DS2 (version A)

Exercice 1

À tout couple (a, b) de deux réels, on associe la matrice $M(a, b)$ définie par :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix}$$

On désigne par E l'ensemble des matrices $M(a, b)$ où a et b décrivent $\mathbb{R}$.
Ainsi : $E = \{M(a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.
On note I la matrice identité $M(1, 0)$ et A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Donner la dimension de E.

3. ***a)*** Montrer que l'ensemble $F = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$ est un espace vectoriel.

b) Montrer que la matrice $A - I$ n'est pas inversible. En déduire que F est de dimension supérieure ou égale à 1.

c) Déterminer l'ensemble F, puis donner une base $\mathscr{B}_1$ de F.

4. On considère l'ensemble $G = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X\}$.
On admet que G est un espace vectoriel.

a) Déterminer une base $\mathscr{B}_2$ de G.

b) Montrer que $F \cap G = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$.

c) Montrer que la famille $\mathscr{B}$ obtenue en réunissant les vecteurs de la base $\mathscr{B}_1$ de F et de la base $\mathscr{B}_2$ de G forme une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

d) Déterminer les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, puis celles du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, dans la base $\mathscr{B}$.

5. On considère la matrice P définie par $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que P est inversible et calculer sa matrice inverse P^{-1}.

b) Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$.

6. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

a) Prouver que la matrice $D(a,b) = P^{-1}M(a,b)P$ est une matrice diagonale.

b) Montrer que $M(a,b)$ est inversible si et seulement si $D(a,b)$ est inversible.
En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $M(a,b)$ soit inversible.

c) Prouver que $\big(M(a,b)\big)^2 = I$ si et seulement si $\big(D(a,b)\big)^2 = I$.
En déduire l'existence de quatre matrices $M(a,b)$ que l'on déterminera, vérifiant :

$$\big(M(a,b)\big)^2 = I$$

Exercice 2

On désigne par n un entier naturel non nul, par p un réel de $]0,1[$ et on pose : $q = 1-p$.
Dans la suite, on s'intéresse à un jeu vidéo au cours duquel le joueur doit essayer, pour gagner, de réussir, dans l'ordre, n niveaux numérotés 1, 2, ..., n, ce joueur ne pouvant accéder à un niveau que s'il a réussi le niveau précédent. Le jeu s'arrête lorsque le joueur échoue à un niveau ou bien lorsqu'il a réussi les n niveaux du jeu.
Pour tout entier k de $[\![1, n-1]\!]$, on dit que le joueur a le niveau k si, et seulement si, il a réussi le niveau k et échoué au niveau $k+1$. On dit que le joueur a le niveau n si, et seulement si, il a réussi le niveau n et on dit que le joueur a le niveau 0 s'il a échoué au niveau 1.
On admet que la probabilité de passer d'un niveau à un autre est constante et égale à p, la probabilité d'accéder au niveau 1 étant, elle aussi, égale à p.
On note X_n le niveau du joueur et on admet que X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.
Pour tout k de $[\![1, n]\!]$, on note R_k l'événement : « le joueur réussit le niveau k ».

1. Compléter le script **Python** suivant afin qu'il permette de simuler ce jeu et d'afficher la valeur prise par X_n dès que l'utilisateur saisit une valeur de p.

```python
import random as rd
p = float(input(“entrez la valeur de p dans ]0,1[ :“))
n = int(input(“entrez la valeur de n :“))
X = -----
while ----- and (rd.random() <= p) :
    X = -----
print(“le niveau du joueur est :“ + str(X))
```

2. *a)* Justifier soigneusement que l'ensemble des valeurs prises par X_n est : $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

b) Déterminer la probabilité $\mathbb{P}\big([X_n = 0]\big)$.

c) Écrire l'événement $[X_n = n]$ à l'aide de certains des événements R_k puis déterminer la probabilité $\mathbb{P}\big([X_n = n]\big)$.

d) Écrire, pour tout entier k de $[\![1, n-1]\!]$, l'événement $[X_n = k]$ à l'aide de certains des événements R_k puis déterminer la probabilité $\mathbb{P}\big([X_n = k]\big)$. Vérifier que l'expression trouvée reste valable pour $k = 0$.

3. Vérifier par le calcul : $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) = 1$.

4. a) Expliquer pourquoi X_n admet une espérance et écrire cette dernière sous forme d'une somme dépendant de n et de p.

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

5. a) Montrer que, pour tout entier naturel k et pour tout entier n supérieur ou égal à $k+1$, on a : $\mathbb{P}\big([X_n = k]\big) = p^k\, q$.

b) On note X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\big([X = k]\big) = p^k\, q$.
Démontrer :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) \; = \; \mathbb{P}\big([X = k]\big)$$

c) On pose : $Y = X + 1$.
Reconnaître la loi de Y puis en déduire l'espérance de X et la comparer à $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

Exercice 3

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$ converge.
Le but de cet exercice est de prouver, pour des cas particuliers, que la série de terme général $u_n = \dfrac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$ converge également et que, de plus, on a : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k \leqslant 2 \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{a_k}$.

1. Étude d'un premier exemple : pour tout entier n non nul, on pose : $a_n = n(n+1)$.

a) Vérifier : $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, puis en déduire que la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$ converge et donner sa somme.

b) Pour tout entier naturel non nul n, déterminer u_n en fonction de n.

c) Établir la convergence de la série de terme général u_n et donner sa somme, puis en déduire l'inégalité demandée.

2. Étude d'un deuxième exemple.
On suppose, dans cette question, que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $a_n = n!$.

a) Écrire une fonction **Python** d'en-tête `def facto(n)`, qui prend en paramètre un entier n et renvoie $n!$.

b) Écrire un programme **Python**, utilisant cette fonction, et permettant de calculer et afficher la valeur de u_n, lorsque la valeur de n est entrée au clavier par l'utilisateur.

c) Établir la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$.

d) Montrer, pour tout entier naturel n non nul : $u_n \leqslant \dfrac{1}{(n-1)!}$.

e) En déduire que la série de terme général u_n converge et que l'on a : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k \; \leqslant \; 2 \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{a_k}$.

Problème

Partie 1 : fonction géneratrice d'une v.a.r. discrète finie

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul. On considère une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $[\![1,n]\!]$ et on appelle fonction génératrice de X, la fonction G définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X=k])\, t^k$$

1. Calculer $G(1)$.

2. Exprimer l'espérance de X à l'aide de la fonction G.

3. Établir la relation : $\mathbb{V}(X) = G''(1) + G'(1) - \big(G'(1)\big)^2$.

Partie 2 : un résultat d'analyse

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ et $h_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$.

4. ***a)*** Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$.

b) Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n) + \dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \ln(n) + 1$.

c) En déduire un équivalent très simple de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

5. Montrer que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente.

Partie 3 : étude d'une expérience aléatoire

Dans cette partie, n désigne toujours un entier naturel non nul.

- On considère une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n ($n \geqslant 2$).
  L'expérience aléatoire consiste à prélèver tous ces jetons un par un, au hasard, et sans remise.
  Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note A_i la v.a.r. égale au numéro du jeton obtenu lors du $i^{\text{ème}}$ tirage.
- Pour tout $i \in [\![2,n]\!]$, on dit qu'il y a **record** à l'instant i si le $i^{\text{ème}}$ jeton tiré a un numéro plus grand que tous les numéros précédemment tirés.
  D'autre part, on convient qu'il y a systématiquement record à l'instant 1.
- Enfin, on note X_n la v.a.r. égale au nombre de records obtenus lorsque l'on procède à cette expérience dans une urne contenant n jetons.
  On note alors G_n la fonction génératrice de X_n, E_n son espérance et V_n sa variance.

6. Donner la loi de X_1.

7. ***a)*** Montrer : $X_n(\Omega) = [\![1,n]\!]$.

b) Déterminer $\mathbb{P}([X_n=1])$ et $\mathbb{P}([X_n=n])$. En déduire les lois de X_2 et X_3.

c) En considérant le système complet d'événements $\big([A_n=n]\,,[A_n<n]\big)$, montrer :

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall j \in [\![2,n]\!], \quad \mathbb{P}([X_n=j]) = \frac{1}{n}\,\mathbb{P}([X_{n-1}=j-1]) + \frac{n-1}{n}\,\mathbb{P}([X_{n-1}=j])$$

d) Donner la loi de X_4.

8. ***a)*** Vérifier que la formule obtenue à la question ***7.c)*** reste valable pour $j = 1$.

b) Établir la relation :

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad G_n(t) \ = \ \frac{t+n-1}{n}\, G_{n-1}(t) \qquad (\star)$$

c) En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad G_n(t) \ = \ \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (t+j)$$

9. En dérivant la relation $(\star)$, trouver une relation entre E_n et E_{n-1} puis montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E_n = u_n$$

10. Recherche d'un équivalent de V_n.

a) En dérivant une deuxième fois la relation $(\star)$, montrer :

$$\forall n \geqslant 2,\ V_n - V_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$$

b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, V_n en fonction de u_n et h_n.

c) Montrer : $V_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$.

Partie 4 : simulation informatique liée à l'expérience

Dans cette partie, on s'intéresse à la simulation **Python** de l'expérience aléatoire et des v.a.r. définies dans la partie précédente.

11. L'objectif de cette question est de coder une fonction **Python** permettant de simuler le tirage complet dans urne possédant n jetons numérotés de 1 à n.

a) Compléter la fonction **Python** suivante afin qu'elle renvoie la liste `B` obtenu en échangeant les éléments en position `i` et `j` de la liste `A` (paramètre d'entrée de la fonction).

```
def echangeLigne(A, i, j) :
    B = np.copy(A)
    B[j] = ---
    B[i] = ---
    return B
```

b) On considère la fonction **Python** suivante.

```
def tirageComplet(n) :
    A = [k for k in range(1, n+1)]
    i = n - 1
    for k in range(1, n+1) :
        j = rd.randint(0, i)
        A = echangeLigne(A, i, j)
        i = i - 1
    return A
```

Commenter la stratégie adoptée dans cette fonction afin de répondre à l'objectif initial.
On précisera notamment ce que représente intialement la liste `A` et commentera brièvement son évolution.

12. On s'intéresse maintenant à la fonction **Python** suivante.

```python
def mystere(n) :
    A = tirageComplet(n)
    m = A[0]
    x = 1
    for k in range(1, n) :
        if A[k] > m :
            m = A[k]
            x = x + 1
    return x
```

a) Expliquer pourquoi, à la fin de la boucle `for`, la variable `m` contient la valeur n.

b) Que représente la variable `x` ? On fera le lien avec une v.a.r. précédemment définie.