DS1 (version B) /147

Exercice 1 /42

1. Dans cette question, on considère les matrices $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et le produit matriciel $M = CL$.

a) (i) Calculer M et M^2.

- 1 pt : $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $M^2 = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$

(ii) Déterminer le rang de M.

- 1 pt : $\mathrm{rg}(M) = 1$

(iii) La matrice M est-elle diagonalisable ?

- 1 pt : $\mathrm{Sp}(M) \subset \{0\}$

- 1 pt : 0 est valeur propre de M

- 1 pt : théorème du rang

- 1 pt : conclure M non diagonalisable

b) Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que la matrice P est inversible et calculer le produit $P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- 1 pt : $\mathrm{rg}(P) = 3$

- 1 pt : $P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) Trouver une matrice inversible Q dont la transposée ${}^tQ$ vérifie : ${}^tQ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- 2 pts : pour tout matrice Q qui vérifie ${}^tQ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (par exemple $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$)

- 1 pt : vérification Q inversible

d) Pour une telle matrice Q, calculer le produit $P\,M\,Q$.

- 1 pt : $PMQ = E_{1,1}$

2. La fonction **Python** suivante permet de multiplier la $i^{\text{ème}}$ ligne L_i d'une matrice A par une réel sans modifier ses autres lignes, c'est-à-dire de lui appliquer l'opération élémentaire $L_i \leftarrow a\, L_i$ (où $a \neq 0$).
*(Pour l'explication des fonctions et instances **Python**, on pourra se reporter à l'annexe en fin de sujet)*

```python
def multilig(a, i, A) :
    [n, p] = A.shape
    B = np.copy(A)
    for j in range(p) :
        B[i, j] = a * B[i,j]
    return B
```

a) Donner le code **Python** de deux fonctions `adlig` (d'arguments `b`, `i`, `j`, `A`) et `echlig` (d'arguments `i`, `j`, `A`) permettant d'effectuer respectivement les autres opérations sur les lignes d'une matrice :

$$L_i \leftarrow L_i + b\, L_j \ (i \neq j) \quad \text{et} \quad L_i \leftrightarrow L_j \ (i \neq j)$$

- **3 pts : fonction `adlig` (1 pt pour structure de fonction, 1 pt pour initialisation, 1 pt pour boucle for)**

```python
def adlig(b, i, j, 1) :
    [n, p] = A.shape
    B = np.copy(A)
    for k in range(p) :
        B[i, k] = B[i, k] + b * B[j, k]
    return B
```

- **3 pts : fonction `echlig` (2 pts pour utilisation d'une variable auxiliaire, 1 pt pour le reste)**

```python
def echlig(i, j, A) :
    [n, p] = A.shape
    B = np.copy(A)
    for k in range(p) :
        aux = B[i, k]
        B[i, k) = B[j, k]
        B[j, k] = aux
    return B
```

b) Expliquer pourquoi la fonction `multligmat` suivante retourne le même résultat `B` que la fonction `multlig`.

```python
def multiligmat(a, i, A) :
    [n, p] = A.shape
    D = np.eye(n)
    D[i, i] = a
    B = np.dot(D, A)
    return B
```

- **4 pts (dont 2 pour une tentative pertinente)**

3. Dans cette question, on note n un entier supérieur ou égal à 2 et M une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1. Pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à l'intersection de sa $i^{\text{ème}}$ ligne et de sa $j^{\text{ème}}$ colonne, et qui vaut 1.

a) (i) Justifier l'existence d'une matrice colonne non nulle $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et d'une matrice ligne non nulle $L_1 = \begin{pmatrix} l_1 & \dots & l_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telles que $M = CL$.

- 4 pts dont 2 pour toute tentative pertinente

(ii) Calculer la matrice $M\,C$ et en déduire une valeur propre de M.

- 2 pts : $MC = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \ell_i\, c_i\right) \cdot C$

- 1 pt : $C \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$

(iii) Montrer que si le réel $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i\, l_i$ est différent de 0, alors la matrice M est diagonalisable.

- 1 pt : $0 \in \mathrm{Sp}(M)$ **car** $\mathrm{rg}(M) = 1$

- 1 pt : $\dim\big(E_0(M)\big) = n-1$ **par théorème du rang**

- 2 pts : $\dim\big(E_0(M)\big) + \dim\big(E_\alpha(M)\big) = n$ **(1 pt par inégalité)**

b) (i) À l'aide de l'égalité $M = C\,L$, établir l'existence de deux matrices inversibles P et Q telles que $P\,M\,Q = E_{1,1}$.

- 5 pts dont 2 pour toute tentative pertinente

(ii) En déduire que pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, il existe deux matrices inversibles P_i et Q_j telles que $P_i\,M\,Q_j = E_{i,j}$.

- 2 pts : décomposition $E_{i,j}$ en produit d'une matrice colonne par matrice ligne bien choisies

- 1 pt : reste

Exercice 2 /43

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\, u_k$$

1. On suppose que l'on dispose d'une fonction **Python** d'en-tête `def suite_u(n)` qui prend en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$ et qui renvoie la valeur de u_n.
En déduire une fonction **Python** d'en-tête `def suite_v(n)` qui prend en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$ et qui renvoie la valeur de v_n.

- **4 pts (1 pt pour structure fonction, 1 pt pour initialisation, 1 pt pour boucle for, 1 pt pour dernière mise à jour de** `v`**)**

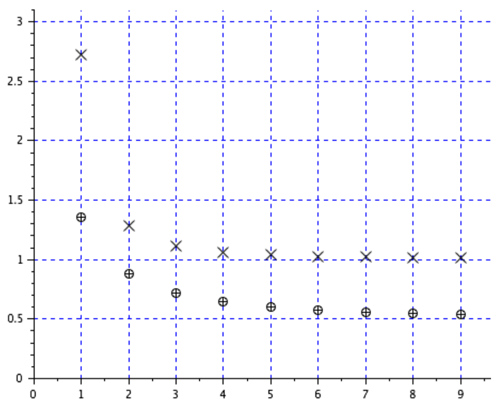
```python
def suite_v(n) :
    v = 0
    for k in range(n) :
        v = v + (k + 1) * suite_u(k + 1)
    v = (1 / (n * (n + 1))) * v
    return v
```

2. On suppose dans cette question uniquement que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

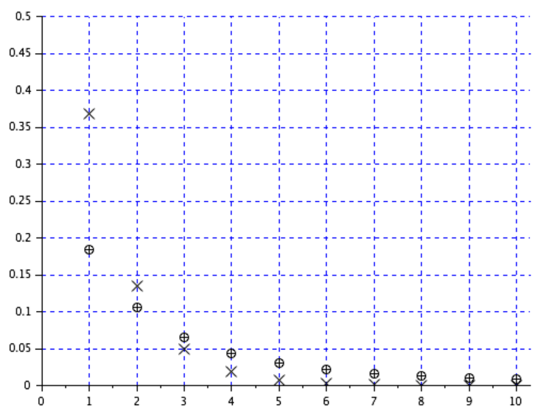
a) Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

- **1 pt**

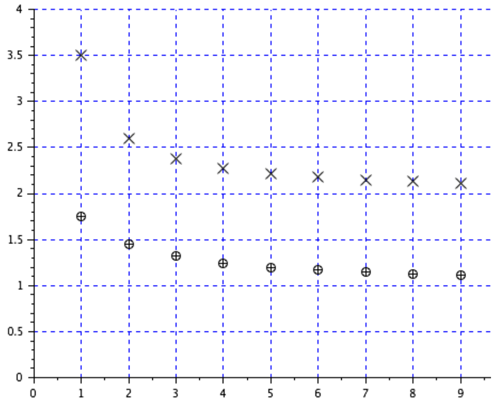
b) Pour différentes suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroissantes, on représente ci-dessous, à l'aide des fonctions `suite_u` et `suite_v`, les premiers termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec le symbole $\times$ et ceux de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec le symbole $\oplus$.
À la vue des graphes suivants, quelles conjectures peut-on faire sur la monotonie, la convergence et la valeur de la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en fonction de celle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?



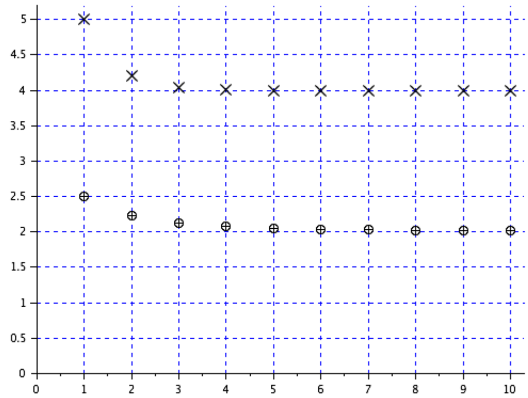
Cas où : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = e^{1/n^2}$



Cas où : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = e^{-n}$



Cas où : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{6n+1}{3n-1}$



Cas où : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 4 + 5\,(0.2)^n$

- **3 pts : 1 pt pour (v_n) décroissante, 1 pt pour (v_n) convergente, 1 pt pour $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.**

c) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $v_n \geqslant \dfrac{u_n}{2}$ et $v_{2n} \leqslant \dfrac{n+1}{2(2n+1)}\, v_n + \dfrac{3n+1}{4(2n+1)}\, u_{n+1}$.

- **1 pt : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ u_k \geqslant u_n$**
- **1 pt : $v_n \geqslant \dfrac{1}{n(n+1)} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\, u_n$**
- **1 pt : $\dfrac{1}{n(n+1)} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\, u_n = \dfrac{n}{2}$**
- **2 pts : $v_{2n} = \dfrac{n+1}{2\,(2n+1)}\, v_n + \dfrac{1}{2n(2n+1)} \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} k\, u_k$**
- **1 pt : $\dfrac{1}{2n(2n+1)} \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} k\, u_k \leqslant \dfrac{1}{2n(2n+1)} \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} k\, u_{n+1}$**
- **1 pt : $\dfrac{1}{2n(2n+1)} \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} k\, u_{n+1} = \dfrac{3n+1}{4\,(2n+1)}\, u_{n+1}$**

d) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $(n+2)v_{n+1} = nv_n + u_{n+1}$ puis $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n}\,(u_{n+1} - 2v_{n+1})$.

- **1 pt : $(n+2)v_{n+1} = n\, v_n + u_{n+1}$**
- **1 pt : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n}(u_{n+1} - 2v_{n+1})$**

e) Démontrer toutes les conjectures faites à la question *2.b)*.

- **1 pt : (v_n) décroissante (utilisation *2.d)* et *2.c)*)**
- **1 pt : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \geqslant 0$**
- **1 pt : (v_n) converge**
- **3 pts : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ (1 pt pour $\geqslant$, 2 pts pour $\leqslant$)**

3. On suppose dans cette question uniquement que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

a) Montrer : $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{n=1}^{N} v_n = \sum\limits_{k=1}^{N} u_k - N\, v_N$.

Indication : on pourra penser à effectuer une interversion de sommes.

- 1 pt : $\sum\limits_{n=1}^{N} \sum\limits_{k=1}^{n} = \sum\limits_{k=1}^{N} \sum\limits_{n=k}^{N}$

- 2 pts : $\sum\limits_{n=k}^{N} \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{N+1}$ **(1 pt pour DES, 1 pt pour télescopage)**

- 1 pt : $\forall N \in \mathbb{N}^*$**,** $\sum\limits_{n=1}^{N} v_n = \sum\limits_{k=1}^{N} u_k - N\, v_N$

b) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ converge.

- 1 pt : $\sum\limits_{n=1}^{N} v_n \leqslant \sum\limits_{k=1}^{N} u_k$

- 1 pt : $\sum\limits_{n=1}^{N} v_n \leqslant \sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k$

- 1 pt : $\left(\sum\limits_{n=1}^{N} v_n\right)$ **croissante**

c) Montrer ensuite que $N\, v_N$ tend vers une limite finie lorsque l'entier N tend vers $+\infty$, puis en raisonnant par l'absurde, montrer que cette limite est nulle.

- 1 pt : $(N\, v_N)$ **converge**

- 1 pt : $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ell_0}{n}$

- 2 pt : $\sum v_n$ **diverge par critère d'équivalence des SATP (1 pt pour positivité, 1 pt pour divergence série harmonique)**

d) En déduire : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$.

- 1 pt

4. On considère dans cette question une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

a) Justifier qu'il existe une variable aléatoire Z, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([Z=n]) \ = \ \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\, \mathbb{P}([Y=k])$$

- 1 pt : $\forall n \in \mathbb{N}^*$**,** $v_n \geqslant 0$

- 1 pt : $\sum u_n$ **converge et** $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k = 1$

- 1 pt : $\sum v_n$ **converge et** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n = 1$

b) On suppose dans cette question que Y admet une espérance, notée $\mathbb{E}(Y)$.
Montrer : $\mathbb{P}([Z = n]) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathbb{E}(Y)}{n^2}$. La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ?

- **1 pt :** $\mathbb{E}(Y) > 0$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Z = n]) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathbb{E}(Y)}{n^2}$
- **1 pt : convergence absolue**
- **2 pts : critère d'équivalence des SATP (1 pt pour positivité, 1 pt pour reste)**

Problème /62

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Étude de fonction /15

1. a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

- **1 pt : continuité sur** $]-\infty, 0[$ **et sur** $]0, +\infty[$
- **1 pt : continuité en** 0

b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

- **1 pt :** $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{(1-x)\,\mathrm{e}^x - 1}{(\mathrm{e}^x - 1)^2}$

On admettra pour la suite que $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$ et que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. a) Étudier les variations de l'application $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par :

$$u : x \mapsto (1-x)\,\mathrm{e}^x - 1$$

- **1 pt :** u **dérivable sur** $\mathbb{R}$ **et** $\forall x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = -x\,\mathrm{e}^x$ **(0 s'il n'est pas fait mention de la dérivabilité de** u**)**
- **1 pt : variations de** u

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $u'(x)$		$+$		$-$	
Variations de u	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

b) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0$.

- **1 pt :** $\forall x \in \mathbb{R}$**,** $u(x) \leqslant 0$
- **1 pt :** $\forall x \in \mathbb{R}^*$**,** $f'(x) < 0$
- **1 pt :** $f'(0) = -\dfrac{1}{2} < 0$

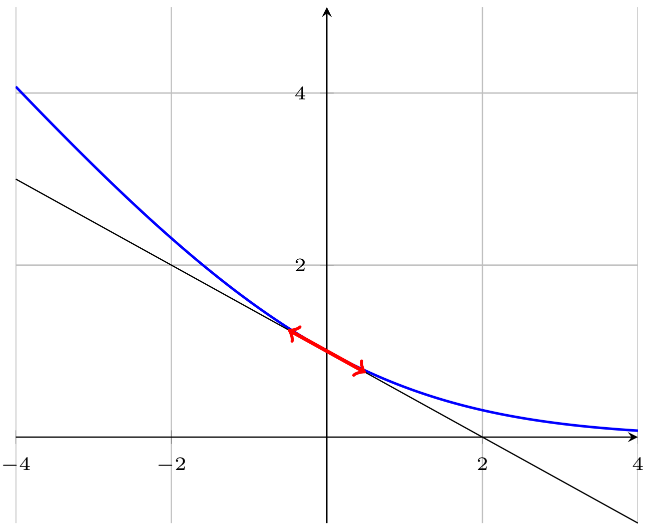
c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
Dresser le tableau de variations de f.

- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
- **1 pt : TV**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$		$-$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

d) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

- **4 pts : 1 pt pour tangente en** 0**, 2 pts pour cohérence courbe, 1 pt propreté**



Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f /25

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. Montrer que f admet un point fixe et un seul, noté α, que l'on calculera.

- **1 pt : 0 n'est pas solution**
- **1 pt : $\alpha = \ln(2)$ seule solution sur $\mathbb{R}^*$**

4. ***a)*** Établir : $\forall x \in [0, +\infty[,\ \mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0$.

- **1 pt : $g : x \mapsto \mathrm{e}^{2x} - 2x\,\mathrm{e}^x - 1$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2\mathrm{e}^x\,(\mathrm{e}^x - 1 - x)$**
- **2 pts : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$ (1 pt pour convexité, 1 pt pour tangente en 0)**

b) Montrer : $\forall x \in\ ]0, +\infty[,\ f'(x) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^x - 1}{2(\mathrm{e}^x - 1)^2}$.

- **1 pt**

c) Montrer : $\forall x \in [0, +\infty[,\ -\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0$.

- **1 pt : $\forall x \in [0, +\infty[$, $f'(x) < 0$**
- **1 pt : $f'(0) \geqslant -\dfrac{1}{2}$**
- **1 pt : $\forall x \in\ ]0, +\infty[$, $f'(x) \geqslant -\dfrac{1}{2}$**

d) Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

- **5 pts : IAF (2 pts hypothèses, 1 pt IAF, 2 pts $(u_n, \alpha) \in [0, +\infty[^2$)**

5. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}(1 - \alpha)$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

6. Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

- **1 pt**

7. Écrire un programme en **Python** qui calcule et affiche le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$.

- **4 pts : 1 pt initialisation, 2 pts boucle while, 1 pt disp**

```
n = 0
u = 1
while abs(u - np.log(2)) >= 10**(-9) :
    u = u / (np.exp(u) - 1)
    n = n + 1
print(n)
```

8. Si on ne connaissait pas la valeur de α, comment aurait-on pu déterminer un entier n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$? Écrire l'appel correspondant en **Python**.

- **3 pts : 2 pts $N = \left\lceil \dfrac{9\ln(10)}{\ln(2)} \right\rceil$, 1 pt** `np.ceil(9 * np.log(10) / np.log(2))`

Étude d'une fonction définie par une intégrale /15

On note $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$G : x \mapsto \int_x^{2x} f(t)\ dt.$$

9. Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G'(x) = \begin{cases} \dfrac{x(3-\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^{2x}-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- **1 pt :** f **continue sur** $\mathbb{R}$ **donc admet une primitive** F **de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $\mathbb{R}$
- **1 pt :** $G(x) = F(2x) - F(x)$
- **1 pt :** G **de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $\mathbb{R}$
- **1 pt :** $G'(x) = 2\,f(2x) - f(x)$
- **1 pt :** $G' : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x(3-\mathbf{e}^x)}{\mathbf{e}^{2x}-1} & \textbf{si } x \neq 0 \\ 1 & \textbf{si } x = 0 \end{cases}$

10. ***a)*** Montrer : $\forall x \in [0, +\infty[,\ 0 \leqslant G(x) \leqslant x f(x)$.

En déduire la limite de G en $+\infty$.

- **1 pt :** $\forall x \in [x, 2x]$**,** $0 \leqslant f(t) \leqslant f(x)$
- **2 pts :** $0 \leqslant G(x) \leqslant x\,f(x)$ **(dont 1 pt pour** $x \leqslant 2x$ **car** $x \geqslant 0$**)**
- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 0$

b) Montrer : $\forall x \in\ ]-\infty, 0],\ G(x) \leqslant x f(x)$.

En déduire la limite de G en $-\infty$.

- **1 pt :** $\forall x \in [2x, x]$**,** $f(t) \geqslant f(x)$
- **2 pts :** $G(x) \leqslant x\,f(x)$ **(dont 1 pt pour** $2x \leqslant x$ **car** $x \leqslant 0$**)**
- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = -\infty$

11. Dresser le tableau de variations de G. On n'essaiera pas de calculer $G\big(\ln(3)\big)$.

- **2 pts**

x	$-\infty$		$\ln(3)$		$+\infty$
Signe de $G'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de G	$-\infty$	$\nearrow$	$G(\ln(3))$	$\searrow$	0