DS2 (version B)

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrés à n lignes et n colonnes à coefficients réels et B_n l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 0 ou à 1.

1. *Exemple 1.* Soit A la matrice de B_2 définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer la matrice A^2.

b) Quelles sont les valeurs propres de A ?

c) La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. *Exemple 2.* Soit B la matrice de B_3 définie par : $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère les instructions et la sortie **Python** suivantes :

```
B = np.matrix([[0,1,0], [1,0,0], [0,0,1]])
P = np.matrix([[1,1,0], [1,-1,0], [0,0,1]])
Q = np.linalg.inv(P)
D = np.dot(Q, np.dot(B, P))
```

```
In [1] :   D

Out [1] :  matrix( [ [1.,  0.,  0.],
                     [0., -1.,  0.],
                     [0.,  0.,  1.] ] )
```

a) Déduire les valeurs propres de B de la séquence **Python** précédente.

b) Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de B.

3. a) Combien existe-t-il de matrices appartenant à B_n ?

b) Combien existe-t-il de matrices de B_n dont chaque ligne et chaque colonne comporte exactement un coefficient égal à 1 ?

4. Dans cette question, n est un entier supérieur ou égal à 2.
Soit E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E. On note :

– id l'endomorphisme identité de E ;
– F le noyau de l'endomorphisme $(u + \text{id})$ et G le noyau de l'endomorphisme $(u - \text{id})$;
– p la dimension de F et q la dimension de G.

On suppose que $u \circ u = \text{id}$.

a) Justifier que l'image de $(u - \text{id})$ est incluse dans F.

b) En déduire l'inégalité : $p + q \geqslant n$.

On suppose désormais que $1 \leqslant p < q$.
Soit $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ une base de F et $(g_1, g_2, \ldots, g_q)$ une base de G.

c) Justifier que $(f_1, f_2, \ldots, f_p,\ g_1, g_2, \ldots, g_q)$ est une base de E.

d) Calculer $u(g_1 - f_1)$ et $u(g_1 + f_1)$.

e) Trouver une base de E dans laquelle la matrice de u appartient à B_n.

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

et on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2 - 6y$$

On pose enfin $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1. Vérifier que $\varphi > 1$ et que les réels φ et $\dfrac{-1}{\varphi}$ sont les solutions de l'équation : $x^2 - x - 1 = 0$.

2. ***a)*** Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que les seuls points critiques de f sont $(\varphi, \varphi+1)$ et $\left(-\dfrac{1}{\varphi}, \dfrac{1}{\varphi+1}\right)$.

c) Étudier la nature des points critiques de f.

3. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.

4. ***a)*** Recopier et compléter la fonction **Python** suivante afin que, prenant en argument un entier $n \geqslant 2$, elle calcule et renvoie la valeur du terme u_n de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

```
def suite(n) :
    v = 0
    w = 1
    for k in range(2, n+1) :
        ..........
        ..........
        ..........
    u = ..........
    return u
```

b) Justifier qu'il existe des réels λ et μ, que l'on déterminera, tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda\,\varphi^n + \mu\left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n$$

c) En déduire que la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge et déterminer sa limite.

5. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}$.

a) Montrer, sans chercher à calculer de somme, que la série de terme général $\dfrac{1}{u_n u_{n+1}}$ converge.

b) En déduire que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

c) En utilisant le résultat de la question 3, montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_{n+1} - S_n \;=\; \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}$$

d) Montrer : $\varphi = 1 - \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}$.

Problème

Toutes les variables aléatoires dans ce problème sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Partie 1 – Variables vérifiant une relation de Panjer

On dit qu'une variable aléatoire N, à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifie une relation de Panjer s'il existe un réel $a < 1$ et un réel b tels que :

$$\mathbb{P}([N=0]) \neq 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([N=k]) = \left(a + \frac{b}{k}\right) \mathbb{P}([N=k-1])$$

1. On suppose **dans cette question** que $a = 0$, et que b est un réel strictement positif.

a) Montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}([N=k]) = \frac{b^k}{k!}\, \mathbb{P}([N=0])$$

b) Calculer $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N=k])$. En déduire que N suit une loi de Poisson de paramètre b.
Préciser son espérance et sa variance.

2. On suppose **dans cette question** que $a < 0$ et que $b = -2a$.

a) Montrer :

$$\forall k \geqslant 2, \quad \mathbb{P}([N=k]) = 0$$

b) En déduire que N suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre en fonction de a.

3. On suppose **dans cette question** que Z suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in\,]0,1[$.

a) Montrer :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \mathbb{P}([Z=k]) = \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \times \mathbb{P}([Z=k-1])$$

b) En déduire que Z vérifie une relation de Panjer en précisant les valeurs de a et b correspondantes, en fonction de n et p.

4. On revient dans cette question au cas général : a est un réel vérifiant $a < 1$, b est un réel, et on suppose que N est une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifiant la relation de Panjer.

a) Calculer $\mathbb{P}([N=1])$. En déduire : $a+b \geqslant 0$.

b) Montrer, pour tout entier $m \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{m} k\,\mathbb{P}([N=k]) \;=\; a\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)\,\mathbb{P}([N=k]) + b\sum_{k=0}^{m-1}\mathbb{P}([N=k])$$

c) En déduire que $\left((1-a)\sum\limits_{k=1}^{m} k\,\mathbb{P}([N=k])\right)_{m\geqslant 1}$ est majorée, puis que N admet une espérance. Préciser alors la valeur de $\mathbb{E}(N)$ en fonction de a et b.

d) Montrer que N admet un moment d'ordre 2 et :

$$\mathbb{E}\big(N^2\big) \;=\; \frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2}$$

e) En déduire que N admet une variance et préciser la valeur de $\mathbb{V}(N)$ en fonction de a et b.

f) Montrer que $\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N)$ si, et seulement si, N suit une loi de Poisson.

Partie 2 – Fonction génératrice

On notera dans la suite :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p_k = \mathbb{P}([N=k])$$

où N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

5. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0,1]$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} p_n\,x^n$ est convergente.

On appelle alors **fonction génératrice de** N la fonction G définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1], \quad G(x) \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty} p_k\,x^k \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N=k])\,x^k$$

et on suppose dans cette partie que N vérifie une relation de Panjer avec $0 < a < 1$ et que $\dfrac{b}{a} > 0$. On pose : $\alpha = \dfrac{-(a+b)}{a}$.

On note enfin f la fonction définie par :

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = p_0\,(1-a\,x)^{\alpha}$$

6. Montrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in [0,1], \quad f^{(k)}(x) \;=\; k! \times p_k\,(1-a\,x)^{\alpha-k}$$

7. Soit $x \in [0,1]$.

a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, montrer :

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} p_k\,x^k + (n+1)\,p_{n+1}\int_0^x (1-a\,t)^{\alpha-n-1}\,(x-t)^n\,dt$$

b) Vérifier, pour tout $t \in [0, x]$: $\dfrac{x-t}{1-at} \leqslant 1$. Puis montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \ \leqslant \ \int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1}\,(x-t)^n \ dt \ \leqslant \ \int_0^x (1-at)^{\alpha-1} \ dt$$

c) En déduire :

$$G(x) \ = \ p_0\,(1-ax)^{\alpha}$$

En calculant $G(1)$, exprimer p_0 en fonction de a, b et α, et vérifier : $G'(1) = \mathbb{E}(N)$.

Partie 3 – formule de récursivité

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$, mutuellement indépendantes et indépendantes de la variable N étudiée dans la question ***4.*** de la **Partie 1**.
On considère alors la variable aléatoire S définie par :

$$S \ = \ \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } N = 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{N} X_k & \text{si } N \geqslant 1 \end{array} \right.$$

Autrement dit :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad S(\omega) = 0 \ \text{ si } \ N(\omega) = 0 \qquad \text{et} \qquad S(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega) \ \text{ sinon}$$

8. Calculer $\mathbb{P}([S = 0])$ lorsque $a \in \,]0, 1[$ à l'aide de la **Partie 2**.

9. ***a)*** Calculer $\mathbb{P}([S = 0])$ lorsque N suit une loi de Poisson de paramètre λ.

b) On considère la fonction **Python** suivante, où n est un paramètre dont dépend la loi commune des X_k :

```python
def simuX(n) :
    y = 0 ;
    for i in range(n) :
        if rd.random() < 1/2 :
            y = y + 1
    return y
```

Quelle loi de probabilité est simulée par la fonction `simulX` ? Préciser ses paramètres.

c) On rappelle qu'en **Python** l'instruction `nr.poisson(lambda, 1)` (du module `numpy.random`, abrégé en `nr`) renvoie une réalisation d'une loi de Poisson de paramètre `lambda`.
On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ, et que la loi des variables X_k est celle simulée à la question précédente par la fonction `simulX`.
Recopier et compléter la fonction **Python** suivante, afin qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire S :

```python
def simulS(lambda, n) :
    N = nr.poisson(lambda, 1)
    ..........
    ..........
    ..........
    ..........
    return s
```

10. Dans la suite du problème, on revient au cas général où N vérifie la relation de Panjer. On note toujours :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p_k = \mathbb{P}([N = k])$$

et on notera également :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad q_k = \mathbb{P}([X_1 = k])$$

On considère pour tout entier $n \geqslant 1$, la variable aléatoire $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, en convenant qu'on a $S_0 = 0$. Enfin, on admet le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{b\,j}{k}\right) q_j\, \mathbb{P}([S_n = k - j]) \ = \ \left(a + \frac{b}{n+1}\right) \mathbb{P}([S_{n+1} = k])$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer :

$$\forall j \in [\![0, k]\!], \quad \mathbb{P}([S = k - j]) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} p_n\, \mathbb{P}([S_n = k - j])$$

b) Montrer :

$$\sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{b\,j}{k}\right) q_j\, \mathbb{P}([S = k - j]) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1}\, \mathbb{P}([S_{n+1} = k])$$

c) Justifier :

$$\mathbb{P}([S = k]) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1}\, \mathbb{P}([S_{n+1} = k])$$

d) En déduire finalement :

$$\mathbb{P}([S = k]) \ = \ \frac{1}{1 - a\,q_0} \sum_{j=1}^{k} \left(a + \frac{b\,j}{k}\right) q_j\, \mathbb{P}([S = k - j])$$