# DS1 (version B)

## Exercice 1

***1.*** Dans cette question, on considère les matrices $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et le produit matriciel $M = CL$.

***a) (i)*** Calculer $M$ et $M^2$.

***(ii)*** Déterminer le rang de $M$.

***(iii)*** La matrice $M$ est-elle diagonalisable ?

***b)*** Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que la matrice $P$ est inversible et calculer le produit $P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

***c)*** Trouver une matrice inversible $Q$ dont la transposée ${}^tQ$ vérifie : ${}^tQ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

***d)*** Pour une telle matrice $Q$, calculer le produit $P\,M\,Q$.

***2.*** La fonction **Python** suivante permet de multiplier la $i^{\text{ème}}$ ligne $L_i$ d'une matrice $A$ par une réel sans modifier ses autres lignes, c'est-à-dire de lui appliquer l'opération élémentaire $L_i \leftarrow a\,L_i$ (où $a \neq 0$).
*(Pour l'explication des fonctions et instances **Python**, on pourra se reporter à l'annexe en fin de sujet)*

```
def multilig(a, i, A) :
    [n, p] = A.shape
    B = np.copy(A)
    for j in range(p) :
        B[i, j] = a * B[i,j]
    return B
```

***a)*** Donner le code **Python** de deux fonctions `adlig` (d'arguments `b`, `i`, `j`, `A`) et `echlig` (d'arguments `i`, `j`, `A`) permettant d'effectuer respectivement les autres opérations sur les lignes d'une matrice :

$$Li \leftarrow L_i + b\,L_j \ (i \neq j) \qquad \text{et} \qquad L_i \leftrightarrow L_j \ (i \neq j)$$

***b)*** Expliquer pourquoi la fonction `multligmat` suivante retourne le même résultat `B` que la fonction `multlig`.

```
def multiligmat(a, i, A) :
    [n, p] = A.shape
    D = np.eye(n)
    D[i, i] = a
    B = np.dot(D, A)
    return B
```

***3.*** Dans cette question, on note $n$ un entier supérieur ou égal à 2 et $M$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1. Pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à l'intersection de sa $i^{\text{ème}}$ ligne et de sa $j^{\text{ème}}$ colonne, et qui vaut 1.

***a) (i)*** Justifier l'existence d'une matrice colonne non nulle $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et d'une matrice ligne non nulle $L_1 = (l_1 \quad \ldots \quad l_n) \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telles que $M = CL$.

***(ii)*** Calculer la matrice $M\,C$ et en déduire une valeur propre de $M$.

***(iii)*** Montrer que si le réel $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i\, l_i$ est différent de 0, alors la matrice $M$ est diagonalisable.

***b) (i)*** À l'aide de l'égalité $M = C\,L$, établir l'existence de deux matrices inversibles $P$ et $Q$ telles que $P\,M\,Q = E_{1,1}$.

***(ii)*** En déduire que pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, il existe deux matrices inversibles $P_i$ et $Q_j$ telles que $P_i\,M\,Q_j = E_{i,j}$.

## Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

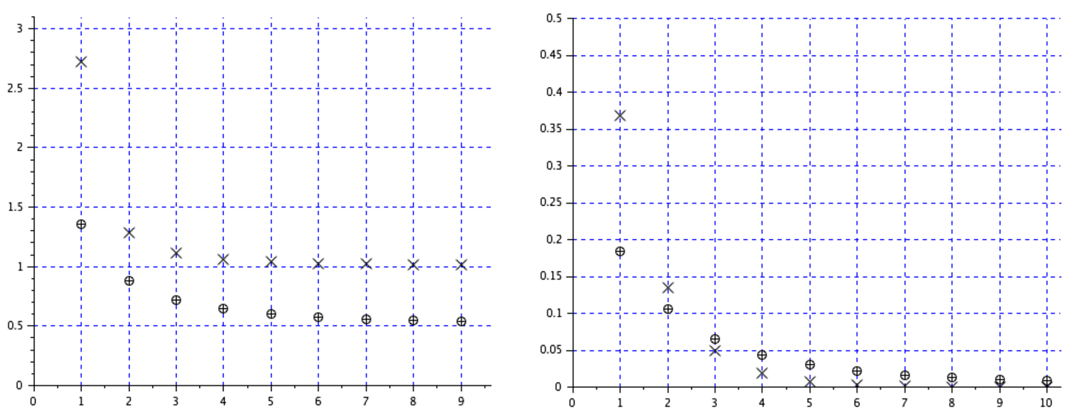
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\, u_k$$

***1.*** On suppose que l'on dispose d'une fonction **Python** d'en-tête `def suite_u(n)` qui prend en argument un entier $n$ de $\mathbb{N}^*$ et qui renvoie la valeur de $u_n$.
En déduire une fonction **Python** d'en-tête `def suite_v(n)` qui prend en argument un entier $n$ de $\mathbb{N}^*$ et qui renvoie la valeur de $v_n$.

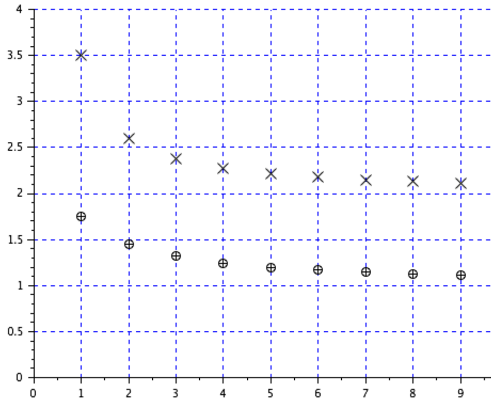
***2.*** On suppose dans cette question uniquement que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

***a)*** Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

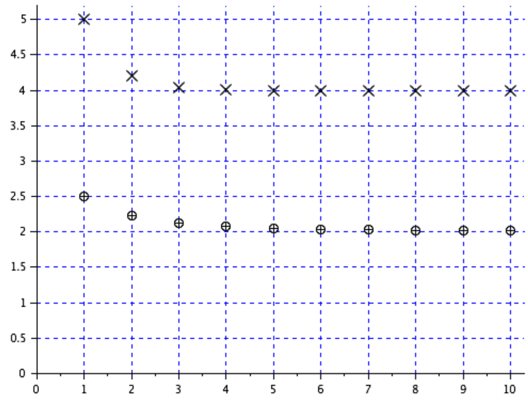
***b)*** Pour différentes suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroissantes, on représente ci-dessous, à l'aide des fonctions `suite_u` et `suite_v`, les premiers termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec le symbole $\times$ et ceux de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec le symbole $\oplus$.
À la vue des graphes suivants, quelles conjectures peut-on faire sur la monotonie, la convergence et la valeur de la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en fonction de celle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ?




Cas où : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \mathrm{e}^{1/n^2}$ Cas où : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \mathrm{e}^{-n}$




Cas où : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{6n+1}{3n-1}$




Cas où : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 4 + 5\,(0.2)^n$

***c)*** Montrer, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ : $v_n \geqslant \dfrac{u_n}{2}$ et $v_{2n} \leqslant \dfrac{n+1}{2(2n+1)}\, v_n + \dfrac{3n+1}{4(2n+1)}\, u_{n+1}$.

***d)*** Montrer, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ : $(n+2)v_{n+1} = nv_n + u_{n+1}$ puis $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n}\,(u_{n+1} - 2v_{n+1})$.

***e)*** Démontrer toutes les conjectures faites à la question ***2.b)***.

***3.*** On suppose dans cette question uniquement que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ converge.

***a)*** Montrer : $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{n=1}^{N} v_n = \sum\limits_{k=1}^{N} u_k - N\, v_N$.

*Indication : on pourra penser à effectuer une interversion de sommes.*

***b)*** En déduire que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} v_n$ converge.

***c)*** Montrer ensuite que $N\, v_N$ tend vers une limite finie lorsque l'entier $N$ tend vers $+\infty$, puis en raisonnant par l'absurde, montrer que cette limite est nulle.

***d)*** En déduire : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$.

***4.*** On considère dans cette question une variable aléatoire $Y$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

***a)*** Justifier qu'il existe une variable aléatoire $Z$, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([Z = n]) = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\, \mathbb{P}([Y = k])$$

***b)*** On suppose dans cette question que $Y$ admet une espérance, notée $\mathbb{E}(Y)$.

Montrer : $\mathbb{P}([Z = n]) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\mathbb{E}(Y)}{n^2}$. La variable aléatoire $Z$ admet-elle une espérance ?

# Problème

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

## Étude de fonction

***1.*** ***a)*** Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

***b)*** Justifier que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$.

On admettra pour la suite que $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$ et que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

***2.*** ***a)*** Étudier les variations de l'application $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par :

$$u : x \mapsto (1 - x)\,\mathrm{e}^x - 1$$

***b)*** Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0$.

***c)*** Déterminer les limites de $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
Dresser le tableau de variations de $f$.

***d)*** Tracer l'allure de la courbe représentative de $f$.

## Étude d'une suite récurrente associée à la fonction $f$

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_{n+1} = f(u_n)$.

***3.*** Montrer que $f$ admet un point fixe et un seul, noté $\alpha$, que l'on calculera.

***4.*** ***a)*** Établir : $\forall x \in [0, +\infty[,\ \mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0$.

***b)*** Montrer : $\forall x \in ]0, +\infty[,\ f'(x) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^x - 1}{2(\mathrm{e}^x - 1)^2}$.

***c)*** Montrer : $\forall x \in [0, +\infty[,\ -\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0$.

***d)*** Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

***5.*** En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}(1 - \alpha)$.

***6.*** Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\alpha$.

***7.*** Écrire un programme en **Python** qui calcule et affiche le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$.

***8.*** Si on ne connaissait pas la valeur de $\alpha$, comment aurait-on pu déterminer un entier $n$ tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$ ? Écrire l'appel correspondant en **Python**.

## Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$G : x \mapsto \int_x^{2x} f(t)\ dt.$$

***9.*** Montrer que $G$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$G'(x) = \begin{cases} \dfrac{x(3-\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^{2x}-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

***10.*** ***a)*** Montrer : $\forall x \in [0, +\infty[,\ 0 \leqslant G(x) \leqslant x f(x)$.

En déduire la limite de $G$ en $+\infty$.

***b)*** Montrer : $\forall x \in\ ]-\infty, 0],\ G(x) \leqslant x f(x)$.

En déduire la limite de $G$ en $-\infty$.

***11.*** Dresser le tableau de variations de $G$. On n'essaiera pas de calculer $G\big(\ln(3)\big)$.

**Aide Python.**

- Si la variable `A` est une matrice, alors la commande `A.shape` renvoie une liste à 2 éléments, dont le 1er est le nombre de lignes de `A`, et le 2ème le nombre de colonnes de `A`.
- La fonction `np.copy` prend en argument une variable et renvoie une copie indépendante de cette variable.
- La fonction `np.eye` prend en paramètre un entier `n` et renvoie la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ : $I_n$.
- Si les variables `A` et `B` sont des matrices, alors la commande `np.dot(A, B)` renvoie le produit des matrices `A` et `B`.