DS2 (version A) /178

Exercice 1 /40 (ECRICOME 2008)

À tout couple (a, b) de deux réels, on associe la matrice $M(a, b)$ définie par :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix}$$

On désigne par E l'ensemble des matrices $M(a, b)$ où a et b décrivent $\mathbb{R}$.
Ainsi : $E = \{M(a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.
On note I la matrice identité $M(1, 0)$ et A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

- **2 pts :** $E = \mathrm{Vect}\,(I, A)$ **ou utilisation de la définition de sev**

2. Donner la dimension de E.

- **1 pt : caractère générateur**
- **1 pt : caractère libre**

3. ***a)*** Montrer que l'ensemble $F = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$ est un espace vectoriel.

- **1 pt : écriture système** $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & 2\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2,y & - & 4\,z & = & 0 \\ -x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \end{array} \right.$
- **1 pt : résolution** $\left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & y & + & 2\,z \end{array} \right.$
- **1 pt : écriture sous forme de sev engendré :** $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

b) Montrer que la matrice $A - I$ n'est pas inversible. En déduire que F est de dimension supérieure ou égale à 1.

- **1 pt :** $A - I$ **non inversible**
- **1 pt :** $\dim(F) \geqslant 1$

c) Déterminer l'ensemble F, puis donner une base $\mathscr{B}_1$ de F.

- **1 pt : caractère générateur**
- **1 pt : caractère libre**

4. On considère l'ensemble $G = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X\}$.
On admet que G est un espace vectoriel.

a) Déterminer une base $\mathscr{B}_2$ de G.

- **3 pts :** $G = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ **(1 pt pour écriture système** $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & - & y & - & 2z & = & 0 \\ 2x & - & 3y & - & 4y & = & 0 \\ -x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$ **, 1 pt pour résolution, 1 pt pour écriture sous forme de sev engendré)**

- **2 pts :** $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ **base de G (1 pt caractère générateur, 1 pt caractère libre)**

b) Montrer que $F \cap G = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

- **1 pt :** $\supset$
- **2 pts :** $\subset$

c) Montrer que la famille $\mathscr{B}$ obtenue en réunissant les vecteurs de la base $\mathscr{B}_1$ de F et de la base $\mathscr{B}_2$ de G forme une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- **2 pts :** $\mathscr{B}$ **libre**
- **1 pt :** $\text{Card}(\mathscr{B}) = 3 = \dim\big(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big)$

d) Déterminer les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, puis celles du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, dans la base $\mathscr{B}$.

- **1 pt :** $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **a pour coordonnées** $(1, 0, 0)$ **dans** B**.**
- **2 pts :** $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **a pour coordonnées** $(5, -1, 2)$ **dans** $\mathscr{B}$**.**

5. On considère la matrice P définie par $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que P est inversible et calculer sa matrice inverse P^{-1}.

- **3 pts :** $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

b) Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$.

- **1 pt :** $AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **ou** $P^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

a) Prouver que la matrice $D(a, b) = P^{-1}M(a, b)P$ est une matrice diagonale.

- **1 pt :** $M(a, b) = a \cdot I + b \cdot A$
- **1 pt :** $D(a, b) = a \cdot I + b \cdot D$

b) Montrer que $M(a, b)$ est inversible si et seulement si $D(a, b)$ est inversible.
En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $M(a, b)$ soit inversible.

- **2 pts :** $M(a, b)$ **inversible** $\Leftrightarrow$ $D(a, b)$ **inversible (1 pt par implication)**
- **1 pt :** $M(a, b)$ **inversible ssi** $\left\{ \begin{array}{l} a + 2b \neq 0 \\ a + b \neq 0 \end{array} \right.$

c) Prouver que $\big(M(a, b)\big)^2 = I$ si et seulement si $\big(D(a, b)\big)^2 = I$.
En déduire l'existence de quatre matrices $M(a, b)$ que l'on déterminera, vérifiant :

$$\big(M(a, b)\big)^2 = I$$

- **2 pts :** $\big(M(a, b)\big)^2 = I \ \Leftrightarrow\ \big(D(a, b)\big)^2 = I$
- **1 pt : obtention 4 systèmes**
- **2 pts : résolutions (1/2 pt ar système) :** $M(1, 0)$**,** $M(-3, 2)$**,** $M(3, -2)$ **et** $M(-1, 0)$

Exercice 2 /31 (EDHEC 2022)

On désigne par n un entier naturel non nul, par p un réel de $]0, 1[$ et on pose : $q = 1 - p$.
Dans la suite, on s'intéresse à un jeu vidéo au cours duquel le joueur doit essayer, pour gagner, de réussir, dans l'ordre, n niveaux numérotés 1, 2, ..., n, ce joueur ne pouvant accéder à un niveau que s'il a réussi le niveau précédent. Le jeu s'arrête lorsque le joueur échoue à un niveau ou bien lorsqu'il a réussi les n niveaux du jeu.
Pour tout entier k de $[\![1, n-1]\!]$, on dit que le joueur a le niveau k si, et seulement si, il a réussi le niveau k et échoué au niveau $k + 1$. On dit que le joueur a le niveau n si, et seulement si, il a réussi le niveau n et on dit que le joueur a le niveau 0 s'il a échoué au niveau 1.
On admet que la probabilité de passer d'un niveau à un autre est constante et égale à p, la probabilité d'accéder au niveau 1 étant, elle aussi, égale à p.
On note X_n le niveau du joueur et on admet que X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.
Pour tout k de $[\![1, n]\!]$, on note R_k l'événement : « le joueur réussit le niveau k ».

1. Compléter le script **Python** suivant afin qu'il permette de simuler ce jeu et d'afficher la valeur prise par X_n dès que l'utilisateur saisit une valeur de p.

```
import random as rd
p = float(input(‘‘entrez la valeur de p dans ]0,1[ :‘‘))
n = int(input(‘‘entrez la valeur de n :‘‘))
X = -----
while ----- and (rd.random() <= p) :
    X = -----
print(‘‘le niveau du joueur est :‘‘ + str(X))
```

- **1 pt :**

```
4   X = 0
```

- **1 pt :**

```
5   while (X < n) and (rd.random() <= p) :
```

- **1 pt :**

```
6       X = X + 1
```

2. a) Justifier soigneusement que l'ensemble des valeurs prises par X_n est : $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

- **1 pt :** $X_n(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$
- **2 pts :** $[\![0, n]\!] \subset X_n(\Omega)$

b) Déterminer la probabilité $\mathbb{P}\big([X_n = 0]\big)$.

- **1 pt : explications** $[X_n = 0] = \overline{R_1}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([X_n = 0]\big) = \mathbb{P}(\overline{R_1}) = q$

c) Écrire l'événement $[X_n = n]$ à l'aide de certains des événements R_k puis déterminer la probabilité $\mathbb{P}\big([X_n = n]\big)$.

- **1 pt : explications** $[X_n = n] = \bigcap\limits_{k=1}^{n} R_k$
- **1 pt : formule des probabilités composées**
- **1 pt : explications** $\mathbb{P}_{R_1 \cap \cdots \cap R_{n-1}}(R_n) = p$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([X_n = n]\big) = p^n$

d) Écrire, pour tout entier k de $[\![1, n-1]\!]$, l'événement $[X_n = k]$ à l'aide de certains des événements R_k puis déterminer la probabilité $\mathbb{P}\big([X_n = k]\big)$. Vérifier que l'expression trouvée reste valable pour $k = 0$.

- **1 pt : explications** $[X_n = k] = \left(\bigcap\limits_{i=1}^{k} R_i\right) \cap \overline{R_{k+1}}$
- **1 pt : explications** $\mathbb{P}_{R_1 \cap \cdots \cap R_k}(\overline{R_{k+1}}) = q$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([X_n = k]\big) = p^k\, q$
- **1 pt : formule valide pour** $k = 0$

3. Vérifier par le calcul : $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) = 1$.

- **1 pt : découpage de la somme puis utilisation de *2.d)* et *2.c)***
- **1 pt : fin du calcul**

4. a) Expliquer pourquoi X_n admet une espérance et écrire cette dernière sous forme d'une somme dépendant de n et de p.

- **1 pt : La v.a.r. X_n admet une espérance car c'est une v.a.r. finie.**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_n) = q \sum\limits_{k=0}^{n-1} k\, p^k + n\, p^n$

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

- **1 pt : la série $\sum\ k\, p^{k-1}$ est une série géométrique dérivée de raison $p \in\ ]-1,1[$. Elle est donc convergente.**
- **1 pt : comme $p \in\ ]0,1[$, par croissances comparées : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\, p^n = 0$**
- **1 pt : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = \dfrac{p}{q}$**

5. a) Montrer que, pour tout entier naturel k et pour tout entier n supérieur ou égal à $k+1$, on a : $\mathbb{P}\big(\,[X_n = k]\,\big) = p^k\, q$.

- **1 pt**

b) On note X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\big(\,[X = k]\,\big) = p^k\, q$.
Démontrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(\,[X_n = k]\,\big) \ = \ \mathbb{P}\big(\,[X = k]\,\big)$$

- **1 pt : Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0$, $n \geqslant k+1$.**
  Soit $n \geqslant n_0$. Alors : $n \geqslant k+1$. Ainsi, d'après la question précédente :

$$\mathbb{P}\big(\,[X_n = k]\,\big) \ = \ p^k\, q \ \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ p^k\, q$$

- **2 pts : vérifier que X définit une loi de probabilité**
  × **1 pt : $\forall k \in \mathbb{N}$, $p^k\, q \geqslant 0$**
  × **1 pt : $\sum\ p^k\, q$ converge et sa somme vaut 1**

c) On pose : $Y = X + 1$.
Reconnaître la loi de Y puis en déduire l'espérance de X et la comparer à $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

- **2 pts : $Y \hookrightarrow \mathcal{G}\,(q)$**
  × **1 pt : $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$**
  × **1 pt : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\big(\,[Y = k]\,\big) = p^{k-1}\, q$**
- **1 pt : la v.a.r. X admet une espérance en tant que transformée affine de la v.a.r. Y qui en admet une.**
- **1 pt : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{p}{q} = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$**

Exercice 3 /31 (`EDHEC 2013 voie S`)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$ converge.
Le but de cet exercice est de prouver, pour des cas particuliers, que la série de terme général $u_n = \dfrac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$ converge également et que, de plus, on a : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k \leqslant 2 \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{a_k}$.

1. Étude d'un premier exemple : pour tout entier n non nul, on pose : $a_n = n(n+1)$.

a) Vérifier : $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, puis en déduire que la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$ converge et donner sa somme.

- **1 pt :** $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{N} \dfrac{1}{a_k} = 1 - \dfrac{1}{N+1}$ **par télesopage**
- **1 pt :** $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{a_n}$ **convergente et** $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{a_k} = 1$

b) Pour tout entier naturel non nul n, déterminer u_n en fonction de n.

- **2 pts :** $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$
- **1 pt :** $u_n = \dfrac{3}{(n+1)(n+2)}$

c) Établir la convergence de la série de terme général u_n et donner sa somme, puis en déduire l'inégalité demandée.

- **1 pt :** $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{N} u_k = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{N+2}$
- **1 pt :** $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ **convergente et** $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k = \dfrac{3}{2}$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k \leqslant 2 \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{a_k}$

2. Étude d'un deuxième exemple.
On suppose, dans cette question, que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $a_n = n!$.

a) Écrire une fonction **Python** d'en-tête `def facto(n)`, qui prend en paramètre un entier n et renvoie $n!$.

- **4 pts : 1 pt pour structure de fonction, 1 pt pour initialisation, 2 pts pour boucle** `for`

```
def facto(n) :
    y = 1
    for i in range(1, n+1) :
        y = y * i
    return y
```

b) Écrire un programme **Python**, utilisant cette fonction, et permettant de calculer et afficher la valeur de u_n, lorsque la valeur de n est entrée au clavier par l'utilisateur.

- **5 pts : 1 pt pour initialisation `n` et `S`, 2 pts pour boucle `for`, 1 pt pour `u = n / S`, 1 pt pour `print(u)`**

```
n = int(input("Entrez un entier non nul n :"))
S = 0
for k in range(1, n+1) :
    S = S + facto(k)
u = n / S
print(u)
```

c) Établir la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$.

- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{a_n}$ **convergente**
- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k} = \mathbf{e} - 1$

d) Montrer, pour tout entier naturel n non nul : $u_n \leqslant \dfrac{1}{(n-1)!}$.

- **2 pts**

e) En déduire que la série de terme général u_n converge et que l'on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k \leqslant 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k}$.

- **2 pts :** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(n-1)!}$ **convergente et** $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} = \mathbf{e}$
- **1 pt :** $u_n \geqslant 0$
- **2 pts : critère de comparaison des séries à termes positifs**
- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k \leqslant \mathbf{e}$
- **2 pts :** $\mathbf{e} \leqslant 2 \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k}$

Problème (`EDHEC 2019 voie S`) /76

Partie 1 : fonction génératrice d'une v.a.r. discrète finie /9

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul. On considère une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $[\![1, n]\!]$ et on appelle fonction génératrice de X, la fonction G définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X = k])\, t^k$$

1. Calculer $G(1)$.

- **1 pt : $\big([X = k]\big)_{k \in [\![1,n]\!]}$ forme un SCE**

2. Exprimer l'espérance de X à l'aide de la fonction G.

- **1 pt : X est une v.a.r. finie, donc admet une espérance**
- **1 pt : G dérivable sur $\mathbb{R}$ et $G' : t \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} k\, t^{k-1}\, \mathbb{P}([X = k])$**
- **1 pt : $\mathbb{E}(X) = G'(1)$**

3. Établir la relation : $\mathbb{V}(X) = G''(1) + G'(1) - \big(G'(1)\big)^2$.

- **1 pt : X v.a.r. finie, donc admet une variance**
- **2 pts : G deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $G'' : t \mapsto \sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1)\, t^{k-2}\, \mathbb{P}([X = k])$**
- **1 pt : $G''(1) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$**
- **1 pt : $\mathbb{V}(X) = G''(1) + G'(1) - \big(G'(1)\big)^2$**

Partie 2 : un résultat d'analyse /10

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ et $h_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$.

4. a) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$.

- **1 pt : $\dfrac{1}{k} \geqslant \dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{1}{k+1}$**
- **1 pt : croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant**

b) Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ln(n) + \dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \ln(n) + 1$.

- **1 pt : sommation 1 à $(n-1)$ avec $n - 1 \geqslant 1$ (0 si mauvaise quantification de n : $n \geqslant 2$)**
- **1 pt : télescopage $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) = \ln(n)$**
- **1 pt : décalage d'indice $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k+1} = \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k}$**
- **1 pt : définition u_n**
- **1 pt : cas $n = 1$**

c) En déduire un équivalent très simple de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

- **1 pt : multiplication par** $\dfrac{1}{\ln(n)} > 0$
- **1 pt : théorème d'encadrement**

5. Montrer que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente.

- **1 pt**

Partie 3 : étude d'une expérience aléatoire /46

6. Donner la loi de X_1.

- **1 pt (**0 **si on ne précise pas la valeur de la constante)**

7. a) Montrer : $X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

- **4 pts : 1 pt pour initialisation, 3 pts pour hérédité (maximum 2 pts si explication « avec les mains »)**

b) Déterminer $\mathbb{P}([X_n = 1])$ et $\mathbb{P}([X_n = n])$. En déduire les lois de X_2 et X_3.

- **2 pts :** $[X_n = 1] = [A_1 = n]$ **(dont 1 pt pour explication)**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([A_1 = n]) = \dfrac{1}{n}$
- **2 pts :** $\mathbb{P}([X_n = n]) = \dfrac{1}{n!}$ **(**0 **si non justifié)**
- **1 pt :** $X_2 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 2]\!])$
- **2 pts :** $X_3(\Omega) = [\![1, 3]\!]$ **et** $\mathbb{P}([X_3 = 1]) = \dfrac{1}{3}$**,** $\mathbb{P}([X_3 = 2]) = \dfrac{1}{2}$**,** $\mathbb{P}([X_3 = 3]) = \dfrac{1}{6}$

c) En considérant le système complet d'événements $\big([A_n = n], [A_n < n]\big)$, montrer :

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall j \in [\![2, n]\!], \quad \mathbb{P}([X_n = j]) = \frac{1}{n}\,\mathbb{P}([X_{n-1} = j-1]) + \frac{n-1}{n}\,\mathbb{P}([X_{n-1} = j])$$

- **1 pt : FPT**
- **1 pt :** $[A_n = n] \cap [X_n = j] = [A_n = n] \cap [X_{n-1} = j-1]$ **(**0 **si non justifié)**
- **1 pt :** $[A_n < n] \cap [X_n = j] = [A_n < n] \cap [X_{n-1} = j]$ **(**0 **si non justifié)**
- **1 pt :** X_{n-1} **et** A_n **sont indépendantes**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([A_n = n]) = \dfrac{1}{n}$ **(**0 **si non justifié)**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([A_n < n]) = \dfrac{n-1}{n}$
- **1 pt : fin du calcul**

d) Donner la loi de X_4.

- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_4 = 1]) = \dfrac{1}{4}$ **et** $\mathbb{P}([X_4 = 4]) = \dfrac{1}{24}$ **d'après** ***7.b)***
- **2 pts :** $\mathbb{P}([X_4 = 2]) = \dfrac{11}{24}$ **avec la qst précédente (dont 1 pt pour condition d'application :** $n = 4 \geqslant 2$ **et** $j = 2 \in [\![2, 4]\!]$**)**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_4 = 3]) = \dfrac{1}{4}$ **avec le SCE** $([X_4 = 1], [X_4 = 2], [X_4 = 3], [X_4 = 4])$

8. ***a)*** Vérifier que la formule obtenue à la question ***7.c)*** reste valable pour $j = 1$.

- 1 pt

b) Établir la relation :

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad G_n(t) \ = \ \frac{t+n-1}{n}\ G_{n-1}(t) \qquad (\star)$$

- 1 pt : $G_n(t) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_{n-1} = k-1])\, t^k + \dfrac{n-1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_{n-1} = k])\, t^k$

- 1 pt : décalage d'indice

- 1 pt : $= \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k])\, t^{k+1} + \dfrac{n-1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k])\, t^k$ **(car** $\mathbb{P}([X_{n-1} = 0]) = 0$ **et** $\mathbb{P}([X_{n-1} = n]) = 0$**)**

- 1 pt : $= \dfrac{t}{n}\ G_{n-1}(t) + \dfrac{n-1}{n}\ G_{n-1}(t)$

c) En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad G_n(t) \ = \ \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (t+j)$$

- 1 pt : initialisation (0 **si la variable** t **n'est pas quantifiée)**

- 2 pts : hérédité

9. En dérivant la relation $(\star)$, trouver une relation entre E_n et E_{n-1} puis montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E_n = u_n$$

- 1 pt : $G'_n(t) = \dfrac{1}{n}\ G_{n-1}(t) + \dfrac{t+n-1}{n}\ G'_{n-1}(t)$

- 1 pt : $E_n = \dfrac{1}{n} + E_{n-1}$ **d'après *1.* et *2.***

- 1 pt : $E_n - E_1 = u_n - 1$ **par télescopage**

- 1 pt : $E_1 = \mathbb{E}(X_1) = 1$

10. Recherche d'un équivalent de V_n.

a) En dérivant une deuxième fois la relation $(\star)$, montrer :

$$\forall n \geqslant 2,\ V_n - V_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$$

- 1 pt : $G''_n(1) = \dfrac{2}{n}\ G'_{n-1}(t) + G''_{n-1}(t)$

- 1 pt : $G''_n(1) = V_n - E_n + \big(E_n\big)^2$ **d'après *3.***

- 2 pts : $V_n - V_{n-1} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2}$

b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, V_n en fonction de u_n et h_n.

- **1 pt :** $V_n - V_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$ **par télescopage**
- **1 pt :** $V_1 = \mathbb{V}(X_1) = 0$
- **1 pt :** $V_n = u_n - h_n + \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{n}$

c) Montrer : $V_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

- **1 pt :** $\dfrac{u_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ **d'après *4.c)***
- **1 pt :** $\dfrac{h_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
- **1 pt : conclusion**

Partie 4 : simulation informatique liée à l'expérience /11

Dans cette partie, on s'intéresse à la simulation **Python** de l'expérience aléatoire et des v.a.r. définies dans la partie précédente.

11. L'objectif de cette question est de coder une fonction **Python** permettant de simuler le tirage complet dans urne possédant n jetons numérotés de 1 à n.

a) Compléter la fonction **Python** suivante afin qu'elle renvoie la liste `B` obtenu en échangeant les éléments en position `i` et `j` de la liste `A` (paramètre d'entrée de la fonction).

```
def echangeLigne(A, i, j) :
    B = np.copy(A)
    B[j] = ---
    B[i] = ---
    return B
```

- **1 pt :** `B[j] = A[i]`
- **1 pt :** `B[i] = A[j]`

b) On considère la fonction **Python** suivante.

```
def tirageComplet(n) :
    A = [k for k in range(1, n+1)]
    i = n - 1
    for k in range(1, n+1) :
        j = rd.randint(0, i)
        A = echangeLigne(A, i, j)
        i = i - 1
    return A
```

Commenter la stratégie adoptée dans cette fonction afin de répondre à l'objectif initial.
On précisera notamment ce que représente intialement la liste `A` et commentera brièvement son évolution.

- **4 pts**

12. On s'intéresse maintenant à la fonction **Python** suivante.

```
def mystere(n) :
    A = tirageComplet(n)
    m = A[0]
    x = 1
    for k in range(1, n) :
        if A[k] > m :
            m = A[k]
            x = x + 1
    return x
```

a) Expliquer pourquoi, à la fin de la boucle `for`, la variable `m` contient la valeur n.

- 3 pts

b) Que représente la variable `x` ? On fera le lien avec une v.a.r. précédemment définie.

- 2 pts