- **1 pt :** $-1 \in \mathrm{Sp}(A)$

c) La matrice A est-elle diagonalisable ?

- **1 pt**

2. *Exemple 2.* Soit B la matrice de B_3 définie par : $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère les instructions et la sortie **Python** suivantes :

```
B = np.matrix([[0,1,0], [1,0,0], [0,0,1]])
P = np.matrix([[1,1,0], [1,-1,0], [0,0,1]])
Q = np.linalg.inv(P)
D = np.dot(Q, np.dot(B, P))
```

```
In [1] : D
Out [1] : matrix( [ [1.,  0.,  0.],
                    [0., −1.,  0.],
                    [0.,  0.,  1.] ] )
```

a) Déduire les valeurs propres de B de la séquence **Python** précédente.

- **1 pt :** B **semblable à** $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $\mathrm{Sp}(B) = \{-1, 1\}$

b) Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de B.

- **1 pt :** $E_{-1}(B) \supset \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ **et** $E_1(B) \supset \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
- **1 pt :** $\dim(E_{-1}(B)) \geqslant 1$ **et** $\dim(E_1(B)) \geqslant 2$
- **1 pt :** $\dim(E_{-1}(B)) = 1$ **et** $\dim(E_1(B)) = 2$ **(car** B **diagonalisable)**

3. a) Combien existe-t-il de matrices appartenant à B_n ?

- **2 pts :** $\text{Card}(B_n) = 2^{n^2}$

b) Combien existe-t-il de matrices de B_n dont chaque ligne et chaque colonne comporte exactement un coefficient égal à 1 ?

- **2 pts :** $n!$

4. Dans cette question, n est un entier supérieur ou égal à 2.
Soit E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E. On note :

– id l'endomorphisme identité de E ;
– F le noyau de l'endomorphisme $(u + \text{id})$ et G le noyau de l'endomorphisme $(u - \text{id})$;
– p la dimension de F et q la dimension de G.

On suppose que $u \circ u = \text{id}$.

a) Justifier que l'image de $(u - \text{id})$ est incluse dans F.

- **2 pts**

b) En déduire l'inégalité : $p + q \geqslant n$.

- **1 pt :** $\dim(\text{Im}(u - \text{id})) \leqslant \dim(\text{Ker}(u + \text{id})) = p$
- **1 pt :** $\dim(\text{Im}(u - \text{id})) = n - p$ **par théorème du rang**
- **1 pt :** $p + q \geqslant n$

On suppose désormais que $1 \leqslant p < q$.
Soit $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ une base de F et $(g_1, g_2, \ldots, g_q)$ une base de G.

c) Justifier que $(f_1, f_2, \ldots, f_p,\ g_1, g_2, \ldots, g_q)$ est une base de E.

- **1 pt :** -1 **et** 1 **valeurs propres de** u **(et** $F = E_{-1}(u)$ **et** $G = E_1(u)$**)**
- **1 pt :** $(f_1, \ldots, f_p)$ **libre car base de** $E_{-1}(u)$ **(idem pour** $(g_1, \ldots, g_q)$**)**
- **1 pt :** $\mathcal{F}$ **libre car concaténation de familles libres associées à des valeurs propres distinctes.**
- **1 pt :** $\text{Card}(\mathcal{F}) = p + q \leqslant n = \dim(E)$
- **1 pt :** $\text{Card}(\mathcal{F}) = \dim(E)$**, donc** $\mathcal{F}$ **base de** E **(car libre)**

d) Calculer $u(g_1 - f_1)$ et $u(g_1 + f_1)$.

- **1 pt :** $u(g_1 - f_1) = g_1 + f_1$
- **1 pt :** $u(g_1 + f_1) = g_1 - f_1$

e) Trouver une base de E dans laquelle la matrice de u appartient à B_n.

- **3 pts :** $\mathscr{B}' = (g_1 - f_1, g_1 + f_1, \ldots, g_p - f_p, g_p + f_p, g_{p+1}, \ldots, g_q)$ **libre**
- **1 pt :** $\mathscr{B}'$ **base de** E
- **3 pts :** $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) =$

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccccccccc} u(r_1) & u(s_1) & \ldots & u(r_i) & u(s_i) & \ldots & u(r_p) & u(s_p) & u(g_{p+1}) & \ldots & u(g_q) \end{array} & \\
\left(\begin{array}{ccccccccccc}
0 & 1 & & & & & & & 0 & \cdots & 0 \\
1 & 0 & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & \ddots & & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & 0 & 1 & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & 1 & 0 & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & \ddots & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & 0 & 1 & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & & \\
\vdots & & & & & & & \vdots & & \ddots & \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & & 1
\end{array}\right) &
\begin{array}{c} r_1 \\ s_1 \\ \vdots \\ r_i \\ s_i \\ \vdots \\ r_p \\ s_p \\ g_{p+1} \\ \vdots \\ g_q \end{array}
\end{array}$$

Exercice 2 /37

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

et on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2 - 6y$$

On pose enfin $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1. Vérifier que $\varphi > 1$ et que les réels φ et $\dfrac{-1}{\varphi}$ sont les solutions de l'équation : $x^2 - x - 1 = 0$.

- **1 pt :** $5 > 4$ **donc** $\varphi > 1$
- **1 pt :** φ **solution de** $x^2 - x - 1 = 0$
- **1 pt :** $\frac{-1}{\varphi}$ **solution de** $x^2 - x - 1 = 0$ **(quel que soit la longueur du calcul)**

2. a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

- **1 pt :** f **est polynomiale**

b) Montrer que les seuls points critiques de f sont $(\varphi, \varphi+1)$ et $\left(-\dfrac{1}{\varphi}, \dfrac{1}{\varphi+1}\right)$.

- **1 pt :** f **est de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur l'ouvert** $\mathbb{R}^2$ **(0 si ouvert n'est pas mentionné)**
- **1 pt :** $\partial_1(f)(x,y) = 6x^2 - 6y$ **et** $\partial_1(f)(x,y) = -6x + 6y - 6$
- **3 pts : résolution** $\nabla(f)(x,y) = (0,0)$ **(1 pt pour faire apparaître** $x^2 - x - 1 = 0$**, 1 pt** $x = \varphi$ `OU` $x = -\frac{1}{\varphi}$ **et 1 pt :** $-\frac{1}{\varphi} + 1 = \frac{1}{\varphi+1}$

c) Étudier la nature des points critiques de f.

- 1 pt : $\nabla^2(f)(x,y) = 6 \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

- 4 pts : étude de $H_1 = \nabla^2(f)(\varphi, \varphi+1) = 6\begin{pmatrix} 2\,\varphi & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

- **1 pt :** $det(H_1 - \lambda) = 6\ \big(\lambda^2 - (2\,\varphi+1)\,\lambda + 2\,\varphi - 1\big)$
- **1 pt :** $\Delta = 4\,\varphi^2 - 4\,\varphi + 5 = 4\,(\varphi^2 - \varphi - 1) + 9 = 9$
- **1 pt :** $\mathrm{Sp}(H_1) = \{\varphi+2, \varphi-1\}$
- **1 pt :** $\varphi + 2 < 0$ **et** $\varphi - 1 > 0$ **dont** f **admet un minimum**

- 2 pts : étude de $H_2 = \nabla^2(f)(-\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi+1}) = 6\begin{pmatrix} 2\,\frac{-1}{\varphi} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

L'étude est la même car $\frac{-1}{\varphi}$ **est aussi solution de** $x^2 - x - 1 = 0$

- **1 pt :** $\mathrm{Sp}(H_2) = \{\frac{-1}{\varphi} + 2, \frac{-1}{\varphi} - 1\}$
- **1 pt :** $\frac{-1}{\varphi} + 2 > 0$ **et** $\frac{-1}{\varphi} - 1 < 0$ **dont** f **admet un point selle**

3. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.

- 1 pt : initialisation

- 2 pts : hérédité

4. a) Recopier et compléter la fonction **Python** suivante afin que, prenant en argument un entier $n \geqslant 2$, elle calcule et renvoie la valeur du terme u_n de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

```
1  def suite(n) :
2      v = 0
3      w = 1
4      for k in range(2, n+1) :
5          ..........
6          ..........
7          ..........
8      u = ..........
9      return u
```

- 4 pts : 1 pt pour chaque ligne (ligne 5 / ligne 6 / ligne 7 / ligne 9)

```
5          aux = v + w
6          v = w
7          w = aux
8      u = w
```

b) Justifier qu'il existe des réels λ et μ, que l'on déterminera, tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda\,\varphi^n + \mu\left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n$$

Étude suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$

- 1 pt : $u_n = \lambda\ \varphi^n + \mu\ \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n$

- 1 pt : $\left\{\begin{array}{ccccc} \lambda & + & \mu & = & 0 \\ \lambda\ \varphi & + & \mu\ \left(\frac{-1}{\varphi}\right) & = & 1 \end{array}\right.$

- 1 pt : résolution du système ($\lambda = \frac{\varphi}{\varphi^2+1}$ **et** $\mu = -\lambda$**)**

c) En déduire que la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge et déterminer sa limite.

- 1 pt : $\varphi > 1$ **donc** $\varphi^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ **et** $\frac{(-1)^n}{\varphi^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ **donc** $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda\,\varphi^n$ **et** $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda\,\varphi^{n+1}$

- 1 pt : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \varphi$

5. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}$.

a) Montrer, sans chercher à calculer de somme, que la série de terme général $\dfrac{1}{u_n\,u_{n+1}}$ converge.

- 1 pt : $u_n\,u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda^2\;\varphi^n\,\varphi^{n+1}$ **donc** $\dfrac{1}{u_n\,u_{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\lambda^2\,\varphi}\;\left(\dfrac{1}{\varphi^2}\right)^n$

- 2 pts : critère d'équivalence avec $\sum\; q^n$ **pour** $q = \dfrac{1}{\varphi^2} \in\,]0,1[$

b) En déduire que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

- 1 pt : $\sum\; \dfrac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}$ **absolument convergente à l'aide de la question précédente**

c) En utilisant le résultat de la question 3, montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_{n+1} - S_n \;=\; \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}$$

- 1 pt : $S_{n+1} - S_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1}\,u_{n+2}}$

- 1 pt : $(-1)^{n+1} = u_n\,u_{n+2} - u_{n+1}^2$

d) Montrer : $\varphi = 1 - \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}$.

- 1 pt : sommation télescopique $\sum\limits_{n=1}^{N} (S_{n+1} - S_n) = S_{N+1} - S_1 = \frac{u_1}{u_2} - \frac{u_{N+1}}{u_{N+2}} = 1 - \frac{u_{N+1}}{u_{N+2}}$

- 1 pt : ainsi (comme $S_1 = -1$**) alors** $S_{N+1} = -\frac{u_{N+1}}{u_{N+2}} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{\varphi}$

- 1 pt : $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$ **donc** $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{=} 1 - \varphi$

Problème (`Ecricome 2018 voie S`) /98

Toutes les variables aléatoires dans ce problème sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Partie 1 – Variables vérifiant une relation de Panjer /48

On dit qu'une variable aléatoire N, à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifie une relation de Panjer s'il existe un réel $a < 1$ et un réel b tels que :

$$\mathbb{P}([N=0]) \neq 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([N=k]) = \left(a + \frac{b}{k}\right) \mathbb{P}([N=k-1])$$

1. On suppose **dans cette question** que $a = 0$, et que b est un réel strictement positif.

a) Montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}([N=k]) = \frac{b^k}{k!}\, \mathbb{P}([N=0])$$

- 1 pt : initialisation

- 2 pts : hérédité

b) Calculer $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N=k])$. En déduire que N suit une loi de Poisson de paramètre b.
Préciser son espérance et sa variance.

- 2 pts : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N=k]) = \mathbb{P}([N=0])\ \mathrm{e}^b$ **(dont 1 pt pour justification convergence)**

- 2 pts : $\mathbb{P}([N=0]) = \mathrm{e}^{-b}$ **(dont 1 pt pour** $([N=k])_{k\in\mathbb{N}}$ **SCE)**

- 1 pt : $N \hookrightarrow \mathcal{P}(b)$

- 1 pt : $\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N) = b$

2. On suppose **dans cette question** que $a < 0$ et que $b = -2a$.

a) Montrer :

$$\forall k \geqslant 2, \quad \mathbb{P}([N=k]) = 0$$

- 1 pt : initialisation

- 2 pts : hérédité

b) En déduire que N suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre en fonction de a.

- 1 pt : N **suit une loi** $\mathcal{B}(p)$ **où** $p = \mathbb{P}([N=1])$

- 2 pts : $\mathbb{P}([N=1]) = -\dfrac{a}{1-a}$

3. On suppose **dans cette question** que Z suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \,]0,1[$.

a) Montrer :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \mathbb{P}([Z=k]) = \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \times \mathbb{P}([Z=k-1])$$

- 2 pts

b) En déduire que Z vérifie une relation de Panjer en précisant les valeurs de a et b correspondantes, en fonction de n et p.

- **1 pt :** $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}$ **et** $\mathbb{P}([Z=0]) \neq 1$
- **3 pts : cas** $k \in [\![1,n]\!]$ **(dont 1 pt pour** $a = -\dfrac{p}{1-p}$**, 1 pt pour** $b = \dfrac{p}{1-p}\,(n+1)$**)**
- **1 pt : cas** $k = n+1$
- **1 pt : cas** $k \in [\![n+2,+\infty[\![$

4. On revient dans cette question au cas général : a est un réel vérifiant $a < 1$, b est un réel, et on suppose que N est une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifiant la relation de Panjer.

a) Calculer $\mathbb{P}([N=1])$. En déduire : $a+b \geqslant 0$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}([N=1]) = (a+b)\,\mathbb{P}([N=0])$
- **1 pt :** $a+b \geqslant 0$

b) Montrer, pour tout entier $m \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{m} k\,\mathbb{P}([N=k]) \;=\; a\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)\,\mathbb{P}([N=k]) + b\sum_{k=0}^{m-1}\mathbb{P}([N=k])$$

- **2 pts : 1 pt pour utilisation relation de Panjer, 1 pt pour décalage d'indice**

c) En déduire que $\left((1-a)\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k\,\mathbb{P}([N=k])\right)_{m\geqslant 1}$ est majorée, puis que N admet une espérance. Préciser alors la valeur de $\mathbb{E}(N)$ en fonction de a et b.

- **1 pt :** $(1-a)\displaystyle\sum_{k=1}^{m-1} k\,\mathbb{P}([N=k]) \;=\; (a+b)\sum_{k=0}^{m-1}\mathbb{P}([N=k]) - m\,\mathbb{P}([N=m])$
- **1 pt :** $(1-a)\displaystyle\sum_{k=1}^{m-1} k\,\mathbb{P}([N=k]) \;\leqslant\; (a+b)\sum_{k=0}^{m-1}\mathbb{P}([N=k])$
- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}\mathbb{P}([N=k]) \;\leqslant\; 1$
- **1 pt :** $(1-a)\displaystyle\sum_{k=1}^{m-1} k\,\mathbb{P}([N=k]) \;\leqslant\; a+b$ **(car** $a+b \geqslant 0$**)**
- **1 pt :** $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k\,\mathbb{P}([N=k])\right)_{m\geqslant 1}$ **converge (par théorème de limite monotone)**
- **1 pt :** N **admet une espérance (convergence absolue)**
- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} m\,\mathbb{P}([N=m]) = 0$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(n) = \dfrac{a+b}{1-a}$

d) Montrer que N admet un moment d'ordre 2 et :

$$\mathbb{E}\big(N^2\big) \;=\; \frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2}$$

- **1 pt : convergence absolue**
- **2 pts :** $(1-a)\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} k^2\,\mathbb{P}([N=k]) \;=\; (2a+b)\sum_{k=0}^{m-1} k\,\mathbb{P}([N=k]) + (a+b)\sum_{k=0}^{m-1}\mathbb{P}([N=k]) \;-\; m^2\,\mathbb{P}([N=m])$

- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} k^2\, \mathbb{P}([N=k]) \ \leqslant\ \frac{2a+b}{1-a} \sum_{k=0}^{m-1} k\, \mathbb{P}([N=k]) + \frac{a+b}{1-a} \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k])$
- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} k^2\, \mathbb{P}([N=k]) \ \leqslant\ \frac{2a+b}{1-a}\, \mathbb{E}(N) + \frac{a+b}{1-a}$
- **1 pt :** N **admet un moment d'ordre** 2 **(théorème de la limite monotone)**
- **2 pts :** $\mathbb{E}(N^2) = \dfrac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2}$

e) En déduire que N admet une variance et préciser la valeur de $\mathbb{V}(N)$ en fonction de a et b.

- **1 pt :** N **admet une variance**
- **1 pt :** $\mathbb{V}(N) = \dfrac{a+b}{(1-a)^2}$

f) Montrer que $\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N)$ si, et seulement si, N suit une loi de Poisson.

- **1 pt :** $(\Leftarrow)$
- **4 pts :** $(\Rightarrow)$ **(1 pt pour :** $\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N) \Leftrightarrow a = 0$ `OU` $a+b=0$**, 2 pts pour** $a=0$ **(par l'absurde), 1 pt pour** $b>0$**)**

Partie 2 – Fonction génératrice /20

On notera dans la suite :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p_k = \mathbb{P}([N=k])$$

où N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

5. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0,1]$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} p_n\, x^n$ est convergente.

- **1 pt : cas** $x=1$
- **3 pts : cas** $x \in [0,1[$ **(critère de comparaison des SATP)**

On appelle alors **fonction génératrice de** N la fonction G définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1], \quad G(x) \ = \ \sum_{k=0}^{+\infty} p_k\, x^k \ = \ \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N=k])\, x^k$$

et on suppose dans cette partie que N vérifie une relation de Panjer avec $0<a<1$ et que $\dfrac{b}{a}>0$. On pose : $\alpha = \dfrac{-(a+b)}{a}$.

On note enfin f la fonction définie par :

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = p_0\, (1-a\,x)^{\alpha}$$

6. Montrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in [0,1], \quad f^{(k)}(x) \ = \ k! \times p_k\, (1-a\,x)^{\alpha-k}$$

- **2 pts :** f_0 **de classe** $\mathcal{C}^\infty$ **sur** $[0,1]$ **(dont 1 pt pour démontrer** $h_1([0,1]) \subset \,]0,+\infty[$**)**
- **1 pt : initialisation**
- **3 pts : hérédité**

7. Soit $x \in [0,1]$.

a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, montrer :

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} p_k\, x^k + (n+1)\, p_{n+1} \int_0^x (1-a\,t)^{\alpha-n-1}\, (x-t)^n \; dt$$

- 0 pt : hors programme

b) Vérifier, pour tout $t \in [0,x]$: $\dfrac{x-t}{1-at} \leqslant 1$. Puis montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \;\leqslant\; \int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1}\, (x-t)^n \; dt \;\leqslant\; \int_0^x (1-at)^{\alpha-1} \; dt$$

- 2 pts : $\dfrac{x-t}{1-a\,t} \leqslant 1$

- 1 pt : $0 \;\leqslant\; (1-a\,t)^{\alpha-n-1}\; (x-t)^n \;\leqslant\; (1-a\,t)^{\alpha-1}$

- 1 pt : croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant

c) En déduire :

$$G(x) \;=\; p_0\, (1-ax)^{\alpha}$$

En calculant $G(1)$, exprimer p_0 en fonction de a, b et α, et vérifier : $G'(1) = \mathbb{E}(N)$.

- 2 pts : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (n+1)\, p_{n+1} \int_0^x (1-a\,t)^{\alpha-n-1}\; (x-t)^n \; dt \;=\; 0$

- 1 pt : $f(x) = G(x)$ **(d'après *5.*)**

- 1 pt : $G(1) = 1$

- 1 pt : $p_0 = \dfrac{1}{(1-a)^{\alpha}}$

- 1 pt : $G'(1) = \dfrac{a+b}{1-a} = \mathbb{E}(N)$

Partie 3 – formule de récursivité /30

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$, mutuellement indépendantes et indépendantes de la variable N étudiée dans la question *4.* de la **Partie 1**.
On considère alors la variable aléatoire S définie par :

$$S \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } N = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{N} X_k & \text{si } N \geqslant 1 \end{cases}$$

Autrement dit :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad S(\omega) = 0 \;\text{ si }\; N(\omega) = 0 \qquad \text{et} \qquad S(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega) \;\text{ sinon}$$

8. Calculer $\mathbb{P}([S=0])$ lorsque $a \in\,]0,1[$ à l'aide de la **Partie 2**.

- 1 pt : FPT sur le SCE $([N=i])_{i\in\mathbb{N}}$

- 1 pt : $\mathbb{P}([S=0] \cap [N=0]) = p_0 = \dfrac{1}{(1-a)^{\alpha}}$

- 1 pt : $[S=0] \cap [N=i] = \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{i} X_k = 0\right] \cap [N=i]$

- **1 pt :** $\left[\sum\limits_{k=1}^{i} X_k = 0\right] = \bigcap\limits_{k=1}^{i} [X_k = 0]$
- **2 pts :** $\mathbb{P}([S=0]\cap[N=i]) = p_i\ x_0^i$ **où** $x_0 = \mathbb{P}([X_1=0])$ **(1 pt pour indépendance mutuelle, 1 pt pour les X_i ont même loi)**
- **2 pts :** $\mathbb{P}([S=0]) = G(x_0)$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([S=0]) = \left(\dfrac{1-a\,x_0}{1-a}\right)^{\alpha}$

9. a) Calculer $\mathbb{P}([S=0])$ lorsque N suit une loi de Poisson de paramètre λ.

- **1 pt :** $\mathbb{P}([S=0]\cap[N=0]) = \mathrm{e}^{-\lambda}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([S=0]\cap[N=i]) = \dfrac{(\lambda\,x_0)^i}{i!}\ \mathrm{e}^{-\lambda}$
- **2 pts :** $\mathbb{P}([S=0]) = \mathrm{e}^{-(1-x_0)\lambda}$ **où** $x_0 = \mathbb{P}([X_1=0])$

b) On considère la fonction **Python** suivante, où n est un paramètre dont dépend la loi commune des X_k :

```python
def simuX(n) :
    y = 0 ;
    for i in range(n) :
        if rd.random() < 1/2 :
            y = y + 1
    return y
```

Quelle loi de probabilité est simulée par la fonction `simulX` ? Préciser ses paramètres.

- **2 pts : il s'agit de la loi** $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$

c) On rappelle qu'en **Python** l'instruction `nr.poisson(lambda, 1)` (du module `numpy.random`, abrégé en `nr`) renvoie une réalisation d'une loi de Poisson de paramètre `lambda`.
On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ, et que la loi des variables X_k est celle simulée à la question précédente par la fonction `simulX`.
Recopier et compléter la fonction **Python** suivante, afin qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire S :

```python
def simulS(lambda, n) :
    N = nr.poisson(lambda, 1)
    ..........
    ..........
    ..........
    ..........
    return s
```

- **4 pts : 1 pt pour initialisation s, 1 pt pour structure conditionnelle, 2 pts pour boucle for**

```python
    s = 0
    if N >= 1 :
        for k in range(N) :
            s = s + simuX(n)
```

10. Dans la suite du problème, on revient au cas général où N vérifie la relation de Panjer. On note toujours :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p_k = \mathbb{P}([N = k])$$

et on notera également :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad q_k = \mathbb{P}([X_1 = k])$$

On considère pour tout entier $n \geqslant 1$, la variable aléatoire $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, en convenant qu'on a $S_0 = 0$. Enfin, on admet le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{b\,j}{k}\right) q_j\, \mathbb{P}([S_n = k-j]) \;=\; \left(a + \frac{b}{n+1}\right) \mathbb{P}([S_{n+1} = k])$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer :

$$\forall j \in [\![0, k]\!], \quad \mathbb{P}([S = k-j]) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} p_n\, \mathbb{P}([S_n = k-j])$$

- 1 pt : FPT sur le SCE $([N = n])_{n\in\mathbb{N}}$

- 1 pt : $[N = 0] \cap [S = k-j] = [N = 0] \cap [S_0 = k-j]$

- 1 pt : $[N = n] \cap [S = k-j] = [N = n] \cap [S_n = k-j]$

b) Montrer :

$$\sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{b\,j}{k}\right) q_j\, \mathbb{P}([S = k-j]) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1}\, \mathbb{P}([S_{n+1} = k])$$

- 3 pts

c) Justifier :

$$\mathbb{P}([S = k]) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1}\, \mathbb{P}([S_{n+1} = k])$$

- 2 pts : 1 pt pour $\mathbb{P}([S = k]) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n\ \mathbb{P}([S_n = k])$**, 1 pt pour décalage d'indice**

d) En déduire finalement :

$$\mathbb{P}([S = k]) \;=\; \frac{1}{1 - a\,q_0} \sum_{j=1}^{k} \left(a + \frac{b\,j}{k}\right) q_j\, \mathbb{P}([S = k-j])$$

- 1 pt : $\mathbb{P}([S = k]) = \sum\limits_{j=0}^{k} \left(a + \dfrac{b\,j}{k}\right) q_j\, \mathbb{P}([S = k-j])$

- 1 pt : $(1 - a\,q_0)\ \mathbb{P}([S = k]) \;=\; \sum\limits_{j=1}^{k} \left(a + \dfrac{b\,j}{k}\right) q_j\, \mathbb{P}([S = k-j])$

- 1 pt : $\mathbb{P}([S = k]) \;=\; \dfrac{1}{1 - a\,q_0} \sum\limits_{j=1}^{k} \left(a + \dfrac{b\,j}{k}\right) q_j\, \mathbb{P}([S = k-j])$ **(car** $1 - a\,q_0 > 0$**)**