DS2 (version A)

Exercice 1 (ECRICOME 2008)

À tout couple (a,b) de deux réels, on associe la matrice $M(a,b)$ définie par :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix}$$

On désigne par E l'ensemble des matrices $M(a,b)$ où a et b décrivent $\mathbb{R}$.
Ainsi : $E = \{M(a,b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.
On note I la matrice identité $M(1,0)$ et A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Démonstration.
On remarque :

$$\begin{aligned} E &= \left\{M(a,b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{a\, I + b\, A \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \operatorname{Vect}(I, A) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } E \text{ est bien un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).}$$

Commentaire

- Ici, E est un ensemble dont les éléments sont des matrices écrites à l'aide de paramètres. Il y a tout lieu de penser que cet ensemble va pouvoir facilement s'écrire comme espace vectoriel engendré par une partie.
- Cette méthode présente un double avantage. En effet, en plus de démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on obtient de plus que famille $\mathcal{F}_0 = (I, A)$ est génératrice de E. Ainsi :
  - × si $\mathcal{F}_0$ est une famille libre, c'est alors une base de E.
  - × si $\mathcal{F}_0$ est une famille liée, on peut extraire de $\mathcal{F}_0$ une base $\mathcal{G}$ de E. La famille $\mathcal{G}$ n'est autre que la famille $\mathcal{F}_0$ dans laquelle on a retiré tout vecteur qui s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{F}_0$.

□

Commentaire

- Si la rédaction précédente est celle attendue, il arrive parfois qu'on ne puisse pas l'utiliser (dans certains cas, l'ensemble étudié ne s'écrit pas naturellement comme espace vectoriel engendré par une partie). Il est donc important de savoir utiliser la méthode consistant à revenir à la définition de sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
- Rappelons ci-dessous la rédaction.

(i) $E \subset \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

(ii) $E \neq \varnothing$ car $0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} = M(0,0) \in E$.

(iii) Démontrons que E est stable par combinaisons linéaires.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(U, V) \in E^2$.

× Comme $U \in E$, il existe $(a_1, b_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que $U = M(a_1, b_1)$.

× Comme $V \in E$, il existe $(a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $U = M(a_2, b_2)$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
& \lambda \cdot U + \mu \cdot V \\
= \ & \lambda \cdot M(a_1, b_1) + \mu \cdot M(a_2, b_2) \\
= \ & \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 + 2b_1 & -b_1 & -2b_1 \\ 2b_1 & a_1 - b_1 & -4b_1 \\ -b_1 & b_1 & a_1 + 3b_1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} a_2 + 2b_2 & -b_2 & -2b_2 \\ 2b_2 & a_2 - b_2 & -4b_2 \\ -b_2 & b_2 & a_2 + 3b_2 \end{pmatrix} \\
= \ & \begin{pmatrix} \lambda\, a_1 + 2\lambda\, b_1 & -\lambda\, b_1 & -2\lambda\, b_1 \\ 2\lambda\, b_1 & \lambda\, a_1 - \lambda\, b_1 & -4\lambda\, b_1 \\ -\lambda\, b_1 & \lambda\, b_1 & \lambda\, a_1 + 3\lambda\, b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu\, a_2 + 2\mu\, b_2 & -\mu\, b_2 & -2\mu\, b_2 \\ 2\mu\, b_2 & \mu\, a_2 - \mu\, b_2 & -4\mu\, b_2 \\ -\mu\, b_2 & \mu\, b_2 & \mu\, a_2 + 3\mu\, b_2 \end{pmatrix} \\
= \ & \begin{pmatrix} (\lambda\, a_1 + \mu\, a_2) + 2\,(\lambda\, b_1 + \mu\, b_2) & -(\lambda\, b_1 + \mu\, b_2) & -2\,(\lambda\, b_1 + \mu\, b_2) \\ 2\,(\lambda\, b_1 + \mu\, b_2) & (\lambda\, a_1 + \mu\, a_2) - (\lambda\, b_1 + \mu\, b_2) & -4\,(\lambda\, b_1 + \mu\, b_2) \\ -(\lambda\, b_1 + \mu\, b_2) & (\lambda\, b_1 + \mu\, b_2) & (\lambda\, a_1 + \mu\, a_2) + 3\,(\lambda\, b_1 + \mu\, b_2) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

D'où : $\lambda \cdot U + \mu \cdot V = M(\lambda\, a_1 + \mu\, a_2, \lambda\, b_1 + \mu\, b_2) \in E$.

$$\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).}$$

2. Donner la dimension de E.

Démonstration.
La famille $\mathcal{F}_0 = (I, A)$ est :

× génératrice de E (d'après la question précédente).

× libre car constituée uniquement de deux vecteurs non colinéaires.

Ainsi, $\mathcal{F}_0$ est une base de E.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \dim(E) = \mathrm{Card}\left(\mathcal{F}_0\right) = 2.}$$

□

3. a) Montrer que l'ensemble $F = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$ est un espace vectoriel.

Démonstration. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{array}{rcl}
X \in F & \iff & AX = X \\
& \iff & (A - I)\, X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \iff & \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & 2\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & - & 4\,z & = & 0 \\ -\,x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2\,L_1}{\iff}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & 2\,z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & y & + & 2\,z \end{array} \right.
\end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
F & = & \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\} \\
& = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = y + 2z \right\} \\
& = & \left\{ \begin{pmatrix} y + 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
& = & \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \; = \; \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

$$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$$

Commentaire

On peut de nouveau faire la remarque de la question ***1.***. Notons qu'en question ***3.c*** on demande d'exhiber une base $\mathscr{B}_1$ de F. On a donc tout intérêt, dès cette question, à privilégier la méthode qui fournit directement une famille génératrice de F.

□

Commentaire

Comme on l'a déjà mentionné, il est aussi possible de rédiger en revenant à la définition de sous-espace vectoriel. Rappelons la rédaction associée.

(i) $F \subset \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

(ii) $F \neq \varnothing$ car $0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \in F$ puisque $A \times 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.

(iii) Démontrons que F est stable par combinaisons linéaires.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(X_1, X_2) \in F^2$.

× Comme $X_1 \in F$, $A\,X_1 = X_1$.

× Comme $X_2 \in F$, $A\,X_2 = X_2$.

Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} A\,(\lambda_1 \cdot X_1 + \lambda_2 \cdot X_2) & = & A\,(\lambda_1 \cdot X_1) + A\,(\lambda_2 \cdot X_2) \\ & = & \lambda_1 \cdot A\,X_1 + \lambda_1 \cdot A\,X_2 \ = \ \lambda_1 \cdot X_1 + \lambda_2 \cdot X_2 \end{array}$$

D'où $\lambda_1 \cdot X_1 + \lambda_2 \cdot X_2 \in F$.

$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$

b) Montrer que la matrice $A - I$ n'est pas inversible.
En déduire que F est de dimension supérieure ou égale à 1.

Démonstration.

- D'après la question précédente, le système $(A - I)\,X = 0$ admet une infinité de solution.
Il n'est donc pas de Cramer.

$\boxed{\text{On en déduit que la matrice } A - I \text{ n'est pas inversible.}}$

Commentaire

Il est aussi possible de raisonner directement sur la matrice $A - I$:

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice $A - I$ est non inversible car elle possède deux colonnes colinéaires : $C_2 = -C_1$.

- Le système $(A - I)\,X = 0$ n'étant pas de Cramer, il admet une solution différente de $0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.
Ainsi, F contient un vecteur différent de $0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.
On en déduit : $F \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$.

$\boxed{\text{Finalement : } \dim(F) \neq 0 \text{ et donc : } \dim(F) \geqslant 1.}$

Commentaire

On se sert ici de la caractérisation suivante.

$$\boxed{\begin{array}{rcl} M \text{ non inversible} & \Leftrightarrow & \text{Le système } MX = 0 \text{ n'est pas de Cramer} \\ & \Leftrightarrow & \text{Le système } MX = 0 \text{ admet une solution différente de } \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}}$$

□

c) Déterminer l'ensemble F, puis donner une base $\mathscr{B}_1$ de F.

Démonstration.
La famille $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est :

× génératrice de F (car d'après la question ***3.b*** : $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$).

× libre car constituée uniquement de deux vecteurs non colinéaires.

Ainsi, $\mathscr{B}_1 = \mathcal{F}_1$ est une base de F.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \dim(F) = \text{Card}\big(\mathcal{F}_1\big) = 2.}$$

□

4. On considère l'ensemble $G = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X\}$.
On admet que G est un espace vectoriel.

a) Déterminer une base $\mathscr{B}_2$ de G.

Démonstration.
Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{array}{rcl}
X \in G & \iff & AX = 2X \\[1ex]
& \iff & (A - 2\,I)\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\[1ex]
& \iff & \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[2ex]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & - & y & - & 2\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & 3\,y & - & 4\,z & = & 0 \\ -\,x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\[4ex]
& \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\,x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2\,x & - & 3\,y & - & 4\,z & = & 0 \\ & - & y & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right. \\[4ex]
& \underset{L_2 \leftarrow L_2 + 2\,L_1}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\,x & + & y & + & z & = & 0 \\ & - & y & - & 2\,z & = & 0 \\ & - & y & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right. \\[4ex]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & z & = & 0 \\ & & y & + & 2\,z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\[4ex]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & z \\ & & y & = & -2\,z \end{array} \right. \\[3ex]
& \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & & = & -\,z \\ & & y & = & -2\,z \end{array} \right.
\end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} G & = & \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -z \ \text{ et } \ y = -2\,z \right\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\ & = & \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\ & = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{array}$$

La famille $\mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est :

× génératrice de G.

× libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul.

Ainsi, $\mathscr{B}_2 = \mathcal{F}_2$ est une base de G.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \dim(G) = \mathrm{Card}\left(\mathcal{F}_2\right) = 1.}$$

□

b) Montrer que $F \cap G = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$.

Démonstration.
Par double inclusion.

($\supseteq$) • Comme $A \times 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ alors $0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \in F$.

• Comme $A \times 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} = 2 \cdot 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ donc $0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \in G$.

Ainsi $0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \in F \cap G$.
(c'est fort logique : F et G sont deux sev de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc contiennent tous les deux $0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$)

($\subseteq$) Soit $X \in F \cap G$.

• Comme $X \in F$, $A\,X = X$.

• Comme $X \in G$, $A\,X = 2\,X$.

On en déduit que $X = 2\,X$ et donc que $X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{F \cap G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}$$

□

c) Montrer que la famille $\mathscr{B}$ obtenue en réunissant les vecteurs de la base $\mathscr{B}_1$ de F et de la base $\mathscr{B}_2$ de G forme une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Démonstration.

Montrons que la famille $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons :

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Or : $(*)$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 2\,\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & - & 2\,\lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 2\,\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & - & 2\,\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\overset{L_3 \leftarrow 2\,L_3 + L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 2\,\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & - & 2\,\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \right.$$

(par remontées successives)

$$\boxed{\text{La famille } \mathscr{B} \text{ est bien une famille libre.}}$$

La famille $\mathscr{B}$ est :

× libre.

× telle que : $\text{Card}(\mathscr{B}) = 3 = \dim\big(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathscr{B} \text{ est une base de } \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$$

□

d) Déterminer les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, puis celles du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, dans la base $\mathscr{B}$.

Démonstration.

- On a directement :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Le vecteur } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ a pour coordonnées } (1,0,0) \text{ dans la base } \mathscr{B}.}$$

- Comme $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, il existe un unique triplet $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (*)$$

$$\text{Or :} \quad (*) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \alpha_1 & + & 2\,\alpha_2 & - & \alpha_3 & = & 1 \\ \alpha_1 & & & - & 2\,\alpha_3 & = & 1 \\ & & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \alpha_1 & + & 2\,\alpha_2 & - & \alpha_3 & = & 1 \\ & - & 2\,\alpha_2 & - & \alpha_3 & = & 0 \\ & & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_3 \leftarrow 2\,L_3 + L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \alpha_1 & + & 2\,\alpha_2 & - & \alpha_3 & = & 1 \\ & - & 2\,\alpha_2 & - & \alpha_3 & = & 0 \\ & & & & \alpha_3 & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\overset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \alpha_1 & + & 2\,\alpha_2 & & & = & 3 \\ & - & 2\,\alpha_2 & & & = & 2 \\ & & & & \alpha_3 & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \alpha_1 & & & & & = & 5 \\ & - & 2\,\alpha_2 & & & = & 2 \\ & & & & \alpha_3 & = & 2 \end{array}\right.$$

*(on retrouve le même système qu'en **4.c)**, second membre mis à part)*
Ainsi :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ a pour coordonnées } (5, -1, 2) \text{ dans la base } \mathscr{B}.}$$

□

5. On considère la matrice P définie par $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que P est inversible et calculer sa matrice inverse P^{-1}.

Démonstration.
On procède par la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}\right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

La réduite obtenue est triangulaire (supérieure). De plus, ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Ainsi cette réduite est inversible et il en est de même de la matrice initiale P.

On effectue les opérations $\left\{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 2\,L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4\,L_3 \end{array}\right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array}\right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \right.$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } P \text{ est inversible, d'inverse } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

☐

b) Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$.

Démonstration.

$$\begin{array}{rcl} P^{-1}AP & = & \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

☐

6. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

a) Prouver que la matrice $D(a, b) = P^{-1}M(a, b)P$ est une matrice diagonale.

Démonstration.

$$\begin{array}{rcl} P^{-1}M(a,b)P & = & P^{-1}\,(aI + bA)\,P \\ & = & P^{-1}\,aI\,P + P^{-1}\,bA\,P \\ & = & a\,P^{-1}P + b\,P^{-1}AP \\ & = & a\,I + b\,D \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } D(a,b) = P^{-1}M(a,b)P = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix} \text{ est bien diagonale.}}$$

☐

b) Montrer que $M(a,b)$ est inversible si et seulement si $D(a,b)$ est inversible.
En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $M(a,b)$ soit inversible.

Démonstration.

- Démontrons tout d'abord la caractérisation de l'inversibilité de $M(a,b)$.

($\Rightarrow$) On suppose que $M(a,b)$ est inversible.
Alors, d'après la question ***6.a)*** :

$$D(a,b) \ = \ P^{-1} M(a,b) P$$

$$\boxed{D(a,b) \text{ est inversible comme produit de matrices inversibles.}}$$

($\Leftarrow$) On suppose que $D(a,b)$ est inversible.
Alors, d'après la question ***6.a)*** :

$$M(a,b) \ = \ P D(a,b) P^{-1}$$

$$\boxed{M(a,b) \text{ est inversible comme produit de matrices inversibles.}}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } M(a,b) \text{ est inversible} \Leftrightarrow D(a,b) = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix} \text{ est inversible.}}$$

- La matrice $D(a,b)$ est diagonale.
  Elle est donc inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls.

$$\boxed{\text{On en conclut : } M(a,b) \text{ est inversible} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a+2b \neq 0 \\ a+b \neq 0 \end{array} \right. .}$$

□

c) Prouver que $\big(M(a,b)\big)^2 = I$ si et seulement si $\big(D(a,b)\big)^2 = I$.
En déduire l'existence de quatre matrices $M(a,b)$ que l'on déterminera, vérifiant :

$$\big(M(a,b)\big)^2 = I$$

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} \big(M(a,b)\big)^2 = I & \Leftrightarrow & \big(P\,D(a,b)\ P^{-1}\big)^2 = I \\ & \Leftrightarrow & \big(P\,D(a,b)\ P^{-1}\big)\big(P\,D(a,b)\ P^{-1}\big) = I \\ & \Leftrightarrow & P\,D(a,b)\ \big(P^{-1}P\big)\,D(a,b)\ P^{-1} = I \\ & \Leftrightarrow & P\,\big(D(a,b)\big)^2\ P^{-1} = I \\ & \Leftrightarrow & \big(D(a,b)\big)^2\ P^{-1} = P^{-1}\,I \\ & \Leftrightarrow & \big(D(a,b)\big)^2 = P^{-1}\,I\,P \\ & \Leftrightarrow & \big(D(a,b)\big)^2 = I \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \big(M(a,b)\big)^2 = I \Leftrightarrow \big(D(a,b)\big)^2 = I.}$$

- Or : $D(a,b) = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$(D(a,b))^2 = I \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (a+2b)^2 = 1 \\ (a+b)^2 = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (a+2b=1) \ \texttt{OU} \ (a+2b=-1) \\ (a+b=1) \ \texttt{OU} \ (a+b=-1) \end{array} \right.$$

En distinguant les 4 cas possibles, on obtient les 4 systèmes d'équations suivants :

$$(S_1) \left\{ \begin{array}{l} a+2b=1 \\ a+b=1 \end{array} \right. \qquad (S_2) \left\{ \begin{array}{l} a+2b=1 \\ a+b=-1 \end{array} \right.$$

$$(S_3) \left\{ \begin{array}{l} a+2b=-1 \\ a+b=1 \end{array} \right. \qquad (S_4) \left\{ \begin{array}{l} a+2b=-1 \\ a+b=-1 \end{array} \right.$$

- Or : $(S_1) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcr} a & + & 2b & = & 1 \\ a & + & b & = & 1 \end{array} \right.$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcr} a & + & 2b & = & 1 \\ & - & b & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcr} a & & & = & 1 \\ & - & b & = & 0 \end{array} \right.$$

Et : $(S_2) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcr} a & + & 2b & = & 1 \\ a & + & b & = & -1 \end{array} \right.$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcr} a & + & 2b & = & 1 \\ & - & b & = & -2 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcr} a & & & = & -3 \\ & - & b & = & -2 \end{array} \right.$$

Puis : $(S_3) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcr} a & + & 2b & = & -1 \\ a & + & b & = & 1 \end{array} \right.$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcr} a & + & 2b & = & -1 \\ & - & b & = & 2 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcr} a & & & = & 3 \\ & - & b & = & 2 \end{array} \right.$$

Enfin : $(S_4) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcr} a & + & 2b & = & -1 \\ a & + & b & = & -1 \end{array} \right.$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcr} a & + & 2b & = & -1 \\ & - & b & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcr} a & & & = & -1 \\ & - & b & = & 0 \end{array} \right.$$

Finalement :

$$\big(D(a,b)\big)^2 = I \ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} (a,b) & = & (1,0) \\ (a,b) & = & (-3,2) \\ (a,b) & = & (3,-2) \\ (a,b) & = & (-1,0) \end{array} \right.$$

Les matrices $M(a,b)$ vérifiant $(M(a,b))^2 = I$ sont donc $M\,(1,0)\,,\ M\,(-3,2)\,,\ M\,(3,-2)$ et $M\,(-1,0)$.

Commentaire

- Pour ne pas avoir à résoudre 4 fois le même système (à changement du second membre près), on pouvait le résoudre avec un second membre quelconque. Plus précisément, on pouvait résoudre le système (S) suivant :

$$(S) \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} a & + & 2\,b & = & x & & \\ a & + & b & = & & & y \end{array} \right.$$

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} a & + & 2\,b & = & x & & \\ & - & b & = & -\,x & + & y \end{array} \right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow L_1 + 2\,L_2}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} a & & & = & -x & + & 2\,y \\ & - & b & = & -\,x & + & y \end{array} \right.$$

$$\overset{L_2 \leftarrow -L_2}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} a & & & = & -x & + & 2\,y \\ & & b & = & x & - & y \end{array} \right.$$

On obtient ainsi la solution pour n'importe quel couple (x,y) choisi (par exemple, on consdérant $(x,y) = (1,0)$ on obtient les solution de (S_1)).

- On pouvait aussi rapprocher les résolutions de (S_1) et (S_4) (et la résolution de (S_2) de celle de (S_3)). Si on considère $(\alpha,\beta) = (-a,-b)$ alors :

$$(S_4) \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} a & + & 2\,b & = & -1 \\ a & + & b & = & -1 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} -\,a & - & 2\,b & = & 1 \\ -\,a & - & b & = & 1 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} \alpha & + & 2\,\beta & = & 1 \\ \alpha & + & \beta & = & 1 \end{array} \right.$$

Ce dernier système a pour solution $(\alpha,\beta) = (1,0)$ et ainsi (S_4) a pour solution $(a,b) = (-1,0)$.

□

Exercice 2 (EDHEC 2022)

On désigne par n un entier naturel non nul, par p un réel de $]0,1[$ et on pose : $q = 1 - p$.
Dans la suite, on s'intéresse à un jeu vidéo au cours duquel le joueur doit essayer, pour gagner, de réussir, dans l'ordre, n niveaux numérotés 1, 2, ..., n, ce joueur ne pouvant accéder à un niveau que s'il a réussi le niveau précédent. Le jeu s'arrête lorsque le joueur échoue à un niveau ou bien lorsqu'il a réussi les n niveaux du jeu.
Pour tout entier k de $[\![1, n-1]\!]$, on dit que le joueur a le niveau k si, et seulement si, il a réussi le niveau k et échoué au niveau $k+1$. On dit que le joueur a le niveau n si, et seulement si, il a réussi le niveau n et on dit que le joueur a le niveau 0 s'il a échoué au niveau 1.
On admet que la probabilité de passer d'un niveau à un autre est constante et égale à p, la probabilité d'accéder au niveau 1 étant, elle aussi, égale à p.
On note X_n le niveau du joueur et on admet que X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.
Pour tout k de $[\![1, n]\!]$, on note R_k l'événement : « le joueur réussit le niveau k ».

1. Compléter le script **Python** suivant afin qu'il permette de simuler ce jeu et d'afficher la valeur prise par X_n dès que l'utilisateur saisit une valeur de p.

```
import random as rd
p = float(input(‘‘entrez la valeur de p dans ]0,1[ :‘‘))
n = int(input(‘‘entrez la valeur de n :‘‘))
X = -----
while ----- and (rd.random() <= p) :
    X = -----
print(‘‘le niveau du joueur est :‘‘ + str(X))
```

Démonstration.
On propose le script suivant.

```
import random as rd
p = float(input(‘‘entrez la valeur de p dans ]0,1[ :‘‘))
n = int(input(‘‘entrez la valeur de n :‘‘))
X = 0
while (X < n) and (rd.random() <= p) :
    X = X + 1
print(‘‘le niveau du joueur est :‘‘ + str(X))
```

Détaillons les éléments de ce programme.

- **Début du programme**
  On commence par importer la librairie `random` sous l'abréviation `rd`.

```
import random as rd
```

Il est ensuite demandé à l'utilisateur de rentrer les valeurs des variables `p` et `n`.

```
p = float(input(‘‘entrez la valeur de p dans ]0,1[ :‘‘))
n = int(input(‘‘entrez la valeur de n :‘‘))
```

Enfin, on souhaite que la variable `X` contienne le niveau du joueur pour un jeu comportant `n` niveaux. Son niveau minimal étant 0 (dans le cas où le joueur échoue au niveau 1), on initialise la variable `X` à 0.

```
X = 0
```

- **Structure itérative**

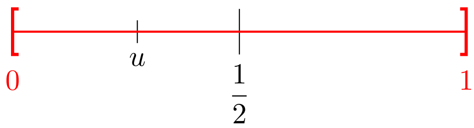
  × Les lignes 5 à 6 consistent à mettre à jour la variable `X` jusqu'à ce que le joueur échoue à un niveau ou qu'il ait réussi les `n` niveaux. Autrement dit, on doit mettre à jour la variable `X` tant que le joueur réussit un niveau et qu'il n'a pas réussi le niveau `n`. Pour cela on met en place une structure itérative (boucle while).

```
5  while (X < n) and (rd.random() <= p) :
```

  Pour simuler la réussite ou l'échec d'un niveau, on souhaite que l'instruction correspondante :

  - renvoie le booléen `True` avec probabilité p,
  - renvoie le booléen `False` avec probabilité $1-p$.

  C'est ce que permet l'instruction `(rd.random() <= p)`.
  Détaillons ce point. L'instruction `rd.random()` renvoie un réel u choisit aléatoirement dans $[0,1]$.
  Plus formellement, il s'agit de simuler une v.a.r. U telle que : $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.



  Deux cas se présentent :

  - si $u \leqslant p$, alors l'instruction `(rd.random() <= p)` prend la valeur `True`.
    Ce cas se produit avec la probabilité :

$$\mathbb{P}([0 \leqslant U \leqslant p]) \ = \ \mathbb{P}([U \leqslant p]) \ = \ p$$

    Ce qui est bien la probabilité de réussir un niveau.

  - si $u \geqslant \frac{1}{2}$, alors l'instruction `(rd.random() <= p)` prend la valeur `False`.
    Ce cas se produit avec la probabilité :

$$1 - \mathbb{P}([0 \leqslant U \leqslant p]) \ = \ 1-p$$

    Ce qui est bien la probabilité d'échouer un niveau.

  × La variable `X` est alors incrémentée de 1 à chaque itération pour signaler qu'un nouveau niveau a été réussi.

```
6        X = X + 1
```

- **Fin du programme**
  À la fin de la structure itérative, la variable `X` contient une simulation de la v.a.r. X_n. Il reste donc à afficher cette valeur.

```
7  print("le niveau du joueur est :" + str(X))
```

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le programme **Python** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir la majorité des points alloués à cette question.

□

2. a) Justifier soigneusement que l'ensemble des valeurs prises par X_n est : $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

Démonstration.
On procède par double inclusion.

($\subset$) Le jeu comporte n niveaux. Le joueur peut donc échouer dès le premier (il a alors le niveau 0) ou, au mieux, tous les réussir (il a alors le niveau n).
On en déduit : $X_n(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$.

($\supset$) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Trois cas se présentent :

× si $k = 0$, alors le 1-tirage suivant réalise l'événement $[X_n = 0]$:

$$\omega_0 \; = \; (\text{Échec})$$

On en déduit : $\omega_0 \in [X_n = 0]$, *i.e.* : $X_n(\omega_0) = 0$. D'où : $0 \in X_n(\Omega)$.

× si $k \in [\![1, n-1]\!]$, alors le $(k+1)$-tirage suivant réalise l'événement $[X_n = k]$:

$$\omega_k \; = \; (\underbrace{\text{Réussite}, \ldots, \text{Réussite}}_{k \text{ fois}}, \text{Échec})$$

On en déduit : $\omega_k \in [X_n = k]$, *i.e.* : $X_n(\omega_k) = k$. D'où : $k \in X_n(\Omega)$.

× si $k = n$, alors le n-tirage suivant réalise l'événement $[X_n = n]$:

$$\omega_n \; = \; (\text{Réussite}, \ldots, \text{Réussite}, \text{Réussite})$$

On en déduit : $\omega_n \in [X_n = n]$, *i.e.* : $X_n(\omega_n) = n$. D'où : $n \in X_n(\Omega)$.

Finalement : $[\![0, n]\!] \subset X_n(\Omega)$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } X_n(\Omega) = [\![0, n]\!].}$$

□

b) Déterminer la probabilité $\mathbb{P}\big([X_n = 0]\big)$.

Démonstration.
L'événement $[X_n = 0]$ est réalisé si et seulement si le joueur perd dès le 1er niveau. Autrement dit, cet événement est réalisé si et seulement si $\overline{R_1}$ est réalisé. Ainsi :

$$[X_n = 0] \; = \; \overline{R_1}$$

D'où :

$$\mathbb{P}\big([X_n = 0]\big) \; = \; \mathbb{P}(\overline{R_1}) \; = \; 1 - \mathbb{P}(R_1) \; = \; 1 - p$$

En effet, la probabilité d'échec de chaque niveau, en particulier celui du niveau 1, est de $1 - p$ d'après l'énoncé.

$$\boxed{\mathbb{P}\big([X_n = 0]\big) = 1 - p}$$

□

c) Écrire l'événement $[X_n = n]$ à l'aide de certains des événements R_k puis déterminer la probabilité $\mathbb{P}\big([X_n = n]\big)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{cccccccc} & \multicolumn{7}{l}{\text{l'événement } [X_n = n] \text{ est réalisé}} \\ \Leftrightarrow & \multicolumn{7}{l}{\text{le joueur réussit les } n \text{ niveaux}} \\ \Leftrightarrow & \begin{array}{c}\text{le joueur réussit}\\ \text{le niveau 1}\end{array} & \texttt{ET} & \begin{array}{c}\text{le joueur réussit}\\ \text{le niveau 2}\end{array} & \texttt{ET} \cdots \texttt{ET} & \begin{array}{c}\text{le joueur réussit}\\ \text{le niveau } n\end{array} & & \\ \Leftrightarrow & R_1 & \cap & R_2 & \cap \cdots \cap & R_n & & \text{est réalisé} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } [X_n = n] = R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n.}$$

- D'après la formule des probabilités composées, on obtient :

$$\begin{array}{rl} & \mathbb{P}\big([X_n = n]\big) \\ = & \mathbb{P}\big(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n\big) \\ = & \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}_{R_1}(R_2) \times \cdots \times \mathbb{P}_{R_1 \cap \cdots \cap R_{n-2}}(R_{n-1}) \times \mathbb{P}_{R_1 \cap \cdots \cap R_{n-1}}(R_n) \\ = & p \times p \times \cdots \times p \times p \end{array}$$

Détaillons cette dernière égalité.

× D'après la question précédente : $\mathbb{P}(R_1) = p$.

× Si l'événement $R_1 \cap \cdots R_{n-1}$ est réalisé, c'est que le joueur a réussi les $n-1$ premiers niveaux. Dans ce cas, l'événement R_n est réalisé si et seulement si le joueur réussit le niveau n. On en déduit, d'après l'énoncé :

$$\mathbb{P}_{R_1 \cap \cdots \cap R_{n-1}}(R_n) \ = \ p$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathbb{P}\big([X_n = n]\big) = p^n.}$$

□

d) Écrire, pour tout entier k de $[\![1, n-1]\!]$, l'événement $[X_n = k]$ à l'aide de certains des événements R_k puis déterminer la probabilité $\mathbb{P}\big([X_n = k]\big)$. Vérifier que l'expression trouvée reste valable pour $k = 0$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{cccccccc} & \multicolumn{7}{l}{\text{l'événement } [X_n = k] \text{ est réalisé}} \\ \Leftrightarrow & \multicolumn{7}{l}{\text{le joueur réussit les } k \text{ premiers niveaux et échoue au } (k+1)^{\text{ème}}} \\ \Leftrightarrow & \begin{array}{c}\text{le joueur réussit}\\ \text{le niveau 1}\end{array} & \texttt{ET} \cdots \texttt{ET} & \begin{array}{c}\text{le joueur réussit}\\ \text{le niveau } k\end{array} & \texttt{ET} & \begin{array}{c}\text{le joueur échoue}\\ \text{le niveau } k+1\end{array} & & \\ \Leftrightarrow & R_1 & \cap \cdots \cap & R_k & \cap & \overline{R_{k+1}} & & \text{est réalisé} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } [X_n = k] = R_1 \cap \cdots \cap R_k \cap \overline{R_{k+1}}.}$$

- D'après la formule des probabilités composées, on obtient :

$$\begin{array}{rl} & \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) \\ = & \mathbb{P}\big(R_1 \cap \cdots \cap R_k \cap \overline{R_{k+1}}\big) \\ = & \mathbb{P}(R_1) \times \cdots \times \mathbb{P}_{R_1 \cap \cdots \cap R_{k-2}}(R_{k-1}) \times \mathbb{P}_{R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1}}(R_k) \times \mathbb{P}_{R_1 \cap \cdots \cap R_k}(\overline{R_{k+1}}) \\ = & p \times \cdots \times p \times p \times (1-p) \end{array}$$

En effet, si l'événement $R_1 \cap \cdots R_k$ est réalisé, c'est que le joueur a réussi les k premiers niveaux.
Dans ce cas, l'événement $\overline{R_{k+1}}$ est réalisé si et seulement si le joueur échoue le niveau $k+1$.
On en déduit, d'après l'énoncé :

$$\mathbb{P}_{R_1 \cap \cdots \cap R_k}(\overline{R_{k+1}}) \ = \ 1 - p$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) = p^k\,(1-p) = p^k\,q.}$$

- Enfin, dans le cas $k = 0$:
  - × d'une part, d'après ***2.a)*** : $\mathbb{P}\big([X_n = 0]\big) = 1 - p = q$,
  - × d'autre part : $p^0\,q = q$.

$$\boxed{\text{La formule obtenue est donc valable pour } k = 0.}$$

□

3. Vérifier par le calcul : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) = 1$.

Démonstration.
On calcule :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) + \mathbb{P}\big([X_n = n]\big) \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} p^k\,q + p^n \qquad \textit{(d'après } \textbf{2.d)} \textit{ et } \textbf{2.c)}\textit{)} \\ & = & q \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} p^k + p^n \\ & = & \cancel{q}\, \dfrac{1 - p^n}{\cancel{1-p}} + p^n \\ & = & 1 - \cancel{p^n} + \cancel{p^n} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) = 1.}$$

□

4. a) Expliquer pourquoi X_n admet une espérance et écrire cette dernière sous forme d'une somme dépendant de n et de p.

Démonstration.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X_n \text{ admet une espérance car c'est une v.a.r. finie.}}$$

On calcule alors :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(X_n) & = & \sum\limits_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}\big([X_n = k]\big) \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{n-1} k\,\mathbb{P}\big([X_n = k]\big) \quad + \quad n\,\mathbb{P}\big([X_n = n]\big) \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{n-1} k\,p^k\,q \qquad + \qquad n\,p^n \qquad \textit{(d'après } \textbf{\textit{2.d)}} \textit{ et } \textbf{\textit{2.c)}}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{E}(X_n) = q \sum_{k=0}^{n-1} k\,p^k + n\,p^n.}$$

□

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{E}(X_n) \;=\; q \sum_{k=0}^{n-1} k\,p^k + n\,p^n \;=\; qp \sum_{k=1}^{n-1} k\,p^{k-1} + n\,p^n$$

- Or :
  - × d'une part, la série $\sum k\,p^{k-1}$ est une série géométrique dérivée de raison $p \in \,]-1,1[$. Elle est donc convergente.
  - × d'autre part, comme $p \in \,]0,1[$, par croissances comparées : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,p^n = 0$.

  On en déduit que la suite $\big(\mathbb{E}(X_n)\big)$ admet une limite. De plus :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) \;=\; qp \sum_{k=1}^{+\infty} k\,p^{k-1} + 0 \;=\; \cancel{q}\,p\,\frac{1}{(1-p)^{\cancel{2}}} \;=\; \frac{p}{1-p}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) \;=\; \frac{p}{q}.}$$

□

5. a) Montrer que, pour tout entier naturel k et pour tout entier n supérieur ou égal à $k+1$, on a : $\mathbb{P}\big([X_n = k]\big) = p^k\,q$.

Démonstration.
On a démontré en question ***2.d)*** :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) \;=\; p^k\,q$$

Autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad (k < n) \;\Rightarrow\; \Big(\mathbb{P}\big([X_n = k]\big) = p^k\,q\Big)$$

Ou encore :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (k+1 \geqslant n) \;\Rightarrow\; \Big(\mathbb{P}\big([X_n = k]\big) = p^k\,q\Big)$$

$$\boxed{\text{D'où : } \forall k \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant k+1, \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) = p^k\,q.}$$

Commentaire

Le coeur de cette question est la quantification. En effet, cette question ***5.a)*** est exactement la même que la question ***2.d)***. L'énoncé veut ici pointer du doigt une nuance dans la quantification de n et k en prévision de la question précédente. Plus précisément :

- en question ***2.d)***, on cherche à obtenir la loi de X_n. On commence donc par fixer la variable n (qui correspond au nombre de niveaux du jeu). Puis, on fixe la variable k pour obtenir $\mathbb{P}\big([X_n = k]\big)$.
- en question ***5.b)***, on cherche à établir une convergence en loi. On commencera donc par fixer la variable k dans $\mathbb{N}$ (car on a dans l'idée que la v.a.r. limite X vérifie : $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$). Puis, on fixe la variable n pour déterminer la limite de la suite $\Big(\mathbb{P}\big([X_n = k]\big)\Big)$.

La question ***5.a)*** consiste à formuler le résultat obtenu en ***2.d)*** en privilégiant la quantification en k d'abord, plutôt que celle en n, dans l'objectif de démonstration d'une convergence en loi en question suivante.

b) En déduire que la suite $(X_n)_{n\in N^*}$ converge en loi vers une certaine variable aléatoire X.

Démonstration.

- Soit $k \in \mathbb{N}$.
  Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0$, $n \geqslant k+1$.
  Soit $n \geqslant n_0$. Alors : $n \geqslant k+1$. Ainsi, d'après la question précédente :
$$\mathbb{P}\big([X_n = k]\big) \;=\; p^k\, q \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} p^k\, q$$
- On pose alors une v.a.r. X telle que :
  × $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$
  × $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\big([X = k]\big) = p^k\, q$

  Vérifions que la v.a.r. X définie bien une loi de probabilité.
  × Tout d'abord : $\forall k \in \mathbb{N}$, $p^k\, q \geqslant 0$.
  × De plus, pour tout $N \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{k=0}^{N} p^k\, q \;=\; q \sum_{k=0}^{N} p^k$$
  Or, la série $\sum p^k$ est une série géométrique de raison $p \in \,]-1,1[$. Elle est donc convergente.
  De plus :
$$\sum_{k=0}^{+\infty} p^k\, q \;=\; \cancel{q}\, \frac{1}{\cancel{1-p}} \;=\; 1$$
$$\boxed{\text{La v.a.r. } X \text{ définie ci-dessus définit bien une loi de probabilité.}}$$
- On en déduit :
  × $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\Omega) \subset \mathbb{N}$
  × $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) = p^k\, q = \mathbb{P}\big([X = k]\big)$
$$\boxed{\text{D'où : } X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} X.}$$
□

c) On pose : $Y = X + 1$.
Reconnaître la loi de Y puis en déduire l'espérance de X et la comparer à $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, alors : $Y(\Omega) = (X+1)(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{P}\big([Y = k]\big) \;=\; \mathbb{P}\big([X+1 = k]\big) \;=\; \mathbb{P}\big([X = k-1]\big) \;=\; p^{k-1}\, q \qquad \textit{(car } k-1 \in \mathbb{N}\textit{)}$$

D'où : $\mathbb{P}\big([Y = k]\big) = (1-q)^{k-1}\, q$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } Y \hookrightarrow \mathcal{G}\,(q).}$$

- On remarque : $X = Y - 1$. Ainsi, la v.a.r. X admet une espérance en tant que transformée affine de la v.a.r. Y qui en admet une. De plus :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(X) & = & \mathbb{E}(Y-1) & \\ & = & \mathbb{E}(Y) - 1 & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ & = & \dfrac{1}{q} - 1 & \\ & = & \dfrac{1-q}{q} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{D'après } \textbf{\textit{4.b)}}\text{, on conclut : } \mathbb{E}(X) = \frac{p}{q} = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n).}$$

Commentaire

On a démontré :
1) en question ***5.b)*** : (X_n) converge en loi vers X,
2) dans cette question : $\mathbb{E}(X_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(X)$.
Cela pourrait laisser penser que 1) implique 2). Il n'en est rien :

$$(X_n) \text{ converge en loi vers } X \quad \cancel{\Rightarrow} \quad \mathbb{E}(X_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(X)$$

De manière générale, on retiendra que la convergence en loi **n'implique pas** la convergence des moments (et vice versa évidemment).

□

Exercice 3 (EDHEC 2013 voie S)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$ converge.
Le but de cet exercice est de prouver, pour des cas particuliers, que la série de terme général $u_n = \dfrac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$ converge également et que, de plus, on a : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k \leqslant 2 \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{a_k}$.

1. Étude d'un premier exemple : pour tout entier n non nul, on pose : $a_n = n(n+1)$.

a) Vérifier : $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, puis en déduire que la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$ converge et donner sa somme.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  - × D'une part : $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{n(n+1)}$.
  - × D'autre part : $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{\cancel{n} + 1 - \cancel{n}}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}.}$$

- Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{a_k} &= \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{N+1} && \textit{(par sommation télescopique)} \end{aligned}$$

Or : $\lim\limits_{N\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{N+1} = 1$.

$$\boxed{\text{Ainsi la série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{a_n} \text{ est convergente et : } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k} = 1.}$$

Commentaire

L'énoncé nous oriente ici vers la méthode à utiliser pour conclure quant à la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{a_n}$. En effet :

- × si la formulation de l'énoncé est : « montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{a_n}$ est convergente et déterminer sa somme », alors on calculera la somme partielle $\sum\limits_{k=1}^{N} \dfrac{1}{a_k}$ et passera à la limite (si elle existe) lorsque N tend vers $+\infty$.
- × si la formulation de l'énoncé est : « montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{a_n}$ est convergente », alors on privilégiera l'utilisation d'un critère de comparaison / équivalence / négligeabilité des séries à termes positifs.

□

b) Pour tout entier naturel non nul n, déterminer u_n en fonction de n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord :
$$u_n = \frac{n}{a_1 + \cdots + a_n} = \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}$$

- Or :
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} \left(k^2 + k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{2n+1}{3} + 1\right) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{2n+4}{3} \\
&= \frac{n(n+1) \times \cancel{2}\,(n+2)}{\cancel{2} \times 3} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}
\end{aligned}$$

- Ainsi : $u_n = \dfrac{\cancel{n}}{\frac{\cancel{n}(n+1)(n+2)}{3}} = \dfrac{3}{(n+1)(n+2)}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{3}{(n+1)(n+2)}}$$

□

c) Établir la convergence de la série de terme général u_n et donner sa somme, puis en déduire l'inégalité demandée.

Démonstration.

- Tout d'abord, soit $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

- Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} u_k &= \sum_{k=1}^{N} \frac{3}{(k+1)(k+2)} = 3 \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= 3 \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2})\right) && \textit{(d'après l'égalité précédente)} \\
&= 3 \left(\frac{1}{1+1} - \frac{1}{N+2}\right) && \textit{(par sommation télescopique)} \\
&= \frac{3}{2} - \frac{3}{N+2}
\end{aligned}$$

Or : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{3}{2} - \frac{3}{N+2} = \frac{3}{2}$.

$$\boxed{\text{Ainsi la série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ est convergente et : } \sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \frac{3}{2}.}$$

- Finalement :
  - × d'après ***1.a)*** : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k} = 1$. D'où : $\displaystyle 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k} = 2$.
  - × d'après ce qui précéde : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \frac{3}{2}$.

$$\boxed{\text{On en déduit bien : } \sum_{k=1}^{+\infty} u_k \leqslant 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k}.}$$

□

2. Étude d'un deuxième exemple.
On suppose, dans cette question, que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $a_n = n!$.

a) Écrire une fonction **Python** d'en-tête `def facto(n)`, qui prend en paramètre un entier n et renvoie $n!$.

Démonstration.

```
def facto(n) :
    y = 1
    for i in range(1, n+1) :
        y = y * i
    return y
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début de la fonction**
  Conformément à l'énoncé, on commence par préciser la structure de la fonction :
  - × cette fonction se nomme `facto`,
  - × elle prend en paramètre la variable `n`,
  - × elle admet pour variable de sortie la variable `y`.

```
def facto(n) :
```

```
    return y
```

On initialise ensuite la variable `y` à 1 (choix naturel d'initialisation lorsqu'on souhaite coder un produit puisque 1 est l'élément neutre de l'opérateur produit).

```
    y = 1
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 3 à 4 consistent à mettre à jour la variable `y` pour qu'elle contienne la quantité $n!$.
  Or :
  $$n! \;=\; 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n \;=\; \prod_{i=1}^{n} i$$
  Pour cela, on utilise alors une structure conditionnelle (boucle `for`) :

```
3       for i in range(1, n+1) :
4           y = y * i
```

- **Fin de la fonction**
  À l'issue de cette boucle, la variable `y` contient la quantité $\prod_{i=1}^{n} i = n!$.

Commentaire

- Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le programme **Python** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir la majorité des points alloués à cette question.
- Il est aussi possible de proposer une fonction tirant parti des fonctionnalités de **Python** :

```
import numpy as np
def facto(n) :
    y = np.prod([k for k in range(1, n+1)])
    return y
```

  La fonction `np.prod` permet de faire le produit de tous les éléments de la liste en argument.
- Comme expliqué plus haut, on initialise la variable `y` à 1 puisque cette variable doit contenir un produit, et que le réel 1 est l'élément neutre pour l'opérateur produit.
  On rappelle qu'on procède de même avec l'initialisation d'une somme stockée dans une variable `S` : on initialise la variable `S` à 0 car le réel 0 est l'élément neutre pour l'opérateur de sommation.
- On remarque que le programme proposé permet bien d'obtenir : $0! = 1$.
  En effet, si `n` $= 0$, alors :
  1) la variable `y` est initialisée à 1,
  2) la boucle qui suit n'est pas effectuée puisque la matrice `1:0` est une matrice vide,
  3) le programme renvoie donc bien 1 lorsque `n` vaut 0.

Commentaire

On pouvait également exploiter la relation de récurrence que vérifie la suite $(n!)$.

- On note (u_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n!$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 \ = \ 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_n = n! = n \times (n-1)! = n \, u_{n-1} \end{array} \right.$$

  La suite (u_n) est donc une suite définie par récurrence. On parle aussi de définition *récursive* d'une suite.

- On peut alors utiliser cette relation pour définir la fonction `facto`.

```python
def facto(n) :
    if n==0 :
        y = 1
    else :
        y = n * facto(n-1)
    return y
```

  On remarque que la définition de la fonction `facto` fait appel à elle-même. On dit encore que la fonction `facto` est définie de manière récursive. Cette manière de coder est ici rendue naturelle par la définition récursive de $(n!)$.

- Par exemple, lorsqu'on effectue l'appel `facto(3)` (pour obtenir la valeur de $3!$), le calcul s'effectue de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcl} \texttt{facto(3)} & = & 3 \times \texttt{facto(2)} \\ & = & 3 \times 2 \times \texttt{facto(1)} \\ & = & 3 \times 2 \times 1 \times \texttt{facto(0)} \\ & = & 3 \times 2 \times 1 \times 1 \end{array}$$

  Remarquons que le calcul est certain d'aboutir puisque l'appel `facto(n)` nécessite les appels de `facto(n-1)`, puis `facto(n-2)`, $\dots$, puis `facto(2)`, puis `facto(1)` et enfin `facto(0)` (dont on connaît la valeur).

$\square$

b) Écrire un programme **Python**, utilisant cette fonction, et permettant de calculer et afficher la valeur de u_n, lorsque la valeur de n est entrée au clavier par l'utilisateur.

Démonstration.
On propose le script suivant.

```python
n = int(input(‘‘Entrez un entier non nul n :‘‘))
S = 0
for k in range(1, n+1) :
    S = S + facto(k)
u = n / S
print(u)
```

Détaillons les éléments de ce programme.

- **Début du programme**
  On commence par demander à l'utilisateur d'entrer une valeur pour l'entier naturel non nul n, que l'on stocke dans la variable `n` :

```
1  n = int(input(''Entrez un entier non nul n :''))
```

  On rappelle : $u_n = \dfrac{n}{a_1 + \cdots + a_n} = \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}$.

  L'idée est donc de commencer par stocker dans une variable `S` la valeur $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, puis d'en déduire la valeur de u_n, que l'on stockera dans une variable `u`.
  On initialise la variable `S` à 0 (choix naturel d'initialisation lorsque l'on souhaite coder une somme puisque 0 est l'élément neutre de l'opérateur de sommation).

```
2  S = 0
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 3 à 4 consistent à mettre à jour la variable `S` pour qu'elle contienne la quantité : $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{k=1}^{n} k!$. Pour cela, on utilise la fonction `facto` définie à la question précédente et une structure conditionnelle (boucle for) :

```
3  for k in range(1, n+1) :
4      S = S + facto(k)
```

- **Fin du programme**
  À l'issue de cette boucle, la variable `S` contient la valeur : $\sum\limits_{k=1}^{n} k! = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.
  Il reste donc à en déduire la valeur de u_n et la stocker dans une variable `u` :

```
5  u = n / S
```

  On affiche enfin la valeur de la variable `u` :

```
6  print(u)
```

$\square$

c) Établir la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{n!} = \frac{1^n}{n!}$$

- Or la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{1^n}{n!}$ est la série exponentielle de paramètre 1. Elle est donc convergente.

$$\boxed{\text{On en déduit que la série } \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{a_n} \text{ est convergente.}}$$

- De plus :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} - 1 = \mathrm{e}^1 - 1$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k} = \mathrm{e} - 1.}$$

$\square$

d) Montrer, pour tout entier naturel n non nul : $u_n \leqslant \dfrac{1}{(n-1)!}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll} u_n \leqslant \dfrac{1}{(n-1)!} & \Leftrightarrow & \dfrac{n}{1!+2!+\cdots+n!} \leqslant \dfrac{1}{(n-1)!} & \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{n} \geqslant (n-1)! & \textit{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & 1!+2!+\cdots+n! \geqslant n \times (n-1)! & \textit{(car } n>0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & 1!+2!+\cdots+n! \geqslant n! & \end{array}$$

La dernière inégalité est vraie. Ainsi, par équivalence, la première inégalité aussi.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant \dfrac{1}{(n-1)!}.}$$

□

e) En déduire que la série de terme général u_n converge et que l'on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k \leqslant 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k}$.

Démonstration.

- Commençons par démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(n-1)!}$ est convergente et déterminons sa somme.
  - × Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
  $$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} \qquad \textit{(par décalage d'indice)}$$
  Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}$ est la série exponentielle de paramètre 1. Elle est donc convergente.
  Ainsi la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(n-1)!}$ est convergente.
  - × De plus :
  $$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}$$
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle : $u_n = \dfrac{n}{a_1+\cdots+a_n} = \dfrac{n}{1!+2!+\cdots+n!}$.
  On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 0$.
- On obtient :
  - × $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{(n-1)!}$ (d'après la question précédente)
  - × la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(n-1)!}$ est convergente.

$$\boxed{\text{Par critère de comparaisons des séries à termes positifs, la série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ est convergente.}}$$

- On rappelle : $\forall k \in N^*$, $0 \leqslant u_k \leqslant \dfrac{1}{(k-1)!}$.
Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En sommant cet encadrement pour k variant de 1 à N :

$$\sum_{k=1}^{N} u_k \ \leqslant\ \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(k-1)!}$$

Ainsi, par passage à la limite (ce qui est autorisé car les séries en présence convergente) :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k \ \leqslant\ \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!}}_{=\,\mathrm{e}}$$

- Pour montrer : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k \leqslant 2 \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{a_k}$, il suffit donc de montrer : $\mathrm{e} \leqslant 2 \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{a_k}$.
En effet, si c'est le cas, alors par transitivité :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k \ \leqslant\ \mathrm{e} \ \leqslant\ 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k}$$

Or :

$$\begin{aligned} \mathrm{e} \leqslant 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{e} \leqslant 2(\mathrm{e}-1) \qquad \textit{(d'après } \textbf{2.c)}\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{e} \leqslant 2\,\mathrm{e} - 2 \\ &\Leftrightarrow \quad 2 \leqslant \mathrm{e} \end{aligned}$$

La dernière inégalité est vraie. Ainsi, par équivalence, la première inégalité aussi. D'où :

$$\mathrm{e} \leqslant 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \sum_{k=1}^{+\infty} u_k \leqslant 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k}.}$$

Commentaire

- La méthode de résolution de cette question est suggéré dans la question précédente. En effet, l'obtention d'un encadrement de u_n suggère que l'on va utiliser un critère de comparaison des séries à termes positifs pour conclure quant à la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$.
- Pour pouvoir appliquer ce critère, il faut d'abord démontrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{(n-1)!}$ est convergente. C'est pourquoi on commence par démontrer ce point.

□

Problème (EDHEC 2019 voie S)

Partie 1 : fonction génératrice d'une v.a.r. discrète finie

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul. On considère une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $[\![1,n]\!]$ et on appelle fonction génératrice de X, la fonction G définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X=k])\, t^k$$

1. Calculer $G(1)$.

Démonstration.
Par définition de G, on a :

$$\begin{array}{rcll} G(1) & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X=k])\, 1^k & \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X=k]) \ = \ 1 & \textit{(car la famille } \big([X=k]\big)_{k\in[\![1,n]\!]} \textit{ forme un système complet d'événements)} \end{array}$$

$$\boxed{G(1) = 1}$$

□

2. Exprimer l'espérance de X à l'aide de la fonction G.

Démonstration.

- La v.a.r. X est une v.a.r. finie (car $X(\Omega) \subset [\![1,n]\!]$). Elle admet donc une espérance.
- La fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est polynomiale (de degré n).
  Soit $t \in \mathbb{R}$.
  $$G'(t) \ = \ \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big([X=k]\big)\ k\, t^{k-1}$$
  En particulier, pour $t=1$, on a :
  $$G'(1) \ = \ \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big([X=k]\big)\ k\, 1^{k-1} \ = \ \sum_{k=1}^{n} k\, \mathbb{P}\big([X=k]\big) \ = \ \mathbb{E}(X)$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X \text{ admet une espérance. De plus : } \mathbb{E}(X) = G'(1).}$$

□

3. Établir la relation : $\mathbb{V}(X) = G''(1) + G'(1) - \big(G'(1)\big)^2$.

Démonstration.

- La v.a.r. X est finie (car $X(\Omega) \subset [\![1,n]\!]$). Elle admet donc une variance.
- La fonction G est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ car elle est polynomiale (de degré n).
  Rappelons que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} G'(t) & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big([X=k]\big)\ k\, t^{k-1} \\ & = & \left(\sum\limits_{k=2}^{n} \mathbb{P}\big([X=k]\big)\ k\, t^{k-1}\right) + \mathbb{P}\big([X=1]\big) \times 1\, t^{1-1} \\ & = & \left(\sum\limits_{k=2}^{n} \mathbb{P}\big([X=k]\big)\ k\, t^{k-1}\right) + \mathbb{P}\big([X=1]\big) \end{array}$$

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$G''(t) \;=\; \sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}\big([X=k]\big)\, k\,(k-1)\, t^{k-2}$$ *(en dérivant terme à terme et comme la dérivée du terme constant est nulle)*

En particulier, pour $t=1$, on a :

$$\begin{aligned} G''(1) &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\,\mathbb{P}\big([X=k]\big) = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)\,\mathbb{P}\big([X=k]\big) && \text{(en remarquant que le premier terme de cette somme est nul)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k^2\,\mathbb{P}\big([X=k]\big) - \sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}\big([X=k]\big) && \text{(par linéarité de la sommation)} \\ &= \mathbb{E}\big(X^2\big) - \mathbb{E}(X) && \text{(à l'aide du théorème de transfert)} \end{aligned}$$

- Finalement :

$$\begin{aligned} G''(1) + G'(1) - \big(G'(1)\big)^2 &= \Big(\mathbb{E}\big(X^2\big) - \cancel{\mathbb{E}(X)}\Big) + \cancel{\mathbb{E}(X)} - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 && \text{(d'après ce qui précède)} \\ &= \mathbb{E}\big(X^2\big) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 = \mathbb{V}(X) && \text{(d'après la formule de Kœnig-Huygens)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{V}(X) = G''(1) + G'(1) - \big(G'(1)\big)^2.}$$

Commentaire

Il convient ici de partir de l'expression la plus compliquée, à savoir :

$$G''(1) + G'(1) - \big(G'(1)\big)^2$$

afin d'obtenir la plus simple : $\mathbb{V}(X)$. C'est une stratégie qui peut être appliquée à d'autres situations : il est généralement plus aisé de reconstituer une expression que de la décomposer. $\square$

Partie 2 : un résultat d'analyse

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

4. a) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in [k, k+1]$. Alors :

$$k \;\leqslant\; x \;\leqslant\; k+1$$

$$\text{donc} \quad \frac{1}{k} \;\geqslant\; \frac{1}{x} \;\geqslant\; \frac{1}{k+1}$$ *(par décroissance de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$)*

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($k \leqslant k+1$) :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dx & \geqslant & \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx & \geqslant & \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dx \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ \dfrac{1}{k} & & \big[\ \ln(x)\ \big]_k^{k+1} & & \dfrac{1}{k+1} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On obtient bien : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}.}$$

□

b) Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n) + \dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \ln(n) + 1$.

Démonstration.

- D'après ce qui précède :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

- Soit $n \geqslant 2$. On somme les encadrements précédents pour k variant de 1 à $n-1$ ($n-1 \geqslant 1$).

$$\begin{array}{lccccccl} & \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} & \\ \text{donc} & \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} & \leqslant & \ln(n) - \cancel{\ln(1)} & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} & \textit{(par sommation télescopique)} \\ \text{d'où} & \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} & \leqslant & \ln(n) & \leqslant & \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{n} & \textit{(par décalage d'indice)} \\ \text{enfin} & u_n - 1 & \leqslant & \ln(n) & \leqslant & u_n - \dfrac{1}{n} & \textit{(par définition de } u_n\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{En réorganisant, on obtient bien : } \forall n \geqslant 2,\ \ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \ln(n) + 1.}$$

- Il reste à démontrer l'inégalité en $n = 1$. Or :

$$\ln(1) + \frac{1}{1} = 1 \quad \text{et} \quad u_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{et} \quad \ln(1) + 1 = 1$$

$$\boxed{\text{Finalement, on a bien : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \ln(n) + 1.}$$

Commentaire

- Les questions ***4.a)*** et ***4.b)*** sont une illustration d'une méthodologie classique connue sous le nom de comparaison série-intégrale.
- L'énoncé demande de démontrer l'inégalité à partir du rang 1, ce qui n'est pas très commode (le cas $n = 1$ doit être traité à part). Ce cas n'est pas d'un grand intérêt pour la suite de l'énoncé et notamment pour la question suivante qui vise à établir un équivalent de la suite (u_n) (on peut alors choisir n dans n'importe quel voisinage de $+\infty$).

□

c) En déduire un équivalent très simple de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- En multipliant membre à membre par $\dfrac{1}{\ln(n)} > 0$ l'inégalité obtenue en question précédente, on obtient :
$$1 + \frac{1}{n\ \ln(n)} \ \leqslant\ \frac{u_n}{\ln(n)} \ \leqslant\ 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$
- Or :
  × $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{n\ \ln(n)} = 1$.
  × $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{\ln(n)} = 1$.

  Ainsi, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{\ln(n)} = 1$.

$$\boxed{\text{Autrement dit : } u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n).}$$

Commentaire

- On prend garde de choisir initialement un entier $n \geqslant 2$ afin que la quantité $\dfrac{1}{\ln(n)}$ soit bien définie (c'est-à-dire tel que $\ln(n) \neq 0$).
- La propriété : $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$ est classique. Ce premier résultat est parfois complété par une étude permettant d'obtenir le début du développement asymptotique de la série harmonique. Plus précisément, on obtient :
$$u_n \ = \ \ln(n) + \gamma + \underset{n \to +\infty}{o}(1)$$
où γ ($\simeq 0,577$), appelée constante d'Euler est la limite de la suite $\big(u_n - \ln(n)\big)$.
La démonstration la plus usuelle fait intervenir des suites adjacentes et est donc tout à fait adaptée au programme ECE.
- Généralement, la suite des sommes partielles associée à la série harmonique est notée (h_n). Le choix de l'énoncé de noter :
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$
est donc un peu surprenant.

□

5. Montrer que la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Démonstration.
La série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant 2 ($2 > 1$). Elle est donc convergente.

$$\boxed{\text{La suite } (h_n)\text{, suite des sommes partielles associée à cette série est donc convergente.}}$$

□

Partie 3 : étude d'une expérience aléatoire

Dans cette partie, n désigne toujours un entier naturel non nul.

- On considère une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n ($n \geqslant 2$).
L'expérience aléatoire consiste à prélèver tous ces jetons un par un, au hasard, et sans remise.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note A_i la v.a.r. égale au numéro du jeton obtenu lors du $i^{\text{ème}}$ tirage.
- Pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, on dit qu'il y a **record** à l'instant i si le $i^{\text{ème}}$ jeton tiré a un numéro plus grand que tous les numéros précédemment tirés.
D'autre part, on convient qu'il y a systématiquement record à l'instant 1.
- Enfin, on note X_n la v.a.r. égale au nombre de records obtenus lorsque l'on procède à cette expérience dans une urne contenant n jetons.
On note alors G_n la fonction génératrice de X_n, E_n son espérance et V_n sa variance.

6. Donner la loi de X_1.

Démonstration.
Par définition, la v.a.r. X_1 correspond au nombre de records lorsque l'on procède à l'expérience dans une urne contenant un unique jeton.
Dans ce cas, on procède à un unique tirage.
Or, par convention, le résultat du premier tirage est toujours considéré comme un record.

On en déduit que la v.a.r. X_1 est la v.a.r. constante égale à 1.

Commentaire

- Il est recommandé de traiter les questions en début de chaque partie. Elles consistent souvent à se familiariser avec les nouvelles notations et présentent les cas les plus simples à traiter.
- Il est aussi recommandé de prendre le temps de bien lire l'énoncé. Pour donner la loi de la v.a.r. X_1, encore faut-il savoir ce qu'est cette v.a.r. X_1. De manière générale, il faut bien comprendre que l'indice i ($\in \mathbb{N}^*$) de la v.a.r. X_i situe le contexte de l'expérience puisque la v.a.r. X_i mesure le nombre de records lorsque l'expérience est effectuée dans une urne contenant i jetons.

□

7. a) Montrer : $X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

- ▶ **Initialisation** :
On l'a vu dans la question précédente : $X_1(\Omega) = \{1\}$.
D'où $\mathcal{P}(1)$.
- ▶ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $X_{n+1}(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$).
La v.a.r. X_{n+1} corespond au nombre de records lorsque l'on procède à l'expérience dans une urne qui contient $(n+1)$ jetons. Remarquons tout d'abord :
  - × qu'il y a au moins 1 record puisque le premier jeton tiré constitue un record par convention.
  - × qu'il y a au plus $(n+1)$ records puisqu'au mieux chaque jeton constitue un record.

$$\boxed{X_{n+1}(\Omega) \subset [\![1, n+1]\!]}$$

Il reste à démontrer l'inclusion réciproque.
Pour ce faire, étudions deux cas :

× si le premier jeton tiré est numéroté $(n+1)$ alors il constitue le seul record. En effet, les autres jetons seront tous numérotées avec un nombre plus petit.

$$\boxed{\{1\} \subset X_{n+1}(\Omega)}$$

× si le premier jeton est numéroté 1, il constitue un record et le reste du tirage s'effectue dans une urne qui contient les jetons numérotés 2 à $(n+1)$, numéros tous plus grands que 1.
Le nombre de records dans ce cas est :
  - le nombre de records obtenus dans une urne qui contient n jetons (ce sont ceux numérotés dans l'ensemble $[\![2, n+1]\!]$). D'après l'hypothèse de récurrence, ce nombre de records est un entier de l'ensemble $[\![1, n]\!]$.
  (pour s'en convaincre, on peut renuméroter 0, 1, $\dots$, n *les jetons* 1, 2, $\dots$, $n+1$ *initialement contenus dans l'urne ; on aura ainsi à considérer le nombre de records obtenus dans une urne qui contient n jetons numérotés de* 1 *à n une fois le premier jeton* 0 *tiré)*
  - incrémenté de 1 (le premier tirage constitue un record).

$$\boxed{\text{On en déduit : } [\![2, n+1]\!] \subset X_{n+1}(\Omega).}$$

Finalement : $[\![1, n+1]\!] \subset X_{n+1}(\Omega)$ et, l'inclusion réciproque étant elle aussi vérifiée :

$$X_{n+1}(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n).}$$

Commentaire

- La terminologie de l'énoncé « Montrer » et non pas « Justifier » semble appeler à une démonstration formelle. Le résultat étant donné, on ne peut se contenter d'un argument du type : « La v.a.r. X_n prend au pire la valeur 1, au mieux la valeur n et peut prendre toutes les valeurs intermédiaires » ne suffira pas à glaner les points (on paraphrase ici le résultat donné par l'énoncé).
- Il était quand même possible de procéder sans passer par une récurrence, en explicitant des tirages permettant d'obtenir les valeurs annoncées. Plus précisément :
  × si $\omega = (n, n-1, n-2, \dots, 1)$ alors $X_n(\omega) = 1$.
  × si $\omega = (n-1, n, n-2, \dots, 1)$ alors $X_n(\omega) = 2$.
  × si $\omega = (n-2, n-1, n, n-3, \dots, 1)$ alors $X_n(\omega) = 3$.
  × ...
  × si $\omega = (n-k, n-(k-1), \dots, n, n-(k+1), \dots, 1)$ alors $X_n(\omega) = k$.
  (on tire les jetons $n-k$ *à* n *dans l'ordre croissant puis* $n-(k+1)$ *à* 1 *dans l'ordre décroissant)*
  × ...
  × si $\omega = (1, 2, 3, \dots, n-1, n)$ alors $X_n(\omega) = n$.

  On démontre ainsi : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\exists \omega \in \Omega$, $X_n(\omega) = k$. Autrement dit :

$$[\![1, n]\!] \subset X_n(\Omega)$$

□

b) Déterminer $\mathbb{P}([X_n = 1])$ et $\mathbb{P}([X_n = n])$. En déduire les lois de X_2 et X_3.

Démonstration.

- L'événement $[X_n = 1]$ est réalisé si et seulement si on a obtenu un unique record lors de l'expérience. Ceci n'est vrai que si le premier tirage est le jeton numéroté n (si ce n'est pas le cas, en plus du record initial il y aura un autre record lorsque n sera pioché). Ainsi :
$$[X_n = 1] = [A_1 = n]$$
Enfin :
$$\mathbb{P}\big([X_n = 1]\big) \ = \ \mathbb{P}\big([A_1 = n]\big) \ = \ \frac{1}{n} \qquad \textit{(car lors du } 1^{er} \textit{ tirage, chaque jeton est obtenu de manière équiprobable)}$$
$$\boxed{\mathbb{P}\big([X_n = 1]\big) \ = \ \frac{1}{n}}$$
- L'événement $[X_n = n]$ est réalisé si et seulement si on a obtenu n records lors de l'expérience. C'est le cas uniquement si chaque tirage amène un record (chaque numéro est plus grand que tous les numéros précédemment tirés). Ainsi, $[X_n = n]$ est réalisé si et seulement si les jetons ont été tirés dans l'ordre croissant.
Chacun des n-tirages de l'expérience ayant la même probabilité d'apparaître, on obtient :
$$\mathbb{P}\big([X_n = n]\big) \ = \ \frac{\mathrm{Card}\big([X_n = n]\big)}{\mathrm{Card}(\Omega)} \ = \ \frac{1}{n!}$$
(Ω est l'ensemble des n-arrangements, c'est-à-dire des n-uplets d'éléments distincts de l'ensemble $[\![1, n]\!]$, qui ne sont autre que les permutations de l'ensemble $[\![1, n]\!]$)
$$\boxed{\mathbb{P}\big([X_n = n]\big) \ = \ \frac{1}{n!}}$$
- D'après la question ***7.a)***, $X_2(\Omega) = [\![1, 2]\!]$.
D'après ce qui précède : $\mathbb{P}\big([X_2 = 1]\big) = \dfrac{1}{2}$.
Et comme la famille $\big([X_2 = 1], [X_2 = 2]\big)$ forme un système complet d'événements :
$$\mathbb{P}\big([X_2 = 2]\big) = 1 - \mathbb{P}\big([X_2 = 1]\big) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
(on peut aussi utiliser : $\mathbb{P}\big([X_2 = 2]\big) = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$)
$$\boxed{\text{On en déduit : } X_2 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 2]\!]).}$$
- D'après la question ***7.a)***, $X_3(\Omega) = [\![1, 3]\!]$.
D'après ce qui précède : $\mathbb{P}\big([X_3 = 1]\big) = \dfrac{1}{3}$.
D'après ce qui précède : $\mathbb{P}\big([X_3 = 3]\big) = \dfrac{1}{3!} = \dfrac{1}{6}$.
Et comme la famille $\big([X_3 = 1], [X_3 = 2], [X_3 = 3]\big)$ forme un système complet d'événements :
$$\mathbb{P}\big([X_3 = 2]\big) = 1 - \big(\mathbb{P}\big([X_3 = 1] + \mathbb{P}\big([X_3 = 3]\big)\big) = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

En résumé, la loi de X_3 est définie par : × $X_3(\Omega) = [\![1, 3]\!]$, × $\mathbb{P}\big([X_3 = 1]\big) = \dfrac{1}{3}$, $\mathbb{P}\big([X_3 = 2]\big) = \dfrac{1}{2}$, $\mathbb{P}\big([X_3 = 3]\big) = \dfrac{1}{6}$.

□

c) En considérant le système complet d'événements $\big([A_n = n] \, , [A_n < n] \big)$, montrer :

$$\forall n \geqslant 2, \ \forall j \in [\![2, n]\!], \quad \mathbb{P}\big([X_n = j] \big) = \frac{1}{n} \, \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j-1] \big) + \frac{n-1}{n} \, \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j] \big)$$

Démonstration.
Soit $n > 2$ et soit $j \in [\![2, n]\!]$.

- La famille $\big([A_n = n] \, , [A_n < n] \big)$ est un système complet d'événements.
  D'après la formule des probabilités totales :

  $$\mathbb{P}\big([X_n = j] \big) \ = \ \mathbb{P}\big([A_n = n] \cap [X_n = j] \big) + \mathbb{P}\big([A_n < n] \cap [X_n = j] \big)$$

- L'événement $[A_n = n] \cap [X_n = j]$ est réalisé si et seulement :
  × le $n^{\text{ème}}$ jeton tiré est numéroté n,
  × et si on a obtenu j records lors des n premiers tirages.

  Or, le jeton n constitue forcément un record.
  On en déduit que l'événement $[A_n = n] \cap [X_n = j]$ est réalisé si et seulement :
  × le $n^{\text{ème}}$ jeton tiré est numéroté n,
  × et si on a obtenu $j-1$ records lors des $n-1$ premiers tirages.

  $\boxed{\text{Ainsi : } [A_n = n] \cap [X_n = j] \ = \ [A_n = n] \cap [X_{n-1} = j-1].}$

- L'événement $[A_n < n] \cap [X_n = j]$ est réalisé si et seulement :
  × le $n^{\text{ème}}$ jeton tirée n'est pas numéroté n,
  × et si on a obtenu j records lors des n premiers tirages.

  Or, si le jeton n n'a pas été tiré lors du $n^{\text{ème}}$ tirage, c'est qu'il a été tiré avant. Ainsi, le $n^{\text{ème}}$ jeton tiré ne constitue pas un record puisqu'il porte un numéro strictement plus petit que n.
  On en déduit que l'événement $[A_n < n] \cap [X_n = j]$ est réalisé si et seulement :
  × le $n^{\text{ème}}$ jeton tiré n'est pas numéroté n,
  × et si on a obtenu j records lors des $n-1$ premiers tirages.

  $\boxed{\text{Finalement : } [A_n < n] \cap [X_n = j] \ = \ [A_n < n] \cap [X_{n-1} = j]}$

- On peut alors reprendre le calcul initial :

  $$\begin{array}{cl} & \mathbb{P}\big([X_n = j] \big) \\ = & \mathbb{P}\big([A_n = n] \cap [X_n = j] \big) + \mathbb{P}\big([A_n < n] \cap [X_n = j] \big) \\ = & \mathbb{P}\big([A_n = n] \cap [X_{n-1} = j-1] \big) + \mathbb{P}\big([A_n < n] \cap [X_{n-1} = j] \big) \\ = & \mathbb{P}\big([A_n = n] \big) \, \mathbb{P}_{[A_n = n]}\big([X_{n-1} = j-1] \big) + \mathbb{P}\big([A_n < n] \big) \, \mathbb{P}_{[A_n < n]}\big([X_{n-1} = j] \big) \qquad (*) \\ = & \dfrac{1}{n} \, \mathbb{P}_{[A_n = n]}\big([X_{n-1} = j-1] \big) + \dfrac{n-1}{n} \, \mathbb{P}_{[A_n < n]}\big([X_{n-1} = j] \big) \\ = & \dfrac{1}{n} \, \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j-1] \big) + \dfrac{n-1}{n} \, \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j] \big) \end{array}$$

  La dernière égalité provient du fait que le nombre de records obtenus lors des $n-1$ premiers tirages ne dépend pas du résultat du $n^{\text{ème}}$ tirage.
  Les v.a.r. X_{n-1} et A_n sont donc indépendantes.

- Détaillons le calcul de $\mathbb{P}\big([A_n = n]\big)$ et $\mathbb{P}\big([A_n < n]\big)$.
  Cela démontrera au passage que ces deux probabilités sont non nulles ce qui est essentiel pour le calcul précédent (point $(*)$).

  Tout d'abord, remarquons que chaque n-tirage est obtenu de manière équiprobable (il y a autant de chance de vider l'urne d'une manière que d'une autre).

  - Un n-tirage réalisant l'événement $[A_n = n]$ est un n-uplet d'éléments distincts de $[\![1, n]\!]$ contenant le numéro n en $n^{\text{ème}}$ position. Un tel n-uplet est entièrement déterminé par :
    × le placement des jetons numérotés de 1 à $n-1$ dans les $n-1$ premières positions : $(n-1)!$ choix possibles.

    Il y a en tout : $(n-1)!$ tels n-tirages.
    On en déduit :
    $$\mathbb{P}\big([A_n = n]\big) = \frac{\text{Card}\big([A_n = n]\big)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$
    $$\boxed{\mathbb{P}\big([A_n = n]\big) = \frac{1}{n}}$$
  - La famille $\big([A_n = n], [A_n < n]\big)$ forme un système complet d'événements. On en déduit :
    $$\mathbb{P}\big([A_n < n]\big) = 1 - \mathbb{P}\big([A_n = n]\big) = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$$
    $$\boxed{\mathbb{P}\big([A_n < n]\big) = \frac{n-1}{n}}$$

Commentaire

Il était aussi possible (mais plus long) de procéder par dénombrement pour déterminer $\mathbb{P}\big([A_n < n]\big)$. Détaillons ci-dessous la rédaction.

Un n-tirage réalisant l'événement $[A_n < n]$ est un n-uplet d'éléments distincts de $[\![1, n]\!]$ contenant un numéro différent de n en $n^{\text{ème}}$ position.
Un tel n-uplet est entièrement déterminé par :
× le numéro du jeton (différente de n) en $n^{\text{ème}}$ position : $n-1$ choix possibles.
× le placement des $n-1$ autres jetons dans les $n-1$ premières positions : $(n-1)!$ choix possibles.

Il y a en tout : $(n-1) \times (n-1)!$ tels n-tirages.
On en déduit :
$$\mathbb{P}\big([A_n < n]\big) = \frac{\text{Card}\big([A_n < n]\big)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{(n-1) \times (n-1)!}{n!} = \frac{n-1}{n}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Finalement, on a bien :}\\ \forall n \geqslant 2,\ \forall j \in [\![2, n]\!],\quad \mathbb{P}\big([X_n = j]\big) = \dfrac{1}{n}\,\mathbb{P}\big([X_{n-1} = j-1]\big) + \dfrac{n-1}{n}\,\mathbb{P}\big([X_{n-1} = j]\big).\end{array}}$$ □

Commentaire

- Le concepteur n'attendait certainement pas ici une démonstration aussi détaillée du calcul de $\mathbb{P}\big([A_n = n]\big)$. Une justification du type « au $n^{\text{ème}}$ tirage, chaque jeton a la même probabilité d'apparaître donc $\mathbb{P}\big([A_n = n]\big) = \frac{1}{n}$ » serait certainement acceptée.
- La formule donnée dans l'énoncé peut permettre de nous guider. On peut remarquer que :
  - × le résultat du calcul de $\mathbb{P}\big([X_n = j]\big)$ se présente sous forme d'une somme. On peut donc penser que l'on va être amené à écrire l'événement $[X_n = j]$ sous forme d'une réunion d'événements incompatibles.
  - × les deux termes qui composent cette somme se présentent eux sous forme de produit. On peut donc penser que ces produits sont le résultat de la probabilité d'une intersection d'évenements (indépendants ou non).

  Finalement, le résultat permet de comprendre que l'on écrit $[X_n = j]$ comme réunion de deux événements qui s'écrivent eux-mêmes comme intersection d'événements. Il n'y a pas à douter : c'est la formule des probabilités totales qu'il faut utiliser.

d) Donner la loi de X_4.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après la question ***7.a)*** : $X_4(\Omega) = [\![1, 4]\!]$.
- D'après la question ***7.b)*** :

$$\mathbb{P}\big([X_4 = 1]\big) = \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}\big([X_4 = 4]\big) = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$$

- En appliquant le résultat de la question précédente pour $n = 4$ $(\geqslant 2)$ et $j = 2$ $(\in [\![2, 4]\!])$ on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([X_4 = 2]\big) &= \frac{1}{4}\,\mathbb{P}\big([X_3 = 1]\big) + \frac{4-1}{4}\,\mathbb{P}\big([X_3 = 2]\big) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \qquad \textit{(d'après la question \textbf{7.b)})} \\ &= \frac{2}{24} + \frac{9}{24} = \frac{11}{24} \end{aligned}$$

- Comme la famille $\big([X_4 = 1], [X_4 = 2], [X_4 = 3], [X_4 = 4]\big)$ forme un système complet d'événements, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([X_4 = 3]\big) &= 1 - \big(\mathbb{P}\big([X_4 = 1] + \mathbb{P}\big([X_4 = 2] + \mathbb{P}\big([X_4 = 4]\big)\big) \\ &= 1 - \left(\frac{6}{24} + \frac{11}{24} + \frac{1}{24}\right) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

En résumé, la loi de X_4 est définie par :
- × $X_4(\Omega) = [\![1, 4]\!]$,
- × $\mathbb{P}\big([X_4 = 1]\big) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}\big([X_4 = 2]\big) = \frac{11}{24}$, $\mathbb{P}\big([X_4 = 3]\big) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}\big([X_4 = 4]\big) = \frac{1}{24}$.

Commentaire

- Le calcul de $\mathbb{P}\big([X_4 = 2]\big)$ peut aussi être obtenu en appliquant le résultat de la question précédente pour $n = 4$ ($\geqslant 2$) et $j = 3$ ($\in [\![2, 4]\!]$). On obtient alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([X_4 = 3]\big) &= \frac{1}{4}\,\mathbb{P}\big([X_3 = 2]\big) + \frac{4-1}{4}\,\mathbb{P}\big([X_3 = 3]\big) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{24} + \frac{3}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

- La résolution de cette question s'appuie sur le résultat de la question précédente qui est fourni par l'énoncé, ainsi que sur le résultat de la ***7.b)***. Cette question est une simple application numérique et peut être traitée même si la question précédente ne l'est pas. Il est d'ailleurs vivement conseillé de le faire. De manière générale, il faut s'habituer à repérer ces questions qui fournissent facilement des points.

□

8. a) Vérifier que la formule obtenue à la question ***7.c)*** reste valable pour $j = 1$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- D'une part, d'après la question ***7.b)*** :

$$\mathbb{P}\big([X_n = 1]\big) = \frac{1}{n}$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned}& \frac{1}{n}\,\mathbb{P}\big([X_{n-1} = 0]\big) + \frac{n-1}{n}\,\mathbb{P}\big([X_{n-1} = 1]\big) \\ = \ & \frac{1}{n} \times 0 + \frac{n-1}{n}\,\frac{1}{n-1} && \textit{(car } 0 \notin X_{n-1}(\Omega) \textit{ et d'après la question } \textbf{\textit{7.b)}}\textit{)} \\ = \ & \frac{1}{n}\end{aligned}$$

On a bien :

$$\mathbb{P}\big([X_n = 1]\big) = \frac{1}{n}\,\mathbb{P}\big([X_{n-1} = 0]\big) + \frac{n-1}{n}\,\mathbb{P}\big([X_{n-1} = 1]\big)$$

$$\boxed{\text{La formule obtenue en } \textbf{\textit{7.c)}} \text{ reste valable pour } j = 1.}$$

Commentaire

Ce type de questions amène fréquemment à des erreurs de logique. Lorsque l'on demande de **démontrer** qu'une égalité est vérifiée à un certain rang, on détaille le membre de gauche, on détaille le membre de droit, et on conclut que les deux sont égaux. Par contre, il sera faux d'écrire :

$$\mathbb{P}\big([X_n = 1]\big) = \frac{1}{n}\,\mathbb{P}\big([X_{n-1} = 0]\big) + \frac{n-1}{n}\,\mathbb{P}\big([X_{n-1} = 1]\big) = \ldots = \frac{1}{n}$$

car on ne peut **supposer** la première égalité. Il s'agit précisément de la démontrer !

□

b) Établir la relation :

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad G_n(t) \ = \ \frac{t+n-1}{n}\, G_{n-1}(t) \qquad (\star)$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$ et soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rll} & G_n(t) & \\ = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(\,[X_n = k]\,\big)\, t^k & \textit{(par définition)} \\ = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\, \mathbb{P}\big(\,[X_{n-1} = k-1]\,\big) + \frac{n-1}{n}\, \mathbb{P}\big(\,[X_{n-1} = k]\,\big)\right) t^k & \textit{(d'après la } \textbf{7.c)} \textit{ et la } \textbf{8.a)}\textit{)} \\ = & \displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(\,[X_{n-1} = k-1]\,\big)\, t^k + \frac{n-1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(\,[X_{n-1} = k]\,\big)\, t^k & \textit{(par linéarité de la somme)} \\ = & \displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}\big(\,[X_{n-1} = k]\,\big)\, t^{k+1} + \frac{n-1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(\,[X_{n-1} = k]\,\big)\, t^k & \textit{(par décalage d'indice)} \\ = & \displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\big(\,[X_{n-1} = k]\,\big)\, t^{k+1} + \frac{n-1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\big(\,[X_{n-1} = k]\,\big)\, t^k & \begin{array}{l}\textit{(car } \mathbb{P}\big(\,[X_{n-1} = 0]\,\big) = 0 \\ \textit{et } \mathbb{P}\big(\,[X_{n-1} = n]\,\big) = 0\textit{)}\end{array} \\ = & \displaystyle\frac{t}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\big(\,[X_{n-1} = k]\,\big)\, t^k + \frac{n-1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\big(\,[X_{n-1} = k]\,\big)\, t^k & \\ = & \displaystyle\frac{t}{n}\, G_{n-1}(t) + \frac{n-1}{n}\, G_{n-1}(t) & \\ = & \displaystyle\frac{t+n-1}{n}\, G_{n-1}(t) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall n \geqslant 2,\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad G_n(t) \ = \ \frac{t+n-1}{n}\, G_{n-1}(t).}$$

□

c) En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad G_n(t) \ = \ \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (t+j)$$

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_n(t) = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\prod_{j=0}^{n-1} (t+j)$.

▸ **Initialisation** :
Soit $t \in \mathbb{R}$.

- D'une part :

$$G_1(t) = \sum_{k=1}^{1} \mathbb{P}\big(\,[X_1 = k]\,\big)\, t^k = \mathbb{P}\big(\,[X_1 = 1]\,\big)\, t = \frac{1}{1}\, t = t$$

- D'autre part :

$$\frac{1}{1!} \prod_{j=0}^{1-1} (t+j) = \prod_{j=0}^{0} (t+j) = t+0 = t$$

D'où $\mathcal{P}(1)$.

- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Suppposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ $\left(\textit{i.e.} : \forall t \in \mathbb{R},\ G_{n+1}(t) = \dfrac{1}{(n+1)!} \displaystyle\prod_{j=0}^{n} (t+j) \right)$.
Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcll} G_{n+1}(t) & = & \dfrac{t+n}{n+1}\, G_n(t) & \textit{(en appliquant le résultat } \textbf{\textit{8.c)}} \\ & & & \textit{en } n+1 \geqslant 2 \textit{ et } t \in \mathbb{R}) \\ & = & \dfrac{t+n}{n+1}\, \dfrac{1}{n!} \displaystyle\prod_{j=0}^{n-1} (t+j) & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & \dfrac{1}{n+1}\, \dfrac{1}{n!} \left(\displaystyle\prod_{j=0}^{n-1} (t+j) \right) \times (t+n) & \\ & = & \dfrac{1}{(n+1)!} \displaystyle\prod_{j=0}^{n} (t+j) & \end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n).}$$

Commentaire

- En question ***8.b)***, on a démontré :

$$\forall m \geqslant 2, \forall t \in \mathbb{R},\ G_m(t) = \frac{t+m-1}{m}\, G_{m-1}(t)$$

(la variable n est sous la portée d'un quantificateur et peut donc être renommée sans que cela ne change le sens de la propriété)
Dans la récurrence ci-dessus, on utilise ce résultat pour $m = n+1 \geqslant 2$ (car $n \in \mathbb{N}^*$).
- La propriété $\mathcal{P}(n)$ est quantifiée universellement sur la variable t. Pour démontrer $\mathcal{P}(n+1)$, on doit donc commencer par introduire la variable t (« Soit $t \in \mathbb{R}$ »). Cela ne doit pas poser de problème particulier : on ne fait qu'appliquer ici les mécanismes de rédaction habituels.
- Cette question, une nouvelle fois, peut-être traitée même sans avoir traité les précédentes. En effet, la résolution repose essentiellement sur le résultat de la question ***8.c)*** qui est donné dans l'énoncé.

□

9. En dérivant la relation $(\star)$, trouver une relation entre E_n et E_{n-1} puis montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E_n = u_n$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- Rappelons que les fonctions G_n et G_{n-1} sont dérivables sur $\mathbb{R}$ car polynomiales.
En dérivant formellement de part et d'autre de l'égalité $(\star)$, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_n'(t) \ = \ \left(\frac{1}{n}\, G_{n-1}(t) \right) + \left(\frac{t+n-1}{n}\, G_{n-1}'(t) \right)$$

- En particulier, pour $t = 1$:

$$\underbrace{G'_n(1)}_{E_n} = \left(\frac{1}{n}\, G_{n-1}(1)\right) + \left(\frac{1+n-1}{n}\, G'_{n-1}(t)\right) = \frac{1}{n}\, \underbrace{G_{n-1}(1)}_{1} + \underbrace{G'_{n-1}(1)}_{E_{n-1}}$$

*(d'après la question **1.** et **2.**)*

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \ E_n = \frac{1}{n} + E_{n-1}}$$

- D'après ce qui précède, pour tout $k \geqslant 2$:

$$E_k - E_{k-1} = \frac{1}{k}$$

Par sommation terme à terme de ces égalités, on obtient :

$$\underbrace{\sum_{k=2}^{n} (E_k - E_{k-1})}_{= E_n - E_1} = \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}}_{= u_n - 1}$$

Il suffit alors de remarquer : $E_1 = \mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(1) = 1$ pour conclure.

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ E_n = u_n \quad \text{et} \quad E_1 = 1 = u_1}$$

□

10. Recherche d'un équivalent de V_n.

a) En dérivant une deuxième fois la relation $(\star)$, montrer :

$$\forall n \geqslant 2,\ V_n - V_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- Rappelons que les fonctions G_n et G_{n-1} sont dérivables deux fois sur $\mathbb{R}$ car polynomiales.
En dérivant formellement de part et d'autre de l'égalité $(\star\star)$, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G''_n(t) = \left(\frac{1}{n}\, G'_{n-1}(t)\right) + \left(\frac{1}{n}\, G'_{n-1}(t)\right) + \left(\frac{t+n-1}{n}\, G''_{n-1}(t)\right)$$

- En particulier, pour $t = 1$:

$$G''_n(1) = \frac{2}{n}\, G'_{n-1}(1) + G''_{n-1}(1)$$

D'après la question ***3.*** : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $G''_n(1) = V_n - E_n + \big(E_n\big)^2$. On en déduit :

$$V_n - E_n + \big(E_n\big)^2 = \frac{2}{n}\, E_n + \Big(V_{n-1} - E_{n-1} + \big(E_{n-1}\big)^2\Big)$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
V_n - V_{n-1} &= E_n + \frac{2}{n}\, E_{n-1} - (E_n)^2 - E_{n-1} + (E_{n-1})^2 \\
&= \cancel{E_n} + \frac{2}{n}\left(E_n - \frac{1}{n}\right) - (E_n)^2 - \left(\cancel{E_n} - \frac{1}{n}\right) + \left(E_n - \frac{1}{n}\right)^2 \qquad \textit{(car } E_n = E_{n-1} + \frac{1}{n}\textit{)} \\
&= \cancel{\frac{2}{n} E_n} - \frac{2}{n^2} + \cancel{(E_n)^2} + \frac{1}{n} + \left(\cancel{(E_n)^2} - \cancel{\frac{2}{n} E_n} + \frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ V_n - V_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}$$

□

b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, V_n en fonction de u_n et h_n.

Démonstration.

- Dans la question précédente, on a démontré, pour tout $k \geqslant 2$:

$$V_k - V_{k-1} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}$$

- Par sommation terme à terme de ces égalités, on obtient :

$$\begin{array}{ccc}
\sum\limits_{k=2}^{n} (V_k - V_{k-1}) & = & \sum\limits_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}\right) \\
\| & & \| \\
V_n - V_1 & & \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}
\end{array}$$

- Or :

$$V_1 = \mathbb{V}(X_1) = \mathbb{V}(1) = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = u_n - \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} = h_n - \frac{1}{n^2}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \geqslant 2,\ V_n = u_n - h_n + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}.}$$

- Enfin, remarquons :

$$u_1 - h_1 + \frac{1}{1^2} - \frac{1}{1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^2} - \frac{1}{1} = 0$$

On en déduit que la relation précédente est aussi vérifiée en $n = 1$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ V_n = u_n - h_n + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}}$$

□

c) Montrer : $V_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- D'après la question précédente :

$$\frac{V_n}{\ln(n)} = \frac{u_n - h_n + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}}{\ln(n)} = \frac{u_n}{\ln(n)} - \frac{h_n}{\ln(n)} + \frac{1}{n^2\ \ln(n)} - \frac{1}{n\ \ln(n)}$$

- Or :
  × $\dfrac{u_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ car $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ d'après la question ***4.c)***.
  × $\dfrac{h_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car (h_n) admet une limite finie (question ***5***) et $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
  × $\dfrac{1}{n^2\,\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $n^2\,\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
  × $\dfrac{1}{n\,\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $n\,\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
- Finalement :

$$\frac{V_n}{\ln(n)} = \frac{u_n}{\ln(n)} - \frac{h_n}{\ln(n)} + \frac{1}{n^2\,\ln(n)} - \frac{1}{n\,\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } V_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$$

$\square$

Partie 4 : simulation informatique liée à l'expérience

Dans cette partie, on s'intéresse à la simulation **Python** de l'expérience aléatoire et des v.a.r. définies dans la partie précédente.

11. L'objectif de cette question est de coder une fonction **Python** permettant de simuler le tirage complet dans urne possédant n jetons numérotés de 1 à n.

a) Compléter la fonction **Python** suivante afin qu'elle renvoie la liste `B` obtenu en échangeant les éléments en position `i` et `j` de la liste `A` (paramètre d'entrée de la fonction).

```
1 def echangeLigne(A, i, j) :
2     B = np.copy(A)
3     B[j] = ---
4     B[i] = ---
5     return B
```

Démonstration.

- La ligne 2 permet de stocker une copie de la liste `A` dans une variable `B`.

```
2     B = np.copy(A)
```

- On met alors à jour la variable `B` de sorte qu'elle contienne la valeur `A[i]` en position `j` et la valeur `A[j]` en position `i`.

```
3     B[j] = A[i]
4     B[i] = A[j]
```

Commentaire

On l'a déjà dit : compléter correctement le programme **Python** démontre la bonne compréhension et permet d'obtenir la totalité des points alloués à cette question.
Cette remarque s'applique aux questions qui suivent.

$\square$

b) On considère la fonction **Python** suivante.

```python
def tirageComplet(n) :
    A = [k for k in range(1, n+1)]
    i = n - 1
    for k in range(1, n+1) :
        j = rd.randint(0, i)
        A = echangeLigne(A, i, j)
        i = i - 1
    return A
```

Commenter la stratégie adoptée dans cette fonction afin de répondre à l'objectif initial.
On précisera notamment ce que représente intialement la liste `A` et commentera brièvement son évolution.

Démonstration.

- Le programme débute en initialisant la variable `A`. Elle est initialement affectée à la liste $[1, 2, 3, \dots, \mathtt{n}]$.

```python
    A = [k for k in range(1, n+1)]
```

- Le reste du programme consiste à réaliser un « mélange » de ce vecteur ligne en procédant à des échanges de coefficients. Détaillons ce procédé. Commençons par rappeler que la commande `rd.randint(0, i)` permet de simuler un tirage aléatoire d'un nombre compris dans l'ensemble $[\![0, i-1]\!]$. Le programme agit comme suit :
  × lors du 1^{er} tour de boucle, on choisit un nombre `j` dans $[\![0, \mathtt{n}-1]\!]$ (rappelons que la variable `i` est initialement affectée à $\mathtt{n}-1$).

```python
        j = rd.randint(0, i)
```

  × puis on échange les éléments `A[j]` et `A[n-1]`.

```python
        A = echangeLigne(A, i, j)
```

  × enfin, on décrémente le contenu de la variable `i`.

```python
        i = i - 1
```

  × au tour de boucle suivant, `i` vaudra alors `n-2`.
  On procède alors au tirage d'un entier `j` dans $[\![1, \mathtt{n}-2]\!]$.
  Puis on échange les éléments `A[j]` et `A[n-2]`.

  Et ainsi de suite : le $(\mathtt{n}-3)^{\text{ème}}$ élément de `A` sera échangé avec un élément qui le précède (éventuellement lui-même), puis le $(\mathtt{n}-4)^{\text{ème}}$ coefficient est échangé avec un coefficient qui le précède, …, puis le $\mathtt{1}^{\text{er}}$ (échangé avec le $0^{\text{ème}}$ ou 1^{er} élément de `A`) puis le $\mathtt{0}^{\text{ème}}$ (échangé avec lui-même).

- À la fin du programme, `A` est un vecteur ligne qui contient les nombres de $[\![1, n]\!]$ dans un ordre a priori quelconque : les échanges successifs de coefficients ont permis d'obtenir une permutation des coefficients de `A`. Or, simuler un tirage complet c'est obtenir une permutation des éléments de $[\![1, n]\!]$ (on tire un premier élément de $[\![1, n]\!]$, puis un autre, puis un autre, etc.). Pour que l'objectif initial de la question soit rempli, il faut que toutes ces permutations apparaissent de manière équiprobable, ce que l'on peut supposer (mais qu'on ne démontre pas) au vu de la manière de procéder.

□

12. On s'intéresse maintenant à la fonction **Python** suivante.

```python
1 def mystere(n) :
2     A = tirageComplet(n)
3     m = A[0]
4     x = 1
5     for k in range(1, n) :
6         if A[k] > m :
7             m = A[k]
8             x = x + 1
9     return x
```

a) Expliquer pourquoi, à la fin de la boucle `for`, la variable `m` contient la valeur n.

Démonstration.
Détaillons les éléments de ce programme.

- Initialement, on stocke dans `A` une permutation des nombres de $[\![1, n]\!]$.

```python
2     A = tirageComplet(n)
```

- Puis la variable `m` est affectée au contenu de l'élément `A[0]`.

```python
3     m = A[0]
```

- On entre alors dans la boucle (ligne 5 et suivantes) qui va permettre d'inspecter le contenu de chaque coefficient `A[k]`.

```python
5     for k in range(1, n) :
6         if A[k] > m :
7             m = A[k]
8             x = x + 1
```

  Plus précisément :

  × lors du 1$^{\text{er}}$ tour de boucle (`k` vaut alors 1), on teste si l'élément `A[1]` est plus grand que `m` (qui vaut initialement `A[0]`). Si c'est le cas, on écrase le contenu de la variable `m` en y stockant `A[1]`. Ainsi, `m` contient alors le plus grand des deux éléments `A[0]` et `A[1]`.

  × lors du 2$^{\text{ème}}$ tour de boucle (`k` vaut alors 2), on teste si l'élément `A[2]` est plus grand que `m` (qui est le plus grand des deux éléments `A[0]` et `A[1]`). Si c'est le cas, on écrase le contenu de la variable `m` en y stockant `A[2]`.

  × ...

  × lors du $(n-1)^{\text{ème}}$ et dernier tour de boucle (`k` vaut alors $n-1$), on teste si l'élément `A[n-1]` est plus grand que `m` (qui est le plus grand des éléments `A[0]`, `A[1]`, ..., `A[n-2]`). Si c'est le cas, on écrase le contenu de la variable `m` en y stockant `A[n-1]`.

- Ainsi, à la fin de la boule, la variable `m` est le maximum des valeurs `A[0]`, `A[1]`, ..., `A[n-1]`. Or, la variable `A` contient une permutation des nombres de $[\![1, \mathtt{n}]\!]$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la variable } \mathtt{m} \text{ contient, à la fin de la boucle } \mathtt{for}\text{, la valeur } n.}$$

□

b) Que représente la variable `x` ? On fera le lien avec une v.a.r. précédemment définie.

Démonstration.

- La variable `x` est initialement affectée à 1.
- Si on reprend le déroulé du programme précédente, on s'aperçoit que la variable `x` est incrémenté à chaque fois que la variable `m` est mise à jour. Autrement dit, `x` est inrcémentée à chaque fois que l'on a trouvé un coefficient plus grand que tous les précédents.

La variable `x` permet de simuler la v.a.r. X_n : elle permet en effet de compter tous les records à l'issue d'un tirage complet dans l'urne.

□