DS1 (version B)

Exercice 1 (HEC 2019)

1. Dans cette question, on considère les matrices $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et le produit matriciel $M = CL$.

a) (i) Calculer M et M^2.

Démonstration.

- Tout d'abord : $M = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}}$$

Commentaire

Si on note C_1, C_2 et C_3 les colonnes de M, on remarque :

$$C_1 = C, \quad C_2 = 2\,C \quad \text{et} \quad C_3 = -\,C$$

La matrice M est donc obtenue par concaténation de copies, à coefficients multiplicatifs près, de la colonne C. L'objectif de l'énoncé est l'étude des propriétés de telles matrices.

- Ensuite :

$$\begin{aligned} M^2 &= M \times M = CL \times CL \\ &= C \times (LC) \times L && \textit{(par associativité)} \\ &= (LC) \cdot C \times L && \textit{(car comme } L \in \mathscr{M}_{1,3}(\mathbb{R}) \textit{ et } C \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \textit{ } LC \textit{ est un réel)} \\ &= 0 \cdot M = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

En effet : $LC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \times 0 + 2 \times 1 - 1 \times 2 = 2 - 2 = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } M^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}.}$$

Commentaire

Évidemment, on peut aussi effectuer le calcul de M^2 directement :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un tel calcul permet assurément d'obtenir tous les points de la question mais n'est pas dans l'esprit de la construction très particulière de la matrice M. Il s'agit ici de faire apparaître sur un exemple simple de petite taille (manipulation d'une matrice ligne et d'une matrice colonne à 3 éléments), des propriétés qu'on généralisera à des matrices de tailles quelconques.

□

(ii) Déterminer le rang de M.

Démonstration.

$$\begin{aligned}\text{rg}\left(\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 4 & -2\end{pmatrix}\right) &= \text{rg}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}\right)\\ &= \text{rg}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, 2\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, -\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right) = \text{rg}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right) = 1\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{rg}(M) = 1}$$

□

(iii) La matrice M est-elle diagonalisable ?

Démonstration.

- D'après la question ***1.a)(i)***, le polynôme $Q(X) = X^2$ est un polynôme annulateur de la matrice M. Ainsi :
$$\text{Sp}(M) \subset \{\text{racines de } Q\} = \{0\}$$
$$\boxed{\text{Le réel } 0 \text{ est la seule valeur propre possible de } M.}$$
- D'après la question précédente : $\text{rg}(M) = 1 \neq 3 = \dim\big(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big)$.
$$\boxed{\text{Ainsi, la matrice } M \text{ n'est pas inversible et } 0 \text{ est la seule valeur propre de } M.}$$
- Notons $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Considérons l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la représentation dans la base $\mathscr{B}$ est M. Par le théorème du rang :
$$\begin{array}{ccccc}\dim\left(\mathbb{R}^3\right) & = & \dim\big(\text{Ker}(f)\big) & + & \dim\big(\text{Im}(f)\big)\\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel\\ 3 & & \dim\big(E_0(f)\big) & & \text{rg}(f)\\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel\\ \dim\big(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big) & = & \dim\big(E_0(M)\big) & + & \text{rg}(M)\end{array}$$
$$\boxed{\text{Ainsi : } \dim\big(E_0(M)\big) = \dim\big(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big) - \text{rg}(M) = 3 - 1 = 2.}$$

$$\boxed{\text{Comme } \dim\big(E_0(M)\big) = 2 \neq 3 = \dim\big(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big), \text{ la matrice } M \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

Commentaire

- On a démontré que la matrice M possédait une unique valeur propre. Dans ce cas, il est classique de procéder par l'absurde pour démontrer que M n'est pas diagonalisable.
- Supposons que M est diagonalisable.
Il existe donc une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de M telles que PDP^{-1}.
Or 0 est la seule valeur propre de M. Ainsi $D = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ et :
$$M = PDP^{-1} = P\,0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\,P^{-1} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$
Absurde !

□

Commentaire

- Il était aussi possible de déterminer le sous-espace propre de M associé à la valeur propre 0.
Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} X \in E_0(M) & \iff & M\,X = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\ & \iff & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & & & 0 & = & 0 \\ x & + & 2\,y & - & z & = & 0 \\ 2\,x & + & 4\,y & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \overset{L_3 \leftarrow L_3 - 2\,L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & & & 0 & = & 0 \\ x & + & 2\,y & - & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \iff & \left\{ \; x = -2\,y + z \right. \end{array}$$

Finalement on obtient l'expression de $E_0(M)$ suivante :

$$\begin{array}{rcl} E_0(M) & = & \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid MX = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\} \; = \; \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = -2y + z\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} -2y + z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \; = \; \{y \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

- Il faut s'habituer à déterminer les ensembles $E_\lambda(M)$ par lecture de la matrice $M - \lambda\, I_3$.
Ici, on a $\lambda = 0$. On cherche donc les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $E_0(M)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que : $M\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$. Or :

$$\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & = & x \cdot C_1 + y \cdot C_2 + z \cdot C_3 \\ & = & x \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ à l'aide de cette combinaison linéaire, plusieurs choix sont possibles. Plus précisément :

  × si l'on choisit $y = 0$, il suffit de prendre $x = z$ pour obtenir le vecteur nul.
  En prenant (par exemple) $z = 1$, on obtient : $x = 1$.

  × si l'on choisit $z = 0$, il suffit de prendre $x = -2y$ pour obtenir le vecteur nul.
  En prenant (par exemple) $y = 1$, on obtient : $y = -2$.

On obtient ainsi : $E_0(M) \supset \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Et l'égalité est vérifiée car ces deux espaces vectoriels sont de même dimension.

b) Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que la matrice P est inversible et calculer le produit $P\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\mathrm{rg}(P) \ = \ \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\right) \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\right) \overset{L_3 \leftarrow L_3 + 2\,L_2}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \ = \ 3$$

$$\boxed{\text{On en conclut que la matrice } P \text{ est inversible.}}$$

- Ensuite :

$$P\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{P\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

□

c) Trouver une matrice inversible Q dont la transposée ${}^tQ$ vérifie : ${}^tQ\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

- Notons ${}^tQ = \begin{pmatrix} x & u & a \\ y & v & b \\ z & w & c \end{pmatrix}$ où $(x, y, z, u, v, w, a, b, c) \in \mathbb{R}^9$. Remarquons tout d'abord :

$${}^tQ\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} x & u & a \\ y & v & b \\ z & w & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \ = \ 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

- Pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ à l'aide de cette combinaison linéaire, plusieurs choix sont possibles. Plus précisément :
  - × pour obtenir : $x + 2\,u - a = 1$, on peut prendre $x = 1$ et $u = a = 0$.
  - × pour obtenir : $y + 2\,v - b = 0$, on peut prendre $y = 2$ et $v = -1$ et $b = 0$.
  - × pour obtenir : $z + 2\,w - c = 0$, on peut prendre $z = -1$ et $w = 1$ et $c = 1$.

  On construit ainsi la matrice ${}^tQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et donc $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
  Cette matrice est triangulaire supérieure et à coefficients diagonaux tous non nuls.
  Elle est donc inversible.

$$\boxed{\text{La matrice } Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ est inversible et vérifie } {}^tQ\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

Commentaire

- Remarquons tout d'abord, par propriété de l'application transposée :

$$ {}^tQ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} $$

L'introduction de la transposée a donc pour but ici de faire apparaître un calcul sur des lignes plutôt que sur des colonnes. Si on travaille directement sur l'égalité de droite, on obtient, avec les notations précédentes :

$$ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} Q \;=\; 1 \cdot \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} $$

On obtient évidemment les mêmes équations que précdemment.

- On retiendra qu'en multipliant $Q \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ à droite (resp. gauche) par une matrice colonne (resp. ligne), on obtient une combinaison linéaire des colonnes (resp. lignes) de la matrice Q. On peut retenir l'idée développée dans le paragraphe par la forme :

$$ L \ A \ C $$

qui signifie qu'avec une multiplication à gauche, on effectue une opération sur les (L)ignes, tandis qu'avec une multiplication à droite, on effectue une multiplication sur les (C)olonnes.

- D'autres choix étaient possibles pour la matrice Q. Par exemple, on pouvait choisir :

$$ Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} $$

Il est à noter qu'il ne suffit pas de résoudre les contraintes issues des équations pour exhiber une matrice Q satisfaisante. Il est précisé dans l'énoncé que Q est une matrice inversible. Cela explique la direction prise par la résolution proposée initialement : les choix effectués permettent de construire une matrice qui est visiblement inversible (triangulaire supérieure et à coefficients diagonaux tous non nuls).

□

d) Pour une telle matrice Q, calculer le produit $P\,M\,Q$.

Démonstration.

$$ \begin{aligned} P\,M\,Q &= P\,(CL)\,Q \\ &= (PC)\,(LQ) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} && \textit{(d'après les calculs effectués en } \textbf{1.b)} \textit{ et en } \textbf{1.c)}\textit{)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,1} \end{aligned} $$

$$ \boxed{\text{Ainsi : } P\,M\,Q = E_{1,1}.} $$

□

2. La fonction **Python** suivante permet de multiplier la $i^{\text{ème}}$ ligne L_i d'une matrice A par une réel sans modifier ses autres lignes, c'est-à-dire de lui appliquer l'opération élémentaire $L_i \leftarrow a\, L_i$ (où $a \neq 0$).
*(Pour l'explication des fonctions et instances **Python**, on pourra se reporter à l'annexe en fin de sujet)*

```
def multilig(a, i, A) :
    [n, p] = A.shape
    B = np.copy(A)
    for j in range(p) :
        B[i, j] = a * B[i,j]
    return B
```

Commentaire

- Le code de ce programme est plutôt simple à comprendre :
  - × on crée une copie de la matrice `A` que l'on stocke dans la variable `B`,
  - × on met à jour la `i`$^{\text{ème}}$ ligne de `B` en modifiant un par un les éléments de cette ligne à l'aide de la boucle `for`.
- Pour être plus proche de l'opération élémentaire $L_i \leftarrow a\, L_i$, on pouvait opter pour une présentation ne nécissitant pas l'utilisation de la boucle `for` :

```
def multilig(a, i, A) :
    [n, p] = A.shape
    B = np.copy(A)
    B[i, :] = a * B[i, :]
    return B
```

L'appel `B[i, :]` permet d'accéder à la `i`$^{\text{ème}}$ ligne de `B`. On peut modifier cette ligne en lui assignant une matrice ligne de même taille, ce qu'on fait ici.

a) Donner le code **Python** de deux fonctions `adlig` (d'arguments `b`, `i`, `j`, `A`) et `echlig` (d'arguments `i`, `j`, `A`) permettant d'effectuer respectivement les autres opérations sur les lignes d'une matrice :

$$L_i \leftarrow L_i + b\, L_j \ (i \neq j) \quad \text{et} \quad L_i \leftrightarrow L_j \ (i \neq j)$$

Démonstration.

- On s'inspire de la fonction donnée pour créer `adlig` :

```
def adlig(b, i, j, 1) :
    [n, p] = A.shape
    B = np.copy(A)
    for k in range(p) :
        B[i, k] = B[i, k] + b * B[j, k]
    return B
```

Commentaire

On note que la variable `j` est ici une variable d'entrée du programme (on l'utilise pour désigner la ligne ajoutée dans l'opération élémentaire $Li \leftarrow L_i + b\, L_j$ $(i \neq j)$). Cela oblige à renommer la variable d'itération du programme `multilig`.

- La fonction `echlig` est créée suivant le même principe :

```
1 def echlig(i, j, A) :
2     [n, p] = A.shape
3     B = np.copy(A)
4     for k in range(p) :
5         aux = B[i, k]
6         B[i, k) = B[j, k]
7         B[j, k] = aux
8     return B
```

Commentaire

- On a introduit ici une variable auxiliaire appelée `aux`. Le but de cette variable est de ne pas perdre d'information lors de l'échange des valeurs des deux coefficients de la même colonne. Plus précisément :
  - × l'instruction de la ligne 5 permet de stocker la valeur de `B[i, k]`.
  - × en ligne 6, on écrase la valeur du coefficient $B[i, k]$ en lui affectant la valeur $B[j, k]$.
  - × enfin, en ligne 7, on affecte à `B[i, k]` la valeur de `aux`, c'est-à-dire la valeur **initiale** (et pas la nouvelle valeur) du coefficient $B[i, k]$.
- On pouvait aussi tirer parti du fait que l'on travaille sur une copie `B` de la matrice `A` d'entrée (jamais modifiée) pour ne pas introduire de variable auxiliaire `aux`.

```
def echlig(i, j, A) :
    [n, p] = A.shape
    B = np.copy(A)
    for k in range(p) :
        B[i, k] = A[j, k]
        B[j, k] = A[i, k]
    return B
```

□

b) Expliquer pourquoi la fonction `multligmat` suivante retourne le même résultat `B` que la fonction `multlig`.

```
def multiligmat(a, i, A) :
    [n, p] = A.shape
    D = np.eye(n)
    D[i, i] = a
    B = np.dot(D, A)
    return B
```

Démonstration.
Nommons A, B, i, a, n et p les éléments codés par les variables du programme correspondantes.

- L'instruction en ligne $\underline{3}$: `D = np.eye(n)` permet de créer la matrice identité I_n.
  (le nom `eye` *provient d'un jeu sur les sonorités : on crée à l'aide de cette instruction la matrice identité qui en anglais se dit « identity matrix » qu'il faut lire* `eye`*-dentity matrix)*
- L'instruction en ligne $\underline{4}$: `D[i, i] = a` permet de remplacer le coefficient $D_{i,i}$ par la valeur a.
  On crée ainsi une matrice D diagonale carrée d'ordre n dont :
  × le $i^{\text{ème}}$ coefficient diagonal est la valeur a,
  × les autres coefficients diagonaux ont tous la même valeur 1.
- L'instruction en ligne $\underline{5}$: `B = np.dot(D, A` permet de stocker, dans la variable `B`, le résultat de la multiplication $D \times A$. Détaillons ce calcul.

  Soit $(i', j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$. Par la formule de multiplication matricielle, on a :

$$B_{i',j} \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} D_{i',k} \times A_{k,j} \ = \ D_{i',i'} \times A_{i',j} \qquad \textit{(car } D_{i',k} = 0 \textit{ si } k \neq i' \textit{)}$$

  Deux cas se présentent alors :
  × si $i' = i$ alors $D_{i',i'} = D_{i,i} = $ a et ainsi : $B_{i,j} = a \times A_{i,j}$.

  La $i^{\text{ème}}$ ligne de B est obtenue en multipliant la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par a.

  × si $i' \neq i$ alors $D_{i',i'} = 1$ et ainsi : $B_{i',j} = 1 \times A_{i',j} = A_{i',j}$.

  Les autres lignes de B sont des copies des lignes correspondantes de la matrice A.

On en conclut que la fonction `multiligmat` permet de calculer la matrice obtenue en appliquant à A l'opération élémentaire $L_i \leftarrow a\, L_i$.
Cela correspond bien au calcul effectué par la fonction `multilig`.

Commentaire

- La matrice $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ décrite dans cette question est une matrice **de dilatation**. L'opération élémentaire $L_i \leftarrow a\, L_i$ (resp. $C_i \leftarrow a\, C_i$) se traduit par la multiplication matricielle à gauche (resp. à droite) de la matrice initiale A par la matrice D.
- Illustrons de point par un exemple simple. Considérons $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Alors :

$$D\, M \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 10 & 20 & -10 \end{pmatrix}$$

(on multiplie la $3^{\text{ème}}$ ligne par 5)

$$\text{et} \qquad M\, D \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \\ 2 & 4 & -10 \end{pmatrix}$$

(on multiplie la $3^{\text{ème}}$ colonne par 5)

□

3. Dans cette question, on note n un entier supérieur ou égal à 2 et M une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1. Pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à l'intersection de sa $i^{\text{ème}}$ ligne et de sa $j^{\text{ème}}$ colonne, et qui vaut 1.

a) (i) Justifier l'existence d'une matrice colonne non nulle $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et d'une matrice ligne non nulle $L_1 = \begin{pmatrix} \ell_1 & \dots & \ell_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telles que $M = C\,L$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :

$$\begin{aligned} C\,L &= \begin{pmatrix} c_1\,\ell_1 & c_1\,\ell_2 & \dots & c_1\,\ell_{n-1} & c_1\ell_n \\ c_2\,\ell_1 & c_2\,\ell_2 & \dots & c_2\,\ell_{n-1} & c_2\ell_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{n-1}\,\ell_1 & c_{n-1}\,\ell_2 & \dots & c_{n-1}\,\ell_{n-1} & c_{n-1}\,\ell_n \\ c_n\,\ell_1 & c_n\,\ell_2 & \dots & c_n\,\ell_{n-1} & c_n\ell_n \end{pmatrix} \\ &= \left(\ell_1 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix} \quad \ell_2 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix} \quad \dots \quad \ell_{n-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix} \quad \ell_n \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \ell_1\,C & \dots & \ell_n\,C \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  Il s'agit donc de démontrer que toute matrice de rang 1 apparaît comme concaténation de colonnes colinéaires à une matrice colonne C non nulle.
  Ce résultat se montre en deux étapes.

- Tout d'abord, comme la matrice M est de rang 1 elle est forcément non nulle (si c'était le cas, elle serait de rang 0). Ainsi, M admet (au moins) une colonne non nulle. On note C la première colonne non nulle de M.

- Démontrons maintenant que toutes les colonnes de M sont colinéaires à C.
  On procède par l'absurde.

  Supposons que le matrice M possède une colonne non colinéaire à C.
  Notons $k \in [\![1,n]\!]$ l'indice de cette colonne. Alors :

$$\begin{aligned} \text{rg}(M) &= \text{rg}\big(C_1(M), \dots, C_n(M)\big) \\ &\geqslant \text{rg}\big(C_k(M), C\big) && \textit{(car } C \textit{ et } C_k(M) \textit{ sont des colonnes de } M\textit{)} \end{aligned}$$

  La famille $\big(C_k(M), C\big)$ est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires.
  On en déduit :

$$\text{rg}(M) \geqslant \text{rg}\big(C_k(M), C\big) = 2$$

  Absurde !

$$\boxed{\text{Ainsi, toute colonne de } M \text{ est colinéaire à } C}$$

- Il existe donc un n-uplet $(\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$M = \begin{pmatrix} \ell_1\,C & \dots & \ell_n\,C \end{pmatrix}$$

  Notons que ce n-uplet est forcément différent du n-uplet $(0, \dots, 0)$ (si c'était le cas, la matrice M serait nulle).

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Ainsi, si } M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est de rang 1, il existe un matrice colonne } C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ et} \\ \text{une matrice ligne non nulle } L \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R}) \text{ telles que : } M = C\,L. \end{array}}$$

□

(ii) Calculer la matrice $M\,C$ et en déduire une valeur propre de M.

Démonstration.

$$\begin{array}{rcll} M \times C & = & (C\,L) \times C & \\ & = & C \times (L\,C) & \textit{(par associativité)} \\ & = & (LC) \cdot C & \textit{(car comme } L \in \mathscr{M}_{1,3}(\mathbb{R}) \textit{ et } C \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \ LC \textit{ est un réel)} \\ & = & \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \ell_i\, c_i\right) \cdot C & \end{array}$$

Comme $C \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$, le vecteur C est un vecteur propre de M associé à la valeur propre $\sum\limits_{i=1}^{n} \ell_i\, c_i$.

□

(iii) Montrer que si le réel $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i\, \ell_i$ est différent de 0, alors la matrice M est diagonalisable.

Démonstration.

- Par définition :

$$\text{rg}(M) = 1 \neq n = \dim\big(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)$$

En effet, il est précisé dans l'énoncé : $n \geqslant 2$.

On en déduit que M n'est pas inversible. Ainsi, le réel 0 est valeur propre de M.

- Notons $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Considérons l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ dont la représentation dans la base $\mathscr{B}$ est M. Par le théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc} \dim\big(\mathbb{R}^n\big) & = & \dim\big(\text{Ker}(f)\big) & + & \dim\big(\text{Im}(f)\big) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ n & & \dim\big(E_0(f)\big) & & \text{rg}(f) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ \dim\big(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big) & = & \dim\big(E_0(M)\big) & + & \text{rg}(M) \end{array}$$

Ainsi : $\dim\big(E_0(M)\big) = \dim\big(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big) - \text{rg}(M) = n - 1$.

- Notons $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i\, l_i$. On suppose α non nul.

D'après la question précédente, α est valeur propre de M. On en déduit : $\dim\big(E_\alpha(M)\big) \geqslant 1$.
Ainsi :

$$\dim\big(E_0(M)\big) + \dim\big(E_\alpha(M)\big) \geqslant (n-1) + 1 \geqslant n$$

Et comme on a forcément : $\dim\big(E_0(M)\big) + \dim\big(E_\alpha(M)\big) \leqslant n = \dim\big(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)$, on en conclut :

$$\dim\big(E_0(M)\big) + \dim\big(E_\alpha(M)\big) = n$$

Ainsi, si $\alpha \neq 0$, la matrice M possède deux valeurs propres distinctes 0 et α.
Comme : $\dim\big(E_0(M)\big) + \dim\big(E_\alpha(M)\big) = \dim\big(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)$, la matrice M est diagonalisable.

□

b) (i) À l'aide de l'égalité $M = C\,L$, établir l'existence de deux matrices inversibles P et Q telles que $P\,M\,Q = E_{1,1}$.

Démonstration.

- D'après un calcul analogue à celui fait en ***3.a)(i)*** : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \ = \ E_{1,1}$.

- Pour résoudre la question, il suffit donc de trouver deux matrices inversibles P et Q de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$P\,C \ = \ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad L\,Q \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

  En effet, si c'est le cas, on a :

$$\begin{array}{rcll} P\,M\,Q & = & P\,(CL)\,Q & \\ & = & (PC)\,(LQ) & \textit{(par associativité)} \\ & = & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \ = \ E_{1,1} & \end{array}$$

- Il reste à démontrer l'existence des matrices P et Q. Remarquons dans un premier temps :

$$PC = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = C \quad \Leftrightarrow \quad \text{La première colonne de } P^{-1} \text{ est le vecteur } C$$

  Il s'agit donc de construire une matrice **inversible** dont la première colonne est C.
  La première colonne étant fixée, il reste à choisir les suivantes.

- Construisons une telle matrice. Deux cas se présentent :

  × si $c_1 \neq 0$, on pose :

$$P^{-1} \ = \ \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ c_2 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ c_2 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  Cette matrice est bien inversible car elle est triangulaire inférieure et de coefficients diagonaux tous non nuls.

× si $c_1 = 0$, on note i_0 l'indice du premier coefficient non nul du vecteur C. On pose alors :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & 1 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i_0} & \vdots & & \ddots & 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ c_n & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Démontrons que cette matrice est inversible :

$$\mathrm{rg}\left(P^{-1}\right) \overset{C_1 \leftrightarrow C_{i_0}}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & c_{i_0} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & c_n & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

La réduite obtenue est triangulaire inférieure et à coefficients diagonaux tous non nuls. Elle est donc inversible et il en est de même de la matrice initiale P^{-1}.

- Il reste alors à construire Q. Remarquons :

$$LQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow {}^tQ\,{}^tL = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left({}^tQ\right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = {}^tL \Leftrightarrow$$ La première colonne de $\left({}^tQ\right)^{-1} = {}^t\left(Q\right)^{-1}$ est le vecteur ${}^tL$

On construit alors ${}^t\left(Q\right)^{-1}$ par la méthode ayant permis la construction de P^{-1}.

On a bien démontré l'existence de deux matrices inversibles P et Q telles que $P\,M\,Q = E_{1,1}$. □

Commentaire

Pour construire P^{-1}, on peut aussi faire appel au théorème dit de la base incomplète qui stipule :

Toute famille libre d'un espace vectoriel E de dimension finie n peut être complétée en une base de E

Ici, comme le vecteur C est non nul, la famille (C) est une famille libre de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On peut donc compléter cette famille en une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Autrement dit, il existe des vecteurs colonnes $C_2, \dots C_n$ tels que la famille $\left(C, C_2, \dots, C_n\right)$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On peut alors construire la matrice P^{-1} par concaténation de ces vecteurs :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} C & C_2 & \dots & C_n \end{pmatrix}$$

Cette matrice est bien inversible. En effet :

$$\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} C & C_2 & \dots & C_n \end{pmatrix}\right) = \mathrm{rg}\left(C, C_2, \dots, C_n\right) = n \quad \textit{(car } \left(C, C_2, \dots, C_n\right) \textit{ est une famille libre)}$$

(ii) En déduire que pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, il existe deux matrices inversibles P_i et Q_j telles que $P_i \, M \, Q_j = E_{i,j}$.

Démonstration.
Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. On raisonne comme précédemment.

- Remarquons tout d'abord que $E_{i,j}$ peut s'obtenir comme produit :
  - × de la matrice colonne contenant uniquement des 0 sauf en ligne i où il contient un 1.
  - × de la matrice ligne contenant uniquement des 0 sauf en colonne j où il contient un 1.
- Pour résoudre la question, il suffit donc de trouver deux matrices inversibles P et Q de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$P_i \, C \ = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad L \, Q_j \ = \ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

- Pour un raisonnement analogue à celui de la question précédente, il suffit alors de trouver :
  - × une matrice P_i^{-1} inversible dont la $i^{\text{ème}}$ colonne est C.
  - × une matrice ${}^t\big(Q_j\big)^{-1}$ dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est ${}^tL$.

On obtient ces deux matrices par une construction similaire à la précédente.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout couple } (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \text{ il existe deux matrices inversibles } P_i \text{ et } Q_j \text{ telles que } P_i \, M \, Q_j = E_{i,j}.}$$

□

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive. On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\, u_k$$

1. On suppose que l'on dispose d'une fonction **Python** d'en-tête `def suite_u(n)` qui prend en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$ et qui renvoie la valeur de u_n.
En déduire une fonction **Python** d'en-tête `def suite_v(n)` qui prend en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$ et qui renvoie la valeur de v_n.

Démonstration.

```
1 def suite_v(n) :
2     v = 0
3     for k in range(n) :
4         v = v + (k + 1) * suite_u(k + 1)
5     v = (1 / (n * (n + 1))) * v
6     return v
```

Détaillons les éléments de ce programme.

- **Début du programme**
  Conformément à l'énoncé, on commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `suite_u`,
  × elle prend en paramètre la variable `n`,
  × elle admet pour variable de sortie la variable `v`.

```
1 def suite_v(n) :
```

```
6     return v
```

  On initialise ensuite la variable `v` à 0 (choix naturel d'initialisation lorsqu'on souhaite coder une somme puisque 0 est l'élément neutre de l'opérateur de sommation).

```
2     v = 0
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 3 à 4 consistent à mettre à jour la variable `v` pour qu'elle contienne la quantité $\sum_{k=1}^{n} k\, u_k$.
  Pour cela, on utilise une structure conditionnelle (boucle for) :

```
3     for k in range(n) :
4         v = v + (k + 1) * suite_u(k + 1)
```

- **Fin du programme**
  À l'issue de cette boucle, la variable `v` contient la quantité $\sum_{k=1}^{n} k\, u_k$. On met donc à jour une dernière fois cette variable pour qu'elle contienne la quantité $v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\, u_k$:

```
5     v = (1 / (n * (n + 1))) * v
```

□

2. On suppose dans cette question uniquement que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

a) Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Démonstration.
La suite (u_n) est :

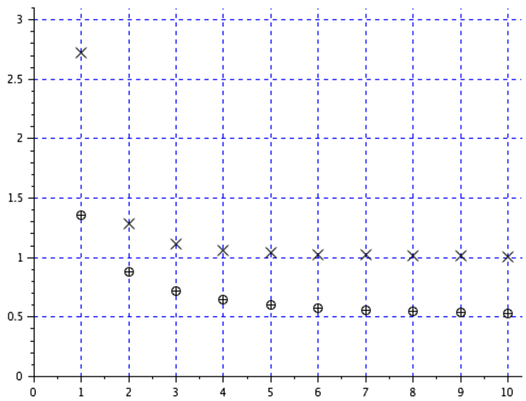
× décroissante,

× minorée par 0 (car à termes positifs d'après l'énoncé).

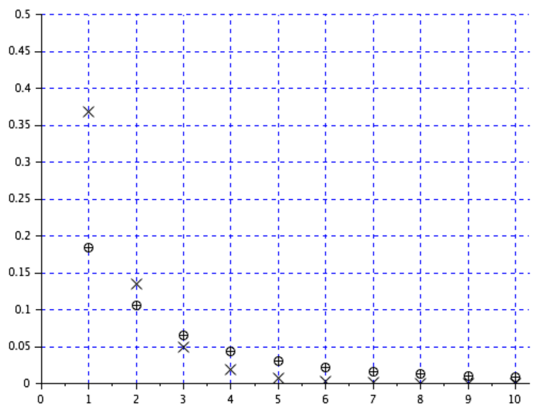
$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (u_n) \text{ converge vers une limite } \ell \text{ telle que : } \ell \geqslant 0.}$$

□

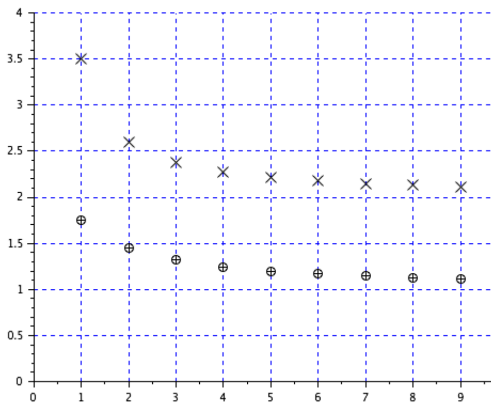
b) Pour différentes suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroissantes, on représente ci-dessous, à l'aide des fonctions `suite_u` et `suite_v`, les premiers termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec le symbole × et ceux de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec le symbole ⊕.
À la vue des graphes suivants, quelles conjectures peut-on faire sur la monotonie, la convergence et la valeur de la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en fonction de celle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?



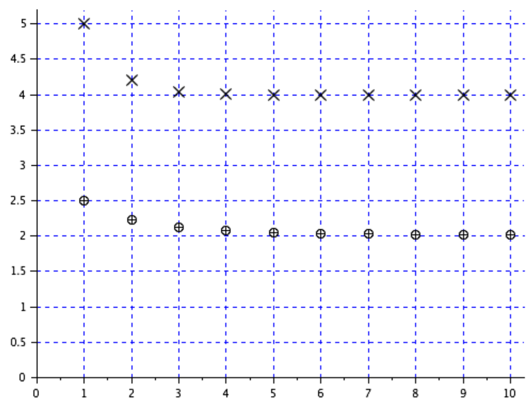
Cas où : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \mathrm{e}^{1/n^2}$



Cas où : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \mathrm{e}^{-n}$



Cas où : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{6n+1}{3n-1}$



Cas où : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 4 + 5\,(0.2)^n$

Démonstration.

- Sur tous les graphes présentés, la suite (v_n) (dont les premiers termes sont représentés par les symboles $\oplus$) semble être :
  - × décroissante,
  - × convergente.
- En notant L la limite de la suite (v_n), il semble qu'on obtienne les correspondances suivantes :

	ℓ	L
1^{er} graphe	1	$\frac{1}{2}$
$2^{\text{ème}}$ graphe	0	0
$3^{\text{ème}}$ graphe	2	1
$4^{\text{ème}}$ graphe	4	2

Il semble donc qu'on ait : $L = \dfrac{\ell}{2}$.

$$\boxed{\text{On conjecture alors que la suite } (v_n) \text{ est décroissante, convergente de limite } L \text{ vérifiant : } L = \dfrac{\ell}{2}.}$$

c) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $v_n \geqslant \dfrac{u_n}{2}$ et $v_{2n} \leqslant \dfrac{n+1}{2(2n+1)}\, v_n + \dfrac{3n+1}{4(2n+1)}\, u_{n+1}$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  - × Comme la suite (u_n) est décroissante, par récurrence immédiate : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $u_k \geqslant u_n$.
    On en déduit : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $k\, u_k \geqslant k\, u_n$ (car $k \geqslant 0$).
    Ainsi, en sommant les inégalités précédentes :
    $$\sum_{k=1}^{n} k\, u_k \geqslant \sum_{k=1}^{n} k\, u_n$$
    Enfin, comme $\dfrac{1}{n(n+1)} \geqslant 0$:
    $$\underbrace{\frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\, u_k}_{= v_n} \geqslant \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\, u_n$$
  - × Or :
    $$\frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\, u_n = \frac{u_n}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{u_n}{\cancel{n(n+1)}} \frac{\cancel{n(n+1)}}{2} = \frac{u_n}{2}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \geqslant \dfrac{u_n}{2}.}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  - × Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
v_{2n} &= \frac{1}{2n(2n+1)} \sum_{k=1}^{2n} k\, u_k \\
&= \frac{1}{2n(2n+1)} \left(\sum_{k=1}^{n} k\, u_k + \sum_{k=n+1}^{2n} k\, u_k \right) \\
&= \frac{1}{2n(2n+1)} \left(n(n+1)\, \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\, u_k + \sum_{k=n+1}^{2n} k\, u_k \right) \\
&= \frac{1}{2n(2n+1)} \left(n(n+1)\, v_n + \sum_{k=n+1}^{2n} k\, u_k \right) && \textit{(par définition de } v_n\textit{)} \\
&= \frac{\cancel{n}(n+1)}{2\cancel{n}(2n+1)}\, v_n + \frac{1}{2n(2n+1)} \sum_{k=n+1}^{2n} k\, u_k \\
&= \frac{n+1}{2\,(2n+1)}\, v_n + \frac{1}{2n(2n+1)} \sum_{k=n+1}^{2n} k\, u_k && (*)
\end{aligned}$$

  - × De plus, comme la suite (u_n) est décroissante, par récurrence immédiate :

$$\forall k \in [\![n+1, 2n]\!],\ u_k \leqslant u_{n+1}$$

D'où : $\forall k \in [\![n+1, 2n]\!]$, $k\, u_k \leqslant k\, u_{n+1}$.
Ainsi, en sommant les inégalités précédentes :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} k\, u_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} k\, u_{n+1}$$

On en déduit, comme $\dfrac{1}{2n(2n+1)} \geqslant 0$:

$$\frac{1}{2n(2n+1)} \sum_{k=n+1}^{2n} k\, u_k \leqslant \frac{1}{2n(2n+1)} \sum_{k=n+1}^{2n} k\, u_{n+1}$$

  - × Or :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2n(2n+1)} \sum_{k=n+1}^{2n} k\, u_k &= \frac{u_{n+1}}{2n(2n+1)} \sum_{k=n+1}^{2n} k \\
&= \frac{u_{n+1}}{2n(2n+1)}\, \frac{\big(2n - (n+\cancel{1}) + \cancel{1}\big)\big(2n + (n+1)\big)}{2} \\
&= \frac{u_{n+1}\, \cancel{n}\, (3n+1)}{4\, \cancel{n}\, (2n+1)} = \frac{3n+1}{4\,(2n+1)}\, u_{n+1}
\end{aligned}$$

× On en déduit, en utilisant l'égalité $(*)$:

$$\begin{aligned} v_{2n} &= \frac{n+1}{2\,(2n+1)}\; v_n + \frac{1}{2n(2n+1)} \sum_{k=n+1}^{2n} k\, u_k \\ &\leqslant \frac{n+1}{2\,(2n+1)}\; v_n + \frac{3n+1}{4\,(2n+1)}\; u_{n+1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{2n} \leqslant \frac{n+1}{2\,(2n+1)}\; v_n + \frac{3n+1}{4\,(2n+1)}\; u_{n+1}}$$

Commentaire

- Pour minorer / majorer une somme, il est très classique de commencer par minorer / majorer son terme général.
  C'est pourquoi on pense ici à exploiter dès le départ la décroissance de la suite (u_n) pour minorer (pour la 1$^{\text{ère}}$ inégalité) / majorer (pour la 2$^{\text{nde}}$ inégalité) le terme général $k\, u_k$.
  On retiendra la technique suivante pour encadrer une somme :
  1) encadrement du terme général,
  2) encadrement de la somme en sommant les encadrements précédents.
- Cette technique sur l'encadrement de somme doit rappeler celle sur l'encadrement d'intégrales :
  1) encadrement de l'intégrande,
  2) encadrement de l'intégrale en utilisant la croissance de l'intégrale.

□

d) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $(n+2)v_{n+1} \;=\; nv_n + u_{n+1}$ puis $v_{n+1} - v_n \;=\; \dfrac{1}{n}\,(u_{n+1} - 2v_{n+1})$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} (n+2)\, v_{n+1} &= \cancel{(n+2)}\ \frac{1}{(n+1)\,\big(\cancel{(n+1)+1}\big)} \sum_{k=1}^{n+1} k\, u_k \\ &= \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n} k\, u_k + (n+1)\, u_{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k\, u_k + u_{n+1} \\ &= n\ \frac{1}{n\,(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\, u_k + u_{n+1} \\ &= n\, v_n + u_{n=1} && \textit{(par définition de } v_n\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+2)\, v_{n+1} = n\, v_n + u_{n+1}}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} (n+2)\, v_{n+1} = n\, v_n + u_{n+1} &\Leftrightarrow\ n\, v_{n+1} + 2\, v_{n+1} = n\, v_n + u_{n+1} \\ &\Leftrightarrow\ n\, (v_{n+1} - v_n) = u_{n+1} - 2\, v_{n+1} \\ &\Leftrightarrow\ v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n}\, (u_{n+1} - 2\, v_{n+1}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n}\, (u_{n+1} - 2\, v_{n+1})}$$

□

e) Démontrer toutes les conjectures faites à la question ***2.b)***.

Démonstration.

- Montrons que la suite (v_n) est décroissante.
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$v_{n+1} - v_n \ = \ \frac{1}{n} \left(u_{n+1} - 2\, v_{n+1}\right)$$

  Or $\dfrac{1}{n} > 0$, donc $v_{n+1} - v_n$ est du signe de $u_{n+1} - 2\, v_{n+1}$.
  De plus :

$$u_{n+1} - 2\, v_{n+1} \leqslant 0 \ \Leftrightarrow \ u_{n+1} \leqslant 2\, v_{n+1} \ \Leftrightarrow \ \frac{u_{n+1}}{2} \leqslant v_{n+1}$$

  La dernière inégalité est vraie d'après la question ***2.c)***. Ppar équivalence, la première inégalité aussi.
  Ainsi : $u_{n+1} - 2\, v_{n+1} \leqslant 0$. On en déduit : $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est donc bien décroissante.}}$$

- Montrons que la suite (v_n) converge.
  D'après l'énoncé : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $u_k \geqslant 0$. On en déduit :

$$\sum_{k=1}^{n} k\, u_k \ \geqslant \ 0$$

  Comme $\dfrac{1}{n(n+1)} > 0$, on en déduit :

$$v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\, u_k \ \geqslant \ 0$$

  On obtient alors que la suite (v_n) est :
  × décroissante,
  × minorée par 0.

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (v_n) \text{ converge vers un réel } L \text{ tel que : } L \geqslant 0.}$$

- Montrons : $L = \dfrac{\ell}{2}$.
  × D'après la question ***2.c)*** : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \geqslant \dfrac{u_n}{2}$.

$$\boxed{\text{En passant à la limite quand } n \to +\infty \text{ dans l'inégalité précédente, on obtient : } L \geqslant \frac{\ell}{2}.}$$

  × Toujours d'après la question ***2.c)*** :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ v_{2n} \leqslant \frac{n+1}{2\,(2n+1)}\ v_n + \frac{3n+1}{4\,(2n+1)}\ u_{n+1} \qquad (*)$$

  - De plus : $\dfrac{n+1}{2\,(2n+1)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\cancel{n}}{2 \times 2\cancel{n}} = \dfrac{1}{4}$. On en déduit : $\dfrac{n+1}{2\,(2n+1)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{4}$.

- De même : $\dfrac{3n+1}{4\,(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{3\,\cancel{n}}{4\times 2\cancel{n}} = \dfrac{3}{8}$. On en déduit : $\dfrac{3n+1}{4\,(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{3}{8}$.
- Enfin, la suite (v_{2n}) est une suite extraite de (v_n). On en déduit que la suite (v_{2n}) converge et : $v_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L$.

Finalement, par passage à la limite quand $n \to +\infty$ dans l'inégalité $(*)$, on obtient :

$$L \leqslant \frac{1}{4}\,L + \frac{3}{8}\,\ell$$

Or :

$$L \leqslant \frac{1}{4}\,L + \frac{3}{8}\,\ell \quad\Leftrightarrow\quad L - \frac{1}{4}\,L \leqslant \frac{3}{8}\,\ell \quad\Leftrightarrow\quad \frac{3}{4}\,L \leqslant \frac{3}{8}\,\ell \quad\Leftrightarrow\quad L \leqslant \frac{4}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{8}\,\ell$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } L \leqslant \frac{\ell}{2}.}$$

$$\boxed{\text{Finalement, on a bien : } L = \frac{\ell}{2}.}$$

□

3. On suppose dans cette question uniquement que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

a) Montrer : $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{n=1}^{N} v_n = \sum\limits_{k=1}^{N} u_k - N\,v_N$.

Indication : on pourra penser à effectuer une interversion de sommes.

Démonstration.
Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} v_n &= \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\,u_k\right) && \textit{(par définition de } v_n\textit{)}\\
&= \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)}\,k\,u_k\right)\\
&= \sum_{1\leqslant k\leqslant n\leqslant N} \frac{1}{n(n+1)}\,k\,u_k\\
&= \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{n=k}^{N} \frac{1}{n(n+1)}\,k\,u_k\right)\\
&= \sum_{k=1}^{N} \left(k\,u_k \sum_{n=k}^{N} \frac{1}{n(n+1)}\right)
\end{aligned}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On remarque :

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Soit $k \in [\![1, N]\!]$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=k}^{N} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=k}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\\
&= \frac{1}{k} - \frac{1}{N+1} && \textit{(par télescopage)}
\end{aligned}$$

- Ainsi :

$$\begin{array}{rcl}
\sum\limits_{n=1}^{N} v_n & = & \sum\limits_{k=1}^{N} \left(k\, u_k \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{N+1} \right) \right) \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{N} \left(u_k - \dfrac{1}{N+1}\, k\, u_k \right) \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{N} u_k - \dfrac{1}{N+1} \sum\limits_{k=1}^{N} k\, u_k \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{N} u_k - N\, \dfrac{1}{N(N+1)} \sum\limits_{k=1}^{N} k\, u_k \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{N} u_k - N\, v_N \qquad \textit{(par définition de } v_N\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{k=1}^{N} u_k - N\, v_N}$$

Commentaire

- On utilise dans cette question la formule d'interversion suivante :

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{n} u_{k,n} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{n=k}^{N} u_{k,n} \right)$$

On peut retenir cette formule en considérant l'encadrement $1 \leqslant k \leqslant n \leqslant N$ (comme effectuer dans la démonstration précédente).
On procède alors comme suit.
  - × On supprime la variable n de l'encadrement : $1 \leqslant k \leqslant \cdot \leqslant N$
    On doit donc considérer une somme : $\sum\limits_{k=1}^{N}$
  - × On considère alors l'encadrement immédiat de n : $k \leqslant n \leqslant N$
    On doit donc considérer une somme : $\sum\limits_{n=k}^{N}$

On retrouve alors la formule : $\sum\limits_{n=1}^{N} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} u_{k,n} \right) = \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n \leqslant N} u_{k,n} = \sum\limits_{k=1}^{N} \left(\sum\limits_{n=k}^{N} u_{k,n} \right)$

- On utilise dans cette question l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

C'est une égalité classique, et donc à connaître. □

b) En déduire que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} v_n$ converge.

Démonstration.

- Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
  - × On a déjà montré en question ***2.e)*** : $v_N \geqslant 0$.
  D'où : $N\, v_N \geqslant 0$.
  - × On en déduit :
  $$\sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{k=1}^{N} u_k - N\, v_N \ \leqslant \ \sum_{k=1}^{N} u_k$$
  - × Or la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ est une série à termes positifs. La suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{N} u_k\right)_{N \in \mathbb{N}^*}$ est donc croissante.
  Cette série est de plus convergente, de somme $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k$. On en déduit :
  $$\forall N \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=1}^{N} u_k \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$$

$$\boxed{\text{Finalement, par transitivité : } \forall N \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{n=1}^{N} v_n \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} u_k.}$$

- Ainsi, la suite $\left(\sum\limits_{n=1}^{N} v_n\right)_{N \in \mathbb{N}^*}$ est :
  - × croissante, car $\sum\limits_{n \geqslant 1} v_n$ est une série à termes positifs,
  - × majorée par $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k$.

  La suite $\left(\sum\limits_{n=1}^{N} v_n\right)_{N \in \mathbb{N}^*}$ est donc convergente.

$$\boxed{\text{On en déduit que la série } \sum_{n \geqslant 1} v_n \text{ est convergente.}}$$

□

c) Montrer ensuite que $N\, v_N$ tend vers une limite finie lorsque l'entier N tend vers $+\infty$, puis en raisonnant par l'absurde, montrer que cette limite est nulle.

Démonstration.

- D'après la question ***3.a)*** : $\forall N \in \mathbb{N}^*, \ N\, v_N = \sum\limits_{n=1}^{N} v_n - \sum\limits_{k=1}^{N} u_k$.
  Or :
  - × la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ est convergente,
  - × la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} v_n$ est convergente, d'après la question précédente.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (N\, v_N)_{N \in \mathbb{N}^*} \text{ converge vers une limite } \ell_0.}$$

- Montrons : $\ell_0 = 0$. On procède par l'absurde.
  Supposons : $\ell_0 \neq 0$.
  Comme $n\, v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_0$ et $\ell_0 \neq 0$, on en déduit : $n\, v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell_0$. D'où : $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ell_0}{n}$.
  On obtient alors :
  × $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \geqslant 0$,
  × $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ell_0}{n}$,
  × la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est une série de Riemann d'exposant 1 ($1 \not> 2$). Elle est donc divergente.
  Il en est de même de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\ell_0}{n}$ (on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel non nul).
  Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ est divergente.
  Ceci est absurde, d'après la question précédente.

$$\boxed{\text{Finalement : } \lim_{N\to+\infty} N\, v_N = \ell_0 = 0.}$$

□

d) En déduire : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Démonstration.
D'après la question ***3.a)*** :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{N} v_n \ = \ \sum_{k=1}^{N} u_k - N\, v_N$$

Or :
× la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ est convergente, de somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$,
× la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est convergente, de somme $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k$,
× la suite $(N\, v_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

$$\boxed{\text{Par passage à la limite quand } N \to +\infty \text{ dans l'égalité précédente : } \sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k.}$$

□

4. On considère dans cette question une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

a) Justifier qu'il existe une variable aléatoire Z, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([Z = n]) \ = \ \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\, \mathbb{P}([Y = k])$$

Démonstration.
On commence par considérer les notations suivantes :
× pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note : $u_k = \mathbb{P}([Y = k])$,
× pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$v_n \ = \ \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\, \mathbb{P}([Y = k]) \ = \ \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\, u_k$$

Pour démontrer qu'il existe une v.a.r. Z telle que $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ et : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([Z = n]) = v_n$, il suffit de montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définit une loi de probabilité.

- Montrons : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \geqslant 0$.
  Comme Y est une v.a.r. , alors : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $u_k \geqslant 0$.

  $\boxed{\text{Avec la même démonstration qu'en question } \textbf{\textit{2.e)}}\text{, on en déduit : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \geqslant 0.}$

- Montrons que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ converge et : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n = 1$.
  - La famille $([Y = k])_{k\in\mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements.

    $\boxed{\text{On en déduit que la série } \sum\limits_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge et : } \sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k = 1.}$
  - De plus, on a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
    $$v_n \;=\; \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\, u_k$$

  On est donc bien de la cadre de la question ***3.***.

  $\boxed{\text{D'après la question } \textbf{\textit{3.b)}}\text{, on obtient que la série } \sum\limits_{n\geqslant 1} v_n \text{ est convergente.}}$

  De plus, d'après la question ***3.d)*** :
  $$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n \;=\; \sum_{k=1}^{+\infty} u_k \;=\; 1$$
  $$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} v_n \;=\; 1}$$

$\boxed{\text{Finalement, la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ définit bien une loi de probabilité.}}$

Commentaire

Cette question est une application des résultats démontrés précédemment. La difficulté consiste donc à expliquer que l'on se place bien ici dans le cadre de l'énoncé pour pouvoir utiliser les résultats voulus.

□

b) On suppose dans cette question que Y admet une espérance, notée $\mathbb{E}(Y)$.
Montrer : $\mathbb{P}([Z = n]) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathbb{E}(Y)}{n^2}$. La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ?

Démonstration.

- La v.a.r. Y admet une espérance.
  On en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} n\,\mathbb{P}([Y = n])$ est convergente et :
  $$\sum_{k=1}^{+\infty} k\,\mathbb{P}([Y = k]) \;=\; \mathbb{E}(Y)$$
- Montrons : $\mathbb{E}(Y) \neq 0$ (pour que l'équivalent proposé par l'énoncé soit bien défini).
  - Tout d'abord : $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\mathbb{P}([Y = n_0]) \neq 0$.
    Or : $\mathbb{P}([Y = n_0]) \geqslant 0$. On en déduit : $\mathbb{P}([Y = n_0]) > 0$.

× De plus, comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} n\,\mathbb{P}([Y=n])$ est une série à termes positifs :

$$\begin{array}{ccccc} \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k\,\mathbb{P}([Y=k]) & \geqslant & n_0\,\mathbb{P}([Y=n_0]) & > & 0 \\ \shortparallel & & & & \\ \mathbb{E}(Y) & & & & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{E}(Y) \neq 0 \text{ (et même : } \mathbb{E}(Y) > 0).}$$

- On obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z=n]) &= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}([Y=k]) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n(n+1)}\,\mathbb{E}(Y) && \textit{(car } \mathbb{E}(Y)\neq 0\textit{)} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n\times n}\,\mathbb{E}(Y) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}([Z=n]) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathbb{E}(Y)}{n^2}.}$$

- La v.a.r. Z admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} n\,\mathbb{P}([Z=n])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Or :

× $n\,\mathbb{P}([Z=n]) \underset{n\to+\infty}{\sim} \cancel{n} \times \dfrac{\mathbb{E}(Y)}{n^{\cancel{2}}} = \dfrac{\mathbb{E}(Y)}{n}$,

× $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\mathbb{E}(Y)}{n} > 0$,

× la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est une série de Riemann d'exposant 1 ($1 \not> 2$). Elle est donc divergente.

Il en est de même de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\mathbb{E}(Y)}{n}$ (on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel non nul).

Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} n\,\mathbb{P}([Z=n])$ est divergente.

$$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } Z \text{ n'admet pas d'espérance.}}$$

□

Problème

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Étude de fonction

1. a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

- La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ car elle est le quotient $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ où :
  - × $f_1 : x \mapsto x$ est continue sur $]0, +\infty[$ car polynomiale.
  - × $f_2 : x \mapsto e^x - 1$:
    - – est continue sur $]0, +\infty[$,
    - – `NE S'ANNULE PAS` sur $]0, +\infty[$.
- Par un raisonnement analogue, la fonction f est continue sur $]-\infty, 0[$.
  On en conclut que f est continue sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.
- De plus, la fonction f est continue en 0. En effet :
  - × d'une part :
  $$\frac{x}{e^x - 1} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = 1$$
  - × d'autre part : $f(0) = 1$.

  Ainsi, on obtient bien : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \ = \ f(0)$.

$$\boxed{\text{On en conclut que } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

□

b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Démonstration.

- Par un raisonnement similaire à celui de la question précédente (on remplace « continue » par « de classe $\mathcal{C}^1$ »), on obtient que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.
- Soit $x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

$$f'(x) \ = \ \frac{(e^x - 1) - x\, e^x}{(e^x - 1)^2} \ = \ \frac{(1 - x)\, e^x - 1}{(e^x - 1)^2}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \ f'(x) \ = \ \frac{(e^x - 1) - x\, e^x}{(e^x - 1)^2} \ = \ \frac{(1 - x)\, e^x - 1}{(e^x - 1)^2}}$$

□

On admettra pour la suite que $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$ et que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. a) Étudier les variations de l'application $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par :

$$u : x \mapsto (1-x)\,\mathrm{e}^x - 1$$

Démonstration.

- La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$:
$$u'(x) = -x\,\mathrm{e}^x$$
Comme $\mathrm{e}^x > 0$, $u'(x)$ est du signe de $-x$.
On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $u'(x)$		$+$		$-$	
Variations de u	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

- Détaillons les éléments de ce tableau.
  × Tout d'abord : $u(0) \ = \ (1-0)\,\mathrm{e}^0 - 1 \ = \ 1 - 1 \ = \ 0$.
  × Ensuite, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
  $$u(x) \ = \ (1-x)\,\mathrm{e}^x - 1 \ = \ \mathrm{e}^x - x\,\mathrm{e}^x - 1$$
  Or, par croissances comparées : $\lim\limits_{x \to -\infty} x\,\mathrm{e}^x = 0$.
  D'où, comme $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$: $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = -1$.
  × Enfin : $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.
  Ainsi : $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = -\infty$. □

b) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{(\mathrm{e}^x - 1)^2}$.
- D'après la question précédente, la fonction u est croissante sur $]-\infty, 0]$ et décroissante sur $]0, +\infty[$. Elle admet donc un maximum en 0. On en déduit, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$u(x) \ \leqslant \ u(0) = 0$$
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ u(x) \leqslant 0}$$
- Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:
$$f'(x) \ = \ \frac{u(x)}{(\mathrm{e}^x - 1)^2} < 0$$
En effet : $(\mathrm{e}^x - 1)^2 > 0$ et $u(x) < 0$ sur $\mathbb{R}^*$.
- Enfin, $f'(0) = -\dfrac{1}{2} < 0$ d'après l'énoncé.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0.}$$
□

c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
Dresser le tableau de variations de f.

Démonstration.

- Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x - 1 = -1$.
  De plus : $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.}$$

- Ensuite :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{e^x}$$

  Or, par croissances comparées : $\dfrac{x}{e^x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

- Avec la question ***2.b)***, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$-$		$-$
Variations de f	$+\infty$	1	0

□

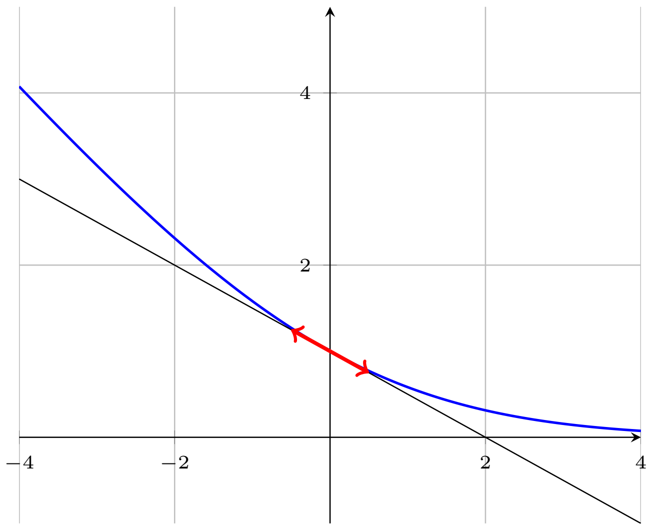
d) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Démonstration.

- Tout d'abord, déterminons l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0.
  Il s'agit de la droite d'équation :

$$\begin{aligned} y &= f(0) + f'(0)(x-0) \\ &= 1 - \frac{1}{2}\, x \end{aligned}$$

- On obtient le graphe suivant :



Commentaire

- On s'efforcera de traiter les questions de tracé de courbe.
En effet, ce type de question consiste uniquement à faire apparaître sur un graphique toutes les informations qu'on a recueillies dans les questions précédentes.
- Il est indispensable de faire apparaître les tangentes horizontales. Si on a déterminé d'autres tangentes ou des points d'inflexions auparavant, on doit également les faire apparaître.
- On rappelle qu'un tracé de courbe s'effectue toujours de la façon suivante :
  1) placer le ou les points principaux de la courbe représentative de f (ici seulement le point $\big(0, f(0)\big)$).
  2) placer les tangentes à la courbe (ici la tangente à $\mathcal{C}_f$ en le point précédent).
  3) tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ en prenant en compte le sens de variations de f et les limites de f.

  Insistons sur le fait qu'à proximité du point $\big(0, f(0)\big)$, tangente et courbe représentative de f doivent apparaître comme confondues.

□

Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. Montrer que f admet un point fixe et un seul, noté α, que l'on calculera.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

- Si $x \in \mathbb{R}^*$, alors :

$$\begin{aligned} & f(x) = x \\ \Leftrightarrow\ & \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = x \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1} = 1 \qquad \textit{(car } x \neq 0\textit{)} \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{e}^x - 1 = 1 \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{e}^x = 2 \\ \Leftrightarrow\ & x = \ln(2) \end{aligned}$$

- Si $x = 0$, alors : $f(0) = 1$.
On en déduit que 0 n'est pas un point fixe de f.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet pour unique point fixe } \alpha = \ln(2).}$$

□

4. a) Établir : $\forall x \in [0, +\infty[,\ \mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0$.

Démonstration.

- Considérons la fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^{2x} - 2x\,\mathrm{e}^x - 1$.
La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$g'(x) \ = \ 2\mathrm{e}^x\,(\mathrm{e}^x - 1 - x)$$

Déterminons le signe de $g'(x)$.

× Comme $\mathrm{e}^x > 0$, $g'(x)$ est du signe de $\mathrm{e}^x - 1 - x$.

× Or la fonction $h : x \mapsto \mathrm{e}^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
On en déduit que sa courbe représentative $\mathcal{C}_h$ se situe au-dessus de ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 0. Or cette tangente est la droite d'équation :

$$\begin{aligned} y &= h(0) + h'(0)(x-0) \\ &= \mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^0\, x \;=\; 1 + x \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$. D'où :

$$\mathrm{e}^x - 1 - x \;\geqslant 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) \geqslant 0.}$$

- La fonction g est donc croissante. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$g(x) \;\geqslant\; g(0) \;=\; 0$$

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } x \in \mathbb{R}_+,\ \ \mathrm{e}^{2x} - 2x\,\mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0.}$$

□

b) Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[,\ f'(x) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^x - 1}{2(\mathrm{e}^x - 1)^2}$.

Démonstration.
Soit $x \in]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} f'(x) + \frac{1}{2} &= \frac{(1-x)\,\mathrm{e}^x - 1}{(\,\mathrm{e}^x - 1)^2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{2(1-x)\,\mathrm{e}^x - 2 + (\,\mathrm{e}^x - 1)^2}{2(\,\mathrm{e}^x - 1)^2} \\ &= \frac{\cancel{2\,\mathrm{e}^x} - 2x\,\mathrm{e}^x - 2 + \mathrm{e}^{2x} - \cancel{2\,\mathrm{e}^x} + 1}{2(\,\mathrm{e}^x - 1)^2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{2x} - 2x\,\mathrm{e}^x - 1}{2(\mathrm{e}^x - 1)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[,\ f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^x - 1}{2(\mathrm{e}^x - 1)^2}.}$$

□

c) Montrer : $\forall x \in [0, +\infty[,\ -\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0$.

Démonstration.
Soit $x \in\ [0, +\infty[$.

- Tout d'abord, d'après la question ***2.a)*** :

$$f'(x)\ <\ 0$$

- Démontrons : $-\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x)$. Deux cas se présentent :
  - × si $x \neq 0$, alors, d'après la question précédente :

$$f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^{x} - 1}{2(\mathrm{e}^{x} - 1)^2}$$

    Comme $2\,(\mathrm{e}^x - 1)^2 > 0$, on en déduit que $f'(x) + \dfrac{1}{2}$ est du signe de $g(x)$.
    Or, d'après la question ***2.a)*** : $g(x) \geqslant 0$. On en déduit :

$$f'(x) + \frac{1}{2} \geqslant 0$$

  - × si $x = 0$, alors :

$$f'(0) = -\frac{1}{2}\ \geqslant\ -\frac{1}{2}$$

  Finalement : $\forall x \in [0, +\infty[,\ f'(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall x \in [0, +\infty[,\ -\frac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0.}$$

□

d) Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}\,|u_n - \alpha|$.

Démonstration.

- D'après les questions précédentes :
  - × f est dérivable sur $[0, +\infty[$,
  - × $\forall x \in [0, +\infty[,\ |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
    En effet, d'après la question précédente, pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$\begin{array}{rc} & -\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0 \\ \text{donc} & -\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{2} \\ \text{c'est-à-dire} & |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2} \end{array}$$

  On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (x, y) \in [0, +\infty[^2,\ |f(y) - f(x)|\ \leqslant\ \frac{1}{2}\ |y - x|$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite appliquer cette inégalité à $y = u_n$ et $x = \alpha$.
  Pour cela, vérifions que ces deux termes appartiennent à l'intervalle $[0, +\infty[$.
  - × D'après le tableau de variations de la question ***2.c)***, $[0, +\infty[$ est un intervalle stable de f.
    De plus : $u_0 = 1 \geqslant 0$.
    Ainsi, par récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, +\infty[$.
  - × D'après la question ***3.*** : $\alpha = \ln(2) \in [0, +\infty[$.

  Soit $n \in \mathbb{N}$.
  En appliquant donc l'inégalité précédente à $y = u_n \in [0, +\infty[$ et $x = \alpha \in [0, +\infty[$, on obtient :
$$|f(u_n) - f(\alpha)| \ \leqslant \ \frac{1}{2} \ |u_n - \alpha|$$
  Or :
  - × $f(u_n) = u_{n+1}$, par définition de la suite (u_n),
  - × $f(\alpha) = \alpha$, car α est un point fixe de f.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N}, \ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2} \, |u_n - \alpha|}$$

Commentaire

- La démonstration par récurrence de la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, +\infty[$, n'était pas au coeur de cette question et la simple mention de cette récurrence suffisait sans doute à obtenir la totalité des points alloués à cette question.
- La rédaction de cette dernière aurait été la suivante.
  Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_n \in [0, +\infty[$.
  - ▸ **Initialisation** :
    D'après l'énoncé : $u_0 = 1 \in [0, +\infty[$.
    D'où $\mathcal{P}(0)$.
  - ▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} \in [0, +\infty[$).
    - × Par hypothèse de récurrence : $u_n \in [0, +\infty[$.
    - × Ainsi, d'après le tableau de variations de la question ***2.c)*** : $f(u_n) \in [0, 1]$.
      Or : $[0, 1] \subset [0, +\infty[$.
      On en déduit : $u_{n+1} = f(u_n) \in [0, +\infty[$.

    D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

  Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, +\infty[$.

□

5. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}(1 - \alpha)$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n} \, (1 - \alpha)$.

- ▸ **Initialisation** :
  - × D'une part, d'après la question ***3.*** : $\dfrac{1}{2^0} \, (1 - \alpha) = 1 - \ln(2)$.
  - × D'autre part, comme $u_0 = 1$:
$$|u_0 - \alpha| \ = \ |1 - \alpha| \ = \ |1 - \ln(2)| \ = \ 1 - \ln(2)$$
    En effet : $1 - \ln(2) \geqslant 0$.

  D'où $\mathcal{P}(0)$.

- ▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}(1-\alpha)$).
  D'après la question ***2.d)*** :
  $$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n - \alpha|$$
  Or, par hypothèse de récurrence :
  $$|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}\,(1-\alpha)$$
  En combinant ces deux résultats, on obtient :
  $$|u_{n+1} - \alpha| \ \leqslant\ \frac{1}{2}\,|u_n - \alpha| \ \leqslant\ \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n}\,(1-\alpha) \ =\ \frac{1}{2^{n+1}}\,(1-\alpha)$$
  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}\,(1-\alpha).}$$

□

6. Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}\,(1-\alpha)$. Ainsi :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ -\frac{1}{2^n}\,(1-\alpha) \leqslant |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}\,(1-\alpha)$$
- Or :
  × $-\dfrac{1}{2^n}\,(1-\alpha) \to 0$ car $\dfrac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $2^{n+1} \to +\infty$.
  × $\dfrac{1}{2^n}\,(1-\alpha) \to 0$.

Ainsi, par théorème d'encadrement : $|u_n - \alpha| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ceci équivaut à : $u_n - \alpha \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ est convergente de limite } \alpha.}$$

□

7. Écrire un programme en **Python** qui calcule et affiche le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$.

Démonstration.

```python
n = 0
u = 1
while abs(u - np.log(2)) >= 10**(-9) :
    u = u / (np.exp(u) - 1)
    n = n + 1
print(n)
```

Détaillons les éléments de ce programme.

- **Début du programme**
  La variable `n` est initialisée à 0.
  La variable `u`, qui contiendra les valeurs successives de la suite (u_n), est initialisée à $u_0 = 1$.

```python
n = 0
u = 1
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 3 à 5 consistent à déterminer le plus petit entier n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$. On doit donc calculer les valeurs successives de la suite (u_n) jusqu'à ce que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$. Autrement dit, on doit calculer ces valeurs successives tant que $|u_n - \alpha| \geqslant 10^{-9}$. Pour cela, on met en place une structure itérative (while) :

```
3 while abs(u - np.log(2)) >= 10**(-9) :
```

  Tant que $|u_n - \alpha| \geqslant 10^{-9}$, on calcule u_{n+1} et on stocke toujours cette valeur dans la variable `u` :

```
4       u = u / (np.exp(u) - 1)
```

  On met alors à jour en conséquence la variable `n` : on ajoute 1 pour signaler qu'on a calculé u_{n+1}.

```
5       n = n + 1
```

- **Fin du programme**
  À l'issue de cette boucle, la variable `n` contient le plus petit entier n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$.
  On affiche alors enfin la valeur de la variable `n`.

```
7 print(n)
```

> **Commentaire**
> Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, proposer un programme **Python** correct démontre la bonne compréhension de ces mécanismes et permet certainement d'obtenir la majorité des points alloués à cette question.
> On procèdera de même dans les autres questions **Python**.

□

8. Si on ne connaissait pas la valeur de α, comment aurait-on pu déterminer un entier n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$? Écrire l'appel correspondant en **Python**.

Démonstration.

- On souhaite exhiber $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$|u_n - \alpha| \ < \ 10^{-9}$$

  Or, d'après la question ***5.***, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n - \alpha| \ \leqslant \ \frac{1}{2^n}\,(1 - \alpha)$$

  Comme $\alpha \geqslant 0$, on obtient : $1 - \alpha \leqslant 1$. D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \ \leqslant \ \frac{1}{2^n}\,(1 - \alpha) \ \leqslant \ \frac{1}{2^n}$$

- Il suffit alors de trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\dfrac{1}{2^N} \leqslant 10^{-9}$.
  Si c'est le cas, on obtient alors par transitivité :

$$|u_N - \alpha| \ \leqslant \ \frac{1}{2^N} \ \leqslant \ 10^{-9}$$

- Déterminons alors un entier N vérifiant : $\dfrac{1}{2^N} \leqslant 10^{-9}$.
  Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rrcll} & \dfrac{1}{2^n} & \leqslant & 10^{-9} & \\[2ex] \Leftrightarrow & 2^n & \geqslant & 10^9 & \textit{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \\[2ex] \Leftrightarrow & n\ \ln(2) & \geqslant & 9\ \ln(10) & \textit{(par stricte croissance de la fonction } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\[2ex] \Leftrightarrow & n & \geqslant & \dfrac{9\ \ln(10)}{\ln(2)} & \textit{(car } \ln(2) > 0\textit{)} \end{array}$$

  L'entier $N = \left\lceil \dfrac{9\ \ln(10)}{\ln(2)} \right\rceil$ convient.

$$\boxed{\text{On obtient l'entier cherché par l'appel : } \texttt{np.ceil(9 * np.log(10) / np.log(2))}.}$$

Commentaire

Si on ne connaît pas α et qu'on souhaite en calculer une approximation à 10^{-9} près, on pourra alors procéder comme suit.

```python
N = np.ceil(9 * np.log(10) / np.log(2))
u = 1
for i in range(N) :
    u = u / (np.exp(u) - 1)
print(u)
```

□

Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$G : x \mapsto \int_x^{2x} f(t)\ dt.$$

9. Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G'(x) = \begin{cases} \dfrac{x(3-\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^{2x}-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Démonstration.

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc une primitive F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. On remarque :

$$G(x) \ = \ \int_x^{2x} f(t)\ dt \ = \ [\ F(t)\ ]_x^{2x} \ = \ F(2x) - F(x)$$

La fonction $H : x \mapsto F(2x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car elle est la composée $H = F \circ h$ où :

× $h : x \mapsto 2x$ est :
  - de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,
  - telle que : $h(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.

× F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction } G \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ en tant que somme de fonctions de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcll} G'(x) & = & (F \circ h)'(x) - F'(x) & \\ & = & (F' \circ h)(x) \times h'(x) - F'(x) & \\ & = & F'\big(h(x)\big) \times 2 - F'(x) & \\ & = & 2F'(2x) - F'(x) & \\ & = & 2\,f(2x) - f(x) & \textit{(car } F \textit{ est une primitive de } f\textit{)} \end{array}$$

Deux cas se présentent alors :

× si $x \in \mathbb{R}^*$, alors :

$$\begin{array}{rcl} G'(x) & = & 2\,f(2x) - f(x) \\ & = & \dfrac{4x}{\mathrm{e}^{2x} - 1} - \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x} - 1} \\ & = & \dfrac{4x - x\,(\mathrm{e}^{x} + 1)}{\mathrm{e}^{2x} - 1} \\ & = & \dfrac{x\,(3 - \mathrm{e}^{x})}{\mathrm{e}^{2x} - 1} \end{array}$$

× si $x = 0$, alors :

$$G'(0) = 2f(2 \times 0) - f(0) = 2\,f(0) - f(0) = 1$$

$$\boxed{\text{Finalement : } G' : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x(3 - \mathrm{e}^{x})}{\mathrm{e}^{2x} - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}}$$

□

10. a) Montrer : $\forall x \in [0, +\infty[,\ 0 \leqslant G(x) \leqslant x f(x)$.
En déduire la limite de G en $+\infty$.

Démonstration.

- Soit $x \in [0, +\infty[$.
  × Soit $t \in [x, 2x]$. Alors :

$$\begin{array}{lrcccl} & x & \leqslant & t & \leqslant & 2x \\ \text{donc} & f(x) & \geqslant & f(t) & \geqslant & f(2x) \quad \textit{(par décroissance de } f \textit{ sur } [0,+\infty[\textit{)} \end{array}$$

De plus, d'après le tableau de variations de la question ***2.c)*** : $f(t) \geqslant 0$.
Ainsi, pour tout $t \in [x, 2x]$:

$$0 \ \leqslant\ f(t) \ \leqslant\ f(x)$$

× Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($x \leqslant 2x$, car $x \geqslant 0$) :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_x^{2x} 0 \, dt & \leqslant & \displaystyle\int_x^{2x} f(t) \, dt & \leqslant & \displaystyle\int_x^{2x} f(x) \, dt \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ 0 & & G(x) & & f(x)(2x - x) \; = \; x\, f(x) \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in [0, +\infty[, \ 0 \leqslant G(x) \leqslant x\, f(x)}$$

Commentaire

On retiendra que l'encadrement / la minoration / la majoration d'une intégrale s'effectue souvent de la façon suivante :

1) encadrement / minoration / majoration de son intégrande,

2) utilisation de la croissance de l'intégrale (pour peu que les bornes soient dans l'ordre croissant).

- On a l'équivalent suivant :

$$x\, f(x) = \frac{x^2}{\mathrm{e}^x - 1} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x^2}{\mathrm{e}^x}$$

Or, par croissances comparées : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x} = 0$. On en déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\, f(x) = 0$.

On obtient alors :

× $\lim\limits_{x \to +\infty} 0 = 0$,

× $\lim\limits_{x \to +\infty} x\, f(x) = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par théorème d'encadrement : } \lim_{x \to +\infty} G(x) = 0.}$$

□

b) Montrer : $\forall x \in \,]-\infty, 0], \ G(x) \leqslant x\, f(x)$.
En déduire la limite de G en $-\infty$.

Démonstration.

- Soit $x \in]-\infty, 0]$.

× Soit $t \in [2x, x]$. Alors :

$$\begin{array}{rcccccl} & 2x & \leqslant & t & \leqslant & x & \\ \text{donc} & f(2x) & \geqslant & f(t) & \geqslant & f(x) & \textit{(par décroissance de } f \textit{ sur } [0,+\infty[\textit{)} \end{array}$$

× Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($2x \leqslant x$, car $x \leqslant 0$) :

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\int_{2x}^{x} f(t) \, dt & \geqslant & \displaystyle\int_{2x}^{x} f(x) \, dt \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ -\displaystyle\int_x^{2x} f(t) \, dt & & -\displaystyle\int_x^{2x} f(x) \, dt \end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\int_x^{2x} f(t)\ dt & \leqslant & \displaystyle\int_x^{2x} f(x)\ dt \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ G(x) & & f(x)(2x-x) \ = \ x\, f(x) \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \ ]-\infty, 0],\ G(x) \leqslant x\, f(x)}$$

- D'après la question ***2.c)*** : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. On en déduit $\lim\limits_{x\to-\infty} x\, f(x) = -\infty$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par théorème de comparaison : } \lim\limits_{x\to-\infty} G(x) = -\infty.}$$

□

11. Dresser le tableau de variations de G. On n'essaiera pas de calculer $G(\ln 3)$.

Démonstration.

- D'après la question ***9*** :

$$G' : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x\,(3-\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^{2x}-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Déterminons, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, le signe de $G'(x)$.
Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

× Étudions le signe de $(3 - \mathrm{e}^x)$.

$$\begin{array}{rcll} 3 - \mathrm{e}^x \geqslant 0 & \Leftrightarrow & 3 \geqslant \mathrm{e}^x & \\ & \Leftrightarrow & \ln(3) \geqslant x & \textit{(par stricte croissance de la fonction } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \end{array}$$

× Étudions le signe de $\mathrm{e}^{2x} - 1$.

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{e}^{2x} - 1 \geqslant 0 & \Leftrightarrow & \mathrm{e}^{2x} \geqslant 1 & \\ & \Leftrightarrow & 2x \geqslant 0 & \textit{(par stricte croissance de la fonction } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & x \geqslant 0 & \end{array}$$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		$\ln(3)$		$+\infty$
Signe de x		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $3-\mathrm{e}^x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $\mathrm{e}^{2x}-1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $G'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	

- On obtient enfin le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		$\ln(3)$		$+\infty$
Signe de $G'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de G	$-\infty$	$\nearrow$	$G(\ln(3))$	$\searrow$	0

$\square$