DS1 (version A)

Exercice 1 (inspiré de EDHEC 2016)

On désigne par id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. a) Calculer $(A+I)^2$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$A + I = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

- Ainsi :

$$(A+I)^2 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(A+I)^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}}$$

□

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $(A+I)^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Or :

$$(A+I)^2 = A^2 + 2\,A + I \quad \textit{(car les matrices A et I commutent)}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rl} & A^2 + 2\,A + I = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\ \text{donc} & A^2 + 2\,A = -I \\ \text{et} & A\,(A + 2\,I) = -I \\ \text{ainsi} & A\,(-(A+2\,I)) = I \end{array}$$

On en déduit que la matrice A est inversible, d'inverse $-(A + 2\,I)$.

$$\boxed{A^{-1} = -A - 2\,I}$$

□

2. On note $F = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\}$.

a) Résoudre l'équation $AX = -X$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Démonstration.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
AX = -X \quad & \Longleftrightarrow \quad (A+I)\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -4\,x & + & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ -2\,x & + & y & - & z & = & 0 \\ 6\,x & - & 3\,y & + & 3\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & - & z & = & 0 \\ -2\,x & + & y & - & z & = & 0 \\ 6\,x & - & 3\,y & + & 3\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3\,L_1}}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow \quad \{ \; z \; = \; -2\,x \; + \; y
\end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
F \quad & = \quad \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z = -2\,x + y \right\} \\
& = \quad \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2\,x + y \end{pmatrix} \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
& = \quad \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \; = \; \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

Commentaire

- Lors de la résolution du système, on choisit d'exprimer la variable z en fonction des variables x et y. Ces deux dernières variables sont alors appelées variables auxiliaires.
- Il était possible de faire d'autres choix. Par exemple :

  $$AX = -X \quad \Leftrightarrow \quad y \; = \; 2\,x + z$$

  On obtient alors l'expression de F suivante : $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

  Notons au passage : $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

  (il suffit de remplacer le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ par la combinaison linéaire $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$)

$\square$

b) En déduire que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de F.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

$$\boxed{\text{L'ensemble } F \text{ est donc un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$$

- La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$:
  - × engendre F,
  - × est libre car est constituée uniquement de deux vecteurs non colinéaires.

  C'est donc une base de F.

$$\boxed{\text{La famille } \left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) \text{ est une base de l'espace vectoriel } G.}$$

□

3. On note $P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & -1\\-2 & 1 & -2\end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.

Démonstration.

- On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & -1\\-2 & 1 & -2\end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right.$$

On effectue l'opération $\{ L_3 \leftarrow L_3 + 2\,L_1$. On obtient :

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & -1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\2 & 0 & 1\end{pmatrix}\right.$$

On effectue l'opération $\{ L_3 \leftarrow L_3 - L_2$. On obtient :

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\2 & -1 & 1\end{pmatrix}\right.$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure. De plus, ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Ainsi cette réduite est inversible et il en est de même de la matrice initiale P.

- On effectue les opérations $\left\{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array}\right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\2 & 0 & 1\\2 & -1 & 1\end{pmatrix}\right.$$

$$\boxed{\text{Finalement : } P^{-1} = \begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\2 & 0 & 1\\2 & -1 & 1\end{pmatrix}.}$$

Commentaire

On remarque que les deux premières colonnes de la matrice P ne sont autres que les vecteurs de la famille $\mathcal{F}$. C'est ce choix qui permet d'exprimer par la suite la matrice A sous une forme plus simple. On en reparlera dans le chapitre « Réduction ». □

b) Montrer que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

- Notons tout d'abord :

$$AP = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

- Enfin :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = T$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } P^{-1}AP = T.}$$

□

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ P^{-1}A^nP = T^n$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : P^{-1}A^nP = T^n$.

▶ **Initialisation**

- D'une part : $P^{-1}A^0P = P^{-1}IP = P^{-1}P = I$.
- D'autre part : $T^0 = I$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

▶ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $P^{-1}A^{n+1}P = T^{n+1}$).

$$\begin{aligned} T^{n+1} &= T \times T^n \\ &= P^{-1}AP \times P^{-1}A^nP && \textit{(d'après la question précédente et par hypothèse de récurrence)} \\ &= P^{-1}A(PP^{-1})A^nP \\ &= P^{-1}AIA^nP = P^{-1}A^{n+1}P \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ P^{-1}A^nP = T^n.}$$

□

4. a) Exhiber une matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = -I + N$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{D'après l'énoncé, } N \;=\; T + I \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $N^2 \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- On en déduit, par une récurrence immédiate, que pour tout $k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{\text{En conclusion : } N^0 = I,\ N^1 = N \text{ et pour tout } k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}.}$$

Commentaire

- Au lieu de procéder par récurrence, il est aussi possible d'écrire, pour tout $k \geqslant 2$:
$$N^k \;=\; N^{k-2} \times N^2 \;=\; N^{k-2} \times 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \;=\; 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$
- Insistons sur le fait que cette démonstration n'est valable que si $k \geqslant 2$ (si ce n'est pas le cas, alors $k - 2 < 0$).

□

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.
Le résultat devra faire apparaître T^n comme combinaison linéaire de I et de N.

Démonstration.

- Les matrices $(-I)$ et N commutent car la matrice identité commute avec toutes les matrices carrées du même ordre. On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton.
- Soit $n \geqslant 1$.

$$\begin{array}{rcll}
T^n & = & (-I + N)^n & \\
& = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-I)^{n-k}\, N^k & \\
& = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\ I^{n-k}\, N^k \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\ I\, N^k & \textit{(car : } \forall j \in \mathbb{N},\ I^j = I\textit{)} \\
& = & \displaystyle\sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\, N^k + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\, N^k & \textit{(ce découpage est valable car } n \geqslant 1\textit{)} \\
& = & \displaystyle\sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\, N^k & \textit{(car on a montré : } \forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\textit{)} \\
& = & \displaystyle\binom{n}{0} (-1)^{n}\, N^0 + \binom{n}{1} (-1)^{n-1}\, N^1 & \\
& = & (-1)^n\, I + n\, (-1)^{n-1}\, N & \\
& = & (-1)^n\, (I + (-1)^{-1}\, n\, N) \;=\; (-1)^n\, (I - n\, N) &
\end{array}$$

- Enfin : $(-1)^0 \, (I - 0 \cdot N) = I$ et $T^0 = I$.
  La formule précédente reste valable pour $n = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ T^n = (-1)^n \, (I - n\, N).}$$

Commentaire

- La relation de Chasles stipule que pour tout $(m, p, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leqslant p \leqslant n$:

$$\sum_{k=m}^{n} u_k \ = \ \sum_{k=m}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$

  (la seconde somme est nulle si $p = n$)
  où (u_n) est une suite quelconque de réels ou de matrices de même taille.
- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 0$ et $p = 1$.
  L'argument $n \geqslant 1$ est donc nécessaire pour découper la somme.
  Le cas $n = 0$ doit alors être traité à part.
- Ici, la matrice N vérifie : $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Elle est dite nilpotente d'indice 2 (ce terme n'est pas au programme et il est préférable de ne pas l'utiliser dans une copie). Si elle avait été nilpotente d'ordre 3, il aurait fallu traiter à part les cas $n = 0$ mais aussi le cas $n = 1$.
- Cette question sur le binôme de Newton matriciel est extrêmement classique aux concours et il faut donc savoir parfaitement la traiter.

□

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer enfin T^n comme combinaison linéaire de I et de T.

Démonstration.
Comme $N = T + I$, on obtient :

$$(-1)^n \, (I - n\, N) \ = \ (-1)^n \left(I - n\,(T + I)\right) \ = \ (-1)^n \left((1-n)\, I - n\, T\right) \ = \ (-1)^n \left(-(n-1)\, I - n\, T\right)$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ \ T^n = (-1)^{n+1} \left((n-1)\, I + n\, T\right).}$$

□

5. ***a)*** Expliquer pourquoi l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = (-1)^{n+1} \left((n-1)\, I + n\, A\right)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, $T^n = (-1)^{n+1} \left((n-1)\, I + n\, T\right)$.
Or : $A^n = P \ T^n \ P^{-1}$. En combinant ces deux informations, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} A^n & = & P \ T^n \ P^{-1} \ = \ P \ \Big((-1)^{n+1} \left((n-1)\, I + n\, T\right)\Big) \ P^{-1} \\ & = & (-1)^{n+1} \left((n-1)\, P P^{-1} + n\, P T P^{-1}\right) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^n = (-1)^{n+1} \left((n-1)\, I + n\, A\right).}$$

□

b) Vérifier que la formule trouvée à la question ***5.a)*** reste valable pour $n = -1$.

Démonstration.
Si $n = -1$, on obtient :

$$\begin{aligned}(-1)^{n+1}\big((n-1)\,I + n\,A\big) &= (-1)^{-1+1}\big((-1-1)\,I + (-1)\,A\big) \\ &= (-2\,I - A) \ = \ -A - 2\,I\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la formule trouvée à la question } \textbf{\textit{5.a)}} \text{ reste valable pour } n = -1.}$$

$\square$

Exercice 2

1. Quelle est la nature des séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{n+1}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{(n+1)^2}$?

Démonstration.

- Tout d'abord :
  - × $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n+1} \geqslant 0$.
  - × $\dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
  - × La série $\sum \dfrac{1}{n}$ est une série de Riemann d'exposant 1 $(1 \not> 1)$.
    Elle est donc divergente.

$$\boxed{\text{Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série } \sum \frac{1}{n+1} \text{ diverge.}}$$

- Ensuite :
  - × $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0$.
  - × $\dfrac{1}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.
  - × La série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant 2 $(2 > 1)$.
    Elle est donc convergente.

$$\boxed{\text{Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série } \sum \frac{1}{(n+1)^2} \text{ converge.}}$$

$\square$

2. Écrire une fonction **Python** qui prend en paramètre un entier `n` et renvoie $S_{\mathtt{n}} = \sum\limits_{k=0}^{\mathtt{n}} \dfrac{1}{(k+1)^2}$, somme partielle d'ordre `n` de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

Démonstration.

```python
def somme(n) :
    S = 0
    for k in range(n+1) :
        S = S + 1 / (k+1)**2
    return S
```

Détaillons les éléments de ce programme.

- **Début du programme**
  Conformément à l'énoncé, on commence par préciser la structure de la fonction :
  - × cette fonction se nomme `somme`,
  - × elle prend en paramètre la variable `n`,
  - × elle admet pour variable de sortie la variable `S`.

```
1 def somme(n) :
```

```
5     return S
```

On initialise ensuite la variable `S` à 0 (choix naturel d'initialisation lorsqu'on souhaite coder une somme puisque 0 est l'élément neutre de l'opérateur de sommation).

```
2     S = 0
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 3 à 4 consistent à mettre à jour la variable `S` pour qu'elle contienne la quantité $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k+1}$.
  Pour cela, on utilise une structure conditionnelle (boucle for) :

```
3     for k in range(n+1) :
4         S = S + 1 / (k+1)**2
```

- **Fin du programme**
  À l'issue de cette boucle, la variable `S` contient la quantité $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{(k+1)^2}$. □

Commentaire

Il est aussi possible de proposer une fonction tirant parti des fonctionnalités de **Python** :

```
1 def somme(n) :
2     S = [ 1/(k+1)**2 for k in range(n+1) ]
3     S = sum(S)
4     return S
```

Détaillons ces différentes affectations.

- En ligne 2, on crée une liste (stockée dans la variable `S`) contenant les éléments de l'ensemble $\{\dfrac{1}{(k+1)^2} \mid k \in [\![0, n]\!]\}$.

```
2     S = [ 1/(k+1)**2 for k in range(n+1) ]
```

- En ligne 3, on somme les éléments de cette liste pour obtenir la valeur $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{(k+1)^2}$, que l'on stocke encore dans la variable `S`. Pour cela, on utilise l'opérateur `sum` permet de sommer tous les éléments d'une liste.

```
3     S = sum(S)
```

3. On note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs, décroissante et de limite nulle.
Pour tout entier naturel n, on pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k\, a_k, \quad v_n = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k, \quad s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, a_k$$

a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante, et que la suite (v_n) est croissante.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=0}^{2(n+1)} (-1)^k\, a_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k\, a_k \\ &= \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k\, a_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k\, a_k \\ &= \Big(\cancel{\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k}\, a_k + (-1)^{2n+1}\, a_{2n+1} + (-1)^{2n+2}\, a_{2n+2}\Big) - \cancel{\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k}\, a_k \\ &= -a_{2n+1} + a_{2n+2} \qquad \textit{(car } 2n+1 \textit{ impair et } 2n+2 \textit{ pair)} \end{aligned}$$

Comme la suite (a_n) est décroissante, alors : $a_{2n+2} \leqslant a_{2n+1}$, et donc : $a_{2n+2} - a_{2n+1} \leqslant 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n. \text{ La suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$$

Commentaire

La suite (u_n) est définie par :

$$\forall m \in \mathbb{N},\ u_{\boxed{m}} = \sum_{k=0}^{2\boxed{m}} (-1)^k\, a_k$$

L'obtention du terme u_{n+1} ne doit pas poser de problème : il suffit de remplacer la « boîte » $\boxed{m}$ par la « boîte » $\boxed{n+1}$. Mathématiquement, on ne parlera pas de « boîte » $\boxed{n+1}$ mais plutôt de l'expression **parenthésée** $(n+1)$. On agira de même si l'on souhaite obtenir u_{n+2} ou u_{2n} ou u_{2n+1} ...

- De même :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=0}^{2(n+1)+1} (-1)^k\, a_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k\, a_k \\ &= \sum_{k=0}^{2n+3} (-1)^k\, a_k - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k\, a_k \\ &= \Big(\cancel{\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k}\, a_k + (-1)^{2n+2}\, a_{2n+2} + (-1)^{2n+3}\, a_{2n+3}\Big) - \cancel{\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k}\, a_k \\ &= a_{2n+2} - a_{2n+3} \qquad \textit{(car } 2n+2 \textit{ pair et } 2n+3 \textit{ impair)} \end{aligned}$$

Comme la suite (a_n) est décroissante, alors : $a_{2n+2} \geqslant a_{2n+3}$, et donc : $a_{2n+2} - a_{2n+3} \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} \geqslant v_n. \text{ La suite } (v_n) \text{ est croissante.}}$$

□

b) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n \leqslant u_n$.
En déduire que la suite (u_n) admet une limite s et que la suite (v_n) admet la même limite s.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord :
$$\begin{aligned} v_n - u_n &= \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k \\ &= (-1)^{2n+1} a_{2n+1} \\ &= -a_{2n+1} \leqslant 0 \end{aligned}$$
(car (a_n) est une suite de réels positifs)

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant u_n.}$$

- La suite (v_n) étant croissante, on en déduit :
$$\forall n \geqslant 0,\ v_n \geqslant v_0$$
On en déduit, par transitivité : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_0 \leqslant v_n \leqslant u_n$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante et minorée par } v_0. \text{ Elle converge donc vers une limite } \ell_1.}$$

- On raisonne de manière similaire pour (v_n).
La suite (u_n) étant décroissante, on en déduit : $\forall n \geqslant 0,\ u_n \leqslant u_0$.
Puis, par transitivité : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant u_n \leqslant u_0$.

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est croissante et majorée par } u_0. \text{ Elle converge donc vers une limite } \ell_2.}$$

- Il reste à démontrer : $\ell_1 = \ell_2$. Les suites (u_n) et (v_n) étant convergentes, on a :
$$\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n - \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell_2 - \ell_1$$
Finalement :
$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) & = & \displaystyle\lim_{n\to+\infty} -a_{2n+1} \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \ell_2 - \ell_1 & & 0 \end{array}$$
Ainsi, on a bien : $\ell_1 = \ell_2$.

$$\boxed{\text{Les suites } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont donc convergentes vers la même limite que l'on note } s.}$$ □

Commentaire

- On a démontré en question précédente que la suite (u_n) est décroissante et que la suite (v_n) est croissante. De plus, en début de question, on démontre :
$$v_n - u_n = -a_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
Les suite (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes. Ainsi, par le théorème des suites adjacentes, on en déduit que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et de même limite s.
- Dans l'énoncé, on demande de démontrer :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant u_n \quad \text{et pas} \quad \lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$$
Il faut donc comprendre que l'on demande ici de démontrer le théorème des suites adjacentes et non pas de l'utiliser directement. On peut penser que le sujet (qui date de 2005) aurait été formulé différemment avec le programme actuel.

Commentaire

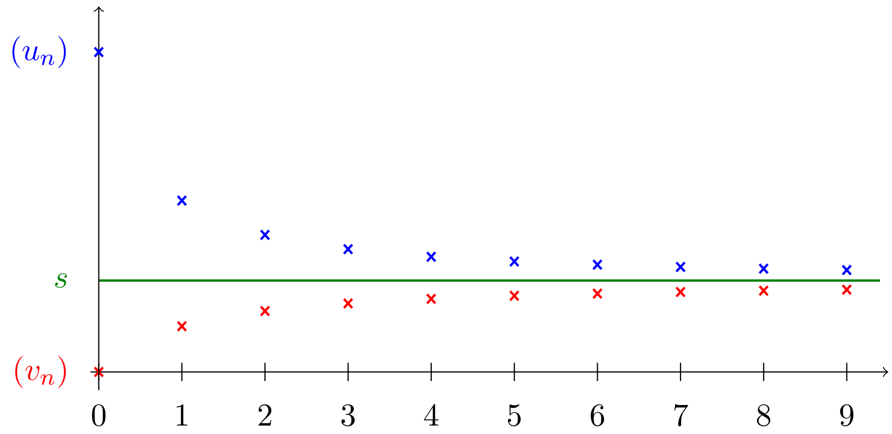
Dans l'énoncé, on considère deux suites adjacentes (u_n) et (v_n).
Plus précisément, elles vérifient :

× (u_n) décroissante,

× (v_n) croissante,

× $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Si l'on essaie de tracer la représentation graphique de suites vérifiant de telles contraintes, on va obtenir le résultat suivant :



Un tel schéma fait naturellement apparaître les deux propriétés que l'énoncé demande de démontrer, à savoir :

× la position relative des deux suites (u_n) et (v_n),

× l'existence de s, limite commune de (u_n) et (v_n).

c) En déduire que la suite (s_n) converge vers s.

Démonstration.
On remarque tout d'abord :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = s_{2n} \quad \text{et} \quad v_n = s_{2n+1}$$

Soit I un intervalle ouvert contenant s.

- Comme $s_{2n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} s$, l'intervalle I contient tous les termes de la suite (s_{2n}) (*i.e.* tous les termes d'indices pairs de la suite (s_n)) sauf un nombre fini d'entre eux.
- Comme $s_{2n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} s$, l'intervalle I contient tous les termes de la suite (s_{2n+1}) (*i.e.* tous les termes d'indices impairs de la suite (s_n)) sauf un nombre fini d'entre eux.

On en déduit que l'intervalle I contient tous les termes de la suite (s_n) sauf un nombre fini d'entre eux.

$$\boxed{\text{Ceci signifie que la suite } (s_n) \text{ est convergente de limite } s.}$$ □

Commentaire

- On démontre dans cette question la propriété, parfois appelée « propriété de recouvrement » :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} s_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} s \\ s_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} s \end{array}\right\} \Rightarrow \ s_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} s}$$

Cette propriété n'apparaît pas dans le programme officiel de la voie ECE.
Il faut donc la redémontrer à chaque utilisation.

- La convergence d'une suite (s_n) vers un réel s admet deux définitions équivalentes.

1) Définition sans les ε :

(s_n) converge vers $s \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ Tout intervalle ouvert contenant s contient tous les termes de la suite (s_n) sauf un nombre fini d'entre eux

C'est la définition donnée par le programme officiel (et celle qu'on a utilisée pour la démonstration).

2) Définition avec les ε :

$$(s_n) \text{ converge vers } s \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |s_n - s| < \varepsilon$$

- On peut aussi effectuer la démonstration précédente à l'aide de cette deuxième définition. Détaillons ce point.
Soit $\varepsilon > 0$.

× $s_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} s$, donc, par définition de la convergence :

il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$: $|s_{2n} - s| \leqslant \varepsilon$.

× $s_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} s$, donc, par définition de la convergence :

il existe un rang $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_2$: $|s_{2n+1} - s| \leqslant \varepsilon$.

On choisit alors $n_0 = \max(2n_1, 2n_2 + 1)$.

$$\boxed{\text{Alors, pour tout } n \geqslant n_0 : |s_n - s| \leqslant \varepsilon.}$$

4. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n a_n$ est convergente.

Démonstration.

$$\boxed{\text{D'après la question } \textbf{\textit{3.c)}}\text{, la suite } (s_n) \text{ des sommes partielles de la série } \sum (-1)^n a_n \text{ converge, donc la série converge.}}$$ □

5. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ est convergente. On note $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k+1}$ sa somme.

Démonstration.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = \dfrac{1}{n+1}$.
La suite (a_n) est une suite de réels strictement positifs, décroissante et de limite nulle.

$$\boxed{\text{D'après la question } \textbf{\textit{4}}\text{, la série } \sum (-1)^n\, a_n \text{ (autrement dit la série } \sum \frac{(-1)^n}{n+1}\text{) est convergente.}}$$ □

6. a) Établir, pour tout réel t positif et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k \ = \ \frac{1}{1+t} - (-1)^n \ \frac{t^n}{1+t}$$

Démonstration.
Soient $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k$$

On reconnaît la somme des termes d'un suite géométrique de raison $-t$. Comme $-t \neq 1$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k \ = \ \frac{1-(-t)^n}{1-(-t)} = \frac{1}{1+t} - \frac{(-t)^n}{1+t} = \frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t}}$$

□

b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \ = \ \ln(2) - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \, dt$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On intègre l'égalité précédente entre 0 et 1.

- D'une part, par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k dt = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 t^k dt = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

- D'autre part, toujours par linéarité :

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t} \right) = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$$

De plus :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \left[\ \ln(|1+t|) \ \right]_0^1 = \ln(|2|) - \ln(|1|) = \ln(2)$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt}$$

□

c) Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \, dt \right| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Démonstration.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$.

- Par inégalité triangulaire, les bornes de l'intégrale étant dans l'ordre croissant :

$$\left| \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \, dt \right| \leqslant \int_0^1 \left| \frac{t^n}{1+t} \right| \, dt$$

- Or : $\left| \dfrac{t^n}{1+t} \right| = \dfrac{|t^n|}{|t+1|} = \dfrac{|t|^n}{|t+1|} = \dfrac{t^n}{t+1}$ car $t > 0$ et $t+1 > 0$.
- De plus, comme $t > 0$, $1 + t > 1$, $\dfrac{1}{t+1} < 1$ et $\dfrac{t^n}{1+t} < t^n$.
- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant, on en déduit :

$$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \, dt < \int_0^1 t^n \, dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Par transitivité, on obtient bien : $\boxed{\left| \int_0^1 \dfrac{t^n}{1+t} \, dt \right| \leqslant \dfrac{1}{n+1}}$.

□

d) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question ***6.c)*** :

$$\left| (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \, dt \right| = |(-1)^n| \left| \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \, dt \right| = \left| \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \, dt \right| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

  On en déduit :

$$-\frac{1}{n+1} \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \, dt \leqslant \frac{1}{n+1}$$

- Or :
  × $-\dfrac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
  × $\dfrac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

  Par théorème d'encadrement, on en déduit : $(-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \, dt \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Tous les objets considérés admettant une limite, on en déduit :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \lim_{n \to +\infty} \ln(2) - \lim_{n \to +\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \, dt = \ln(2)}$$

□

Exercice 3

Soit $p \in]0,1[$. On note $q = 1 - p$. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. Dans cette question (et dans cette question seulement), on suppose que la v.a.r. X suit une loi géométrique de paramètre p.
Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

- On remarque tout d'abord :

$$\mathbb{P}([X > k]) \ = \ 1 - \mathbb{P}\left(\overline{[X > k]}\right) \ = \ 1 - \mathbb{P}([X \leqslant k])$$

- Par ailleurs, comme $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$: $[X \leqslant k] \ = \ \bigcup\limits_{i=1}^{k} [X = i]$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X \leqslant k]) & = & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} [X = i]\right) & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbb{P}([X = i]) & \textit{(par incompatibilité de } [X=1], \ldots, [X=i]\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{k} p\, q^{i-1} \ = \ p \sum\limits_{i=0}^{k-1} q^i & \\ & = & p\, \dfrac{1-q^k}{1-q} & \textit{(car } q \neq 1\textit{)} \\ & = & 1 - q^k & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Enfin : } \mathbb{P}([X > k]) \ = \ 1 - \mathbb{P}([X \leqslant k]) \ = \ 1 - (1 - q^k) \ = \ q^k.}$$

□

2. On suppose maintenant que X est une v.a.r. **quelconque** qui vérifie : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

a) Démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}([X = k]) \ = \ \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k])$$

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcll} [X > k-1] & = & [X \geqslant k] & \textit{(car } X \textit{ est à valeurs entières)} \\ & = & [X = k] \cup [X > k] & \end{array}$$

Les événements $[X = k]$ et $[X > k]$ sont incompatibles. On en déduit :

$$\mathbb{P}([X > k-1]) = \mathbb{P}([X = k]) + \mathbb{P}([X > k])$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k]).}$$

□

b) Démontrer que la variable aléatoire X suit alors la loi $\mathcal{G}(p)$.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après l'énoncé : $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X = k]) & = & \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k]) & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & q^{k-1} - q^k & \textit{(par hypothèse de la question } \textbf{\textit{1.b)}}\textit{)} \\ & = & q^{k-1}(1-q) \ = \ q^{k-1}p & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } X \text{ suit la loi } \mathcal{G}(p).}$$

□

3. Conclure.

Démonstration.

- D'après la question ***1.a)*** : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \quad \Rightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > k]) = q^k$.
- D'après la question ***1.b)*** : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > k]) = q^k \quad \Rightarrow \quad X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
- Ainsi, si X est une variable à valeurs dans $\mathbb{N}^*$:

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > k]) = q^k$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{On obtient ainsi une nouvelle caractérisation de la loi géométrique, à savoir :} \\ X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \quad \Leftrightarrow \quad \big(\ X(\Omega) \subset \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > k]) = (1-p)^k \ \big) \end{array}}$$

□

Problème

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Étude de fonction

1. a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

- La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ car elle est le quotient $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ où :
  - × $f_1 : x \mapsto x$ est continue sur $]0, +\infty[$ car polynomiale.
  - × $f_2 : x \mapsto e^x - 1$:
    - – est continue sur $]0, +\infty[$,
    - – `NE S'ANNULE PAS` sur $]0, +\infty[$.
- Par un raisonnement analogue, la fonction f est continue sur $]-\infty, 0[$.
  On en conclut que f est continue sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.
- De plus, la fonction f est continue en 0. En effet :
  - × d'une part :
  $$\frac{x}{e^x - 1} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = 1$$
  - × d'autre part : $f(0) = 1$.

  Ainsi, on obtient bien : $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

$$\boxed{\text{On en conclut que } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

□

b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Démonstration.

- Par un raisonnement similaire à celui de la question précédente (on remplace « continue » par « de classe $\mathcal{C}^1$ »), on obtient que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.
- Soit $x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{(e^x - 1) - x\, e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{(1 - x)\, e^x - 1}{(e^x - 1)^2}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \ f'(x) = \frac{(e^x - 1) - x\, e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{(1 - x)\, e^x - 1}{(e^x - 1)^2}}$$

□

On admettra pour la suite que $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$ et que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. a) Étudier les variations de l'application $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par :

$$u : x \mapsto (1-x)\,\mathrm{e}^x - 1$$

Démonstration.

- La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$u'(x) = -x\,\mathrm{e}^x$$

Comme $\mathrm{e}^x > 0$, $u'(x)$ est du signe de $-x$.
On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $u'(x)$		$+$		$-$	
Variations de u	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

- Détaillons les éléments de ce tableau.
  - × Tout d'abord : $u(0) \ = \ (1-0)\,\mathrm{e}^0 - 1 \ = \ 1 - 1 \ = \ 0$.
  - × Ensuite, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$u(x) \ = \ (1-x)\,\mathrm{e}^x - 1 \ = \ \mathrm{e}^x - x\,\mathrm{e}^x - 1$$

Or, par croissances comparées : $\lim\limits_{x \to -\infty} x\,\mathrm{e}^x = 0$.

D'où, comme $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$: $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = -1$.

  - × Enfin : $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.

Ainsi : $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = -\infty$. □

b) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{(\mathrm{e}^x - 1)^2}$.
- D'après la question précédente, la fonction u est croissante sur $]-\infty, 0]$ et décroissante sur $]0, +\infty[$. Elle admet donc un maximum en 0. On en déduit, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$u(x) \ \leqslant \ u(0) = 0$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ u(x) \leqslant 0}$$

- Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) \ = \ \frac{u(x)}{(\mathrm{e}^x - 1)^2} < 0$$

En effet : $(\mathrm{e}^x - 1)^2 > 0$ et $u(x) < 0$ sur $\mathbb{R}^*$.

- Enfin, $f'(0) = -\dfrac{1}{2} < 0$ d'après l'énoncé.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0.}$$

□

c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
Dresser le tableau de variations de f.

Démonstration.

- Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$, alors : $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x - 1 = -1$.
  De plus : $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.}$$

- Ensuite :

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x}{e^x}$$

  Or, par croissances comparées : $\dfrac{x}{e^x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.}$$

- Avec la question ***2.b)***, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$		$-$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

$\square$

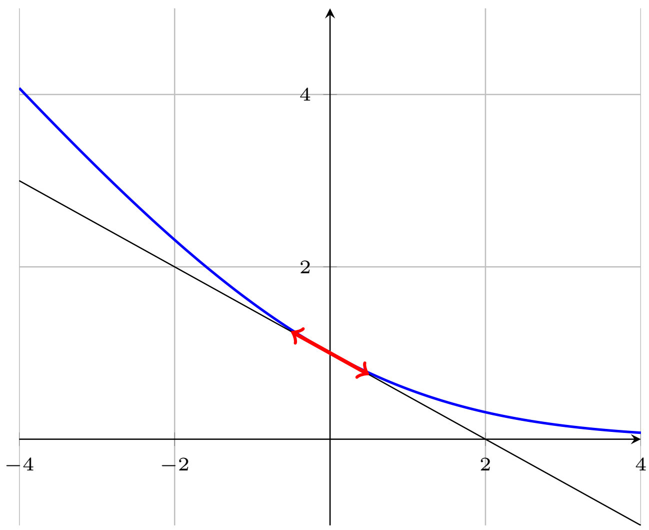
d) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Démonstration.

- Tout d'abord, déterminons l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0.
  Il s'agit de la droite d'équation :

$$\begin{aligned} y &= f(0) + f'(0)(x - 0) \\ &= 1 - \frac{1}{2}\, x \end{aligned}$$

- On obtient le graphe suivant :



Commentaire

- On s'efforcera de traiter les questions de tracé de courbe.
En effet, ce type de question consiste uniquement à faire apparaître sur un graphique toutes les informations qu'on a recueillies dans les questions précédentes.
- Il est indispensable de faire apparaître les tangentes horizontales. Si on a déterminé d'autres tangentes ou des points d'inflexions auparavant, on doit également les faire apparaître.
- On rappelle qu'un tracé de courbe s'effectue toujours de la façon suivante :
  1) placer le ou les points principaux de la courbe représentative de f (ici seulement le point $\big(0, f(0)\big)$).
  2) placer les tangentes à la courbe (ici la tangente à $\mathcal{C}_f$ en le point précédent).
  3) tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ en prenant en compte le sens de variations de f et les limites de f.

  Insistons sur le fait qu'à proximité du point $\big(0, f(0)\big)$, tangente et courbe représentative de f doivent apparaître comme confondues.

□

Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. Montrer que f admet un point fixe et un seul, noté α, que l'on calculera.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

- Si $x \in \mathbb{R}^*$, alors :

$$\begin{aligned} & f(x) = x \\ \Leftrightarrow\ & \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = x \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1} = 1 \qquad \textit{(car } x \neq 0\textit{)} \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{e}^x - 1 = 1 \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{e}^x = 2 \\ \Leftrightarrow\ & x = \ln(2) \end{aligned}$$

- Si $x = 0$, alors : $f(0) = 1$.
On en déduit que 0 n'est pas un point fixe de f.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet pour unique point fixe } \alpha = \ln(2).}$$

□

4. ***a)*** Établir : $\forall x \in [0, +\infty[,\ \mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0$.

Démonstration.

- Considérons la fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^{2x} - 2x\,\mathrm{e}^x - 1$.
La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$g'(x) \ = \ 2\mathrm{e}^x\,(\mathrm{e}^x - 1 - x)$$

Déterminons le signe de $g'(x)$.

× Comme $\mathrm{e}^x > 0$, $g'(x)$ est du signe de $\mathrm{e}^x - 1 - x$.

× Or la fonction $h : x \mapsto \mathrm{e}^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
On en déduit que sa courbe représentative $\mathcal{C}_h$ se situe au-dessus de ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 0. Or cette tangente est la droite d'équation :

$$\begin{array}{rcl} y & = & h(0) + h'(0)(x-0) \\ & = & \mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^0\, x \;=\; 1 + x \end{array}$$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$. D'où :

$$\mathrm{e}^x - 1 - x \;\geqslant 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) \geqslant 0.}$$

- La fonction g est donc croissante. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$g(x) \;\geqslant\; g(0) \;=\; 0$$

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } x \in \mathbb{R}_+,\ \ \mathrm{e}^{2x} - 2x\,\mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0.}$$

□

b) Montrer : $\forall x \in \,]0, +\infty[,\ f'(x) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^x - 1}{2(\mathrm{e}^x - 1)^2}$.

Démonstration.
Soit $x \in \,]0, +\infty[$.

$$\begin{array}{rcl} f'(x) + \dfrac{1}{2} & = & \dfrac{(1-x)\,\mathrm{e}^x - 1}{(\,\mathrm{e}^x - 1)^2} + \dfrac{1}{2} \\[2ex] & = & \dfrac{2(1-x)\,\mathrm{e}^x - 2 + (\,\mathrm{e}^x - 1)^2}{2(\,\mathrm{e}^x - 1)^2} \\[2ex] & = & \dfrac{\cancel{2\,\mathrm{e}^x} - 2x\,\mathrm{e}^x - 2 + \mathrm{e}^{2x} - \cancel{2\,\mathrm{e}^x} + 1}{2(\,\mathrm{e}^x - 1)^2} \\[2ex] & = & \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 2x\,\mathrm{e}^x - 1}{2(\mathrm{e}^x - 1)^2} \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \,]0, +\infty[,\ \ f'(x) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^x - 1}{2(\mathrm{e}^x - 1)^2}.}$$

□

c) Montrer : $\forall x \in [0,+\infty[,\ -\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0$.

Démonstration.
Soit $x \in [0,+\infty[$.

- Tout d'abord, d'après la question ***2.a)*** :
$$f'(x) \ < \ 0$$
- Démontrons : $-\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x)$. Deux cas se présentent :
  - × si $x \neq 0$, alors, d'après la question précédente :
  $$f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^{x} - 1}{2(\mathrm{e}^{x}-1)^2}$$
  Comme $2\,(\mathrm{e}^{x}-1)^2 > 0$, on en déduit que $f'(x) + \dfrac{1}{2}$ est du signe de $g(x)$.
  Or, d'après la question ***2.a)*** : $g(x) \geqslant 0$. On en déduit :
  $$f'(x) + \frac{1}{2} \geqslant 0$$
  - × si $x = 0$, alors :
  $$f'(0) = -\frac{1}{2} \ \geqslant \ -\frac{1}{2}$$

  Finalement : $\forall x \in [0,+\infty[,\ f'(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall x \in [0,+\infty[,\ -\frac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0.}$$

□

d) Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}\,|u_n - \alpha|$.

Démonstration.

- D'après les questions précédentes :
  - × f est dérivable sur $[0,+\infty[$,
  - × $\forall x \in [0,+\infty[,\ |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
  En effet, d'après la question précédente, pour tout $x \in [0,+\infty[$:
  $$\begin{array}{rc} & -\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0 \\ \text{donc} & -\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{2} \\ \text{c'est-à-dire} & |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2} \end{array}$$

  On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis :
  $$\forall (x,y) \in [0,+\infty[^2,\ |f(y) - f(x)| \ \leqslant \ \frac{1}{2}\ |y-x|$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite appliquer cette inégalité à $y = u_n$ et $x = \alpha$.
  Pour cela, vérifions que ces deux termes appartiennent à l'intervalle $[0, +\infty[$.
  × D'après le tableau de variations de la question ***2.c)***, $[0, +\infty[$ est un intervalle stable de f.
  De plus : $u_0 = 1 \geqslant 0$.
  Ainsi, par récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, +\infty[$.
  × D'après la question ***3.*** : $\alpha = \ln(2) \in [0, +\infty[$.
  Soit $n \in \mathbb{N}$.
  En appliquant donc l'inégalité précédente à $y = u_n \in [0, +\infty[$ et $x = \alpha \in [0, +\infty[$, on obtient :
$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}\, |u_n - \alpha|$$
  Or :
  × $f(u_n) = u_{n+1}$, par définition de la suite (u_n),
  × $f(\alpha) = \alpha$, car α est un point fixe de f.
$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}\, |u_n - \alpha|}$$

Commentaire

- La démonstration par récurrence de la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, +\infty[$, n'était pas au coeur de cette question et la simple mention de cette récurrence suffisait sans doute à obtenir la totalité des points alloués à cette question.
- La rédaction de cette dernière aurait été la suivante.
  Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_n \in [0, +\infty[$.
  ▸ **Initialisation** :
  D'après l'énoncé : $u_0 = 1 \in [0, +\infty[$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
  ▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} \in [0, +\infty[$).
  × Par hypothèse de récurrence : $u_n \in [0, +\infty[$.
  × Ainsi, d'après le tableau de variations de la question ***2.c)*** : $f(u_n) \in [0, 1]$.
  Or : $[0, 1] \subset [0, +\infty[$.
  On en déduit : $u_{n+1} = f(u_n) \in [0, +\infty[$.
  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.
  Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, +\infty[$.

□

5. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}(1 - \alpha)$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}\,(1 - \alpha)$.

▸ **Initialisation** :
× D'une part, d'après la question ***3.*** : $\dfrac{1}{2^0}\,(1 - \alpha) = 1 - \ln(2)$.
× D'autre part, comme $u_0 = 1$:
$$|u_0 - \alpha| = |1 - \alpha| = |1 - \ln(2)| = 1 - \ln(2)$$
En effet : $1 - \ln(2) \geqslant 0$.
D'où $\mathcal{P}(0)$.

- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}(1-\alpha)$).
  D'après la question ***2.d)*** :
  $$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$
  Or, par hypothèse de récurrence :
  $$|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}(1-\alpha)$$
  En combinant ces deux résultats, on obtient :
  $$|u_{n+1} - \alpha| \ \leqslant \ \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \ \leqslant \ \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n}(1-\alpha) \ = \ \frac{1}{2^{n+1}}(1-\alpha)$$
  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}(1-\alpha).}$$ □

6. Conclure que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}(1-\alpha)$. Ainsi :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ -\frac{1}{2^n}(1-\alpha) \leqslant |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}(1-\alpha)$$
- Or :
  × $-\dfrac{1}{2^n}(1-\alpha) \to 0$ car $\dfrac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $2^{n+1} \to +\infty$.
  × $\dfrac{1}{2^n}(1-\alpha) \to 0$.

Ainsi, par théorème d'encadrement : $|u_n - \alpha| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ceci équivaut à : $u_n - \alpha \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ est convergente de limite } \alpha.}$$ □

7. Écrire un programme en **Python** qui calcule et affiche le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$.

Démonstration.

```
n = 0
u = 1
while abs(u - np.log(2)) >= 10**(-9) :
    u = u / (np.exp(u) - 1)
    n = n + 1
print(n)
```

Détaillons les éléments de ce programme.

- **Début du programme**
  La variable `n` est initialisée à 0.
  La variable `u`, qui contiendra les valeurs successives de la suite (u_n), est initialisée à $u_0 = 1$.

```
n = 0
u = 1
```

- **Structure itérative**
Les lignes 3 à 5 consistent à déterminer le plus petit entier n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$. On doit donc calculer les valeurs successives de la suite (u_n) jusqu'à ce que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$. Autrement dit, on doit calculer ces valeurs successives tant que $|u_n - \alpha| \geqslant 10^{-9}$. Pour cela, on met en place une structure itérative (while) :

```
3 while abs(u - np.log(2)) >= 10**(-9) :
```

Tant que $|u_n - \alpha| \geqslant 10^{-9}$, on calcule u_{n+1} et on stocke toujours cette valeur dans la variable `u` :

```
4       u = u / (np.exp(u) - 1)
```

On met alors à jour en conséquence la variable `n` : on ajoute 1 pour signaler qu'on a calculé u_{n+1}.

```
5       n = n + 1
```

- **Fin du programme**
À l'issue de cette boucle, la variable `n` contient le plus petit entier n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$. On affiche alors enfin la valeur de la variable `n`.

```
7 print(n)
```

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, proposer un programme **Python** correct démontre la bonne compréhension de ces mécanismes et permet certainement d'obtenir la majorité des points alloués à cette question.
On procèdera de même dans les autres questions **Python**.

□

8. Si on ne connaissait pas la valeur de α, comment aurait-on pu déterminer un entier n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$? Écrire l'appel correspondant en **Python**.

Démonstration.

- On souhaite exhiber $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$|u_n - \alpha| \ < \ 10^{-9}$$

Or, d'après la question ***5.***, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n - \alpha| \ \leqslant \ \frac{1}{2^n}\,(1-\alpha)$$

Comme $\alpha \geqslant 0$, on obtient : $1 - \alpha \leqslant 1$. D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \ \leqslant \ \frac{1}{2^n}\,(1-\alpha) \ \leqslant \ \frac{1}{2^n}$$

- Il suffit alors de trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\dfrac{1}{2^N} \leqslant 10^{-9}$.
Si c'est le cas, on obtient alors par transitivité :

$$|u_N - \alpha| \ \leqslant \ \frac{1}{2^N} \ \leqslant \ 10^{-9}$$

- Déterminons alors un entier N vérifiant : $\dfrac{1}{2^N} \leqslant 10^{-9}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rrcll} & \dfrac{1}{2^n} & \leqslant & 10^{-9} & \\[2ex] \Leftrightarrow & 2^n & \geqslant & 10^9 & \textit{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \\[2ex] \Leftrightarrow & n\ \ln(2) & \geqslant & 9\ \ln(10) & \textit{(par stricte croissance de la fonction } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\[2ex] \Leftrightarrow & n & \geqslant & \dfrac{9\ \ln(10)}{\ln(2)} & \textit{(car } \ln(2) > 0\textit{)} \end{array}$$

L'entier $N = \left\lceil \dfrac{9\ \ln(10)}{\ln(2)} \right\rceil$ convient.

On obtient l'entier cherché par l'appel : `np.ceil(9 * np.log(10) / np.log(2))`.

Commentaire

Si on ne connaît pas α et qu'on souhaite en calculer une approximation à 10^{-9} près, on pourra alors procéder comme suit.

```python
N = np.ceil(9 * np.log(10) / np.log(2))
u = 1
for i in range(N) :
    u = u / (np.exp(u) - 1)
print(u)
```

□

Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$G : x \mapsto \int_x^{2x} f(t)\ dt.$$

9. Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G'(x) = \begin{cases} \dfrac{x(3 - \mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^{2x} - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Démonstration.

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc une primitive F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. On remarque :

$$G(x) = \int_x^{2x} f(t)\ dt = [\ F(t)\ ]_x^{2x} = F(2x) - F(x)$$

La fonction $H : x \mapsto F(2x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car elle est la composée $H = F \circ h$ où :

× $h : x \mapsto 2x$ est :
  - de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,
  - telle que : $h(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.

× F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction } G \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ en tant que somme de fonctions de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcll} G'(x) & = & (F \circ h)'(x) - F'(x) & \\ & = & (F' \circ h)(x) \times h'(x) - F'(x) & \\ & = & F'\big(h(x)\big) \times 2 - F'(x) & \\ & = & 2F'(2x) - F'(x) & \\ & = & 2\,f(2x) - f(x) & \textit{(car } F \textit{ est une primitive de } f\textit{)} \end{array}$$

Deux cas se présentent alors :

× si $x \in \mathbb{R}^*$, alors :

$$\begin{array}{rcl} G'(x) & = & 2\,f(2x) - f(x) \\ & = & \dfrac{4x}{e^{2x}-1} - \dfrac{x}{e^x - 1} \\ & = & \dfrac{4x - x\,(e^x+1)}{e^{2x}-1} \\ & = & \dfrac{x\,(3-e^x)}{e^{2x}-1} \end{array}$$

× si $x = 0$, alors :

$$G'(0) = 2f(2 \times 0) - f(0) = 2\,f(0) - f(0) = 1$$

$$\boxed{\text{Finalement : } G' : x \mapsto \left\{\begin{array}{cl} \dfrac{x(3-e^x)}{e^{2x}-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{array}\right.}$$

□

10. a) Montrer : $\forall x \in [0, +\infty[,\ 0 \leqslant G(x) \leqslant x f(x)$.
En déduire la limite de G en $+\infty$.

Démonstration.

- Soit $x \in [0, +\infty[$.

  × Soit $t \in [x, 2x]$. Alors :

$$\begin{array}{lrcccl} & x & \leqslant & t & \leqslant & 2x \\ \text{donc} & f(x) & \geqslant & f(t) & \geqslant & f(2x) \quad \textit{(par décroissance de } f \textit{ sur } [0,+\infty[\textit{)} \end{array}$$

De plus, d'après le tableau de variations de la question ***2.c)*** : $f(t) \geqslant 0$.
Ainsi, pour tout $t \in [x, 2x]$:

$$0 \leqslant f(t) \leqslant f(x)$$

× Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($x \leqslant 2x$, car $x \geqslant 0$) :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_x^{2x} 0 \, dt & \leqslant & \displaystyle\int_x^{2x} f(t) \, dt & \leqslant & \displaystyle\int_x^{2x} f(x) \, dt \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ 0 & & G(x) & & f(x)(2x - x) \ = \ x\, f(x) \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in [0, +\infty[, \ 0 \leqslant G(x) \leqslant x\, f(x)}$$

Commentaire

On retiendra que l'encadrement / la minoration / la majoration d'une intégrale s'effectue souvent de la façon suivante :

1) encadrement / minoration / majoration de son intégrande,

2) utilisation de la croissance de l'intégrale (pour peu que les bornes soient dans l'ordre croissant).

- On a l'équivalent suivant :

$$x\, f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x^2}{e^x}$$

Or, par croissances comparées : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0$. On en déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\, f(x) = 0$.
On obtient alors :

× $\lim\limits_{x \to +\infty} 0 = 0$,

× $\lim\limits_{x \to +\infty} x\, f(x) = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par théorème d'encadrement : } \lim_{x \to +\infty} G(x) = 0.}$$

□

b) Montrer : $\forall x \in \,] - \infty, 0], \ G(x) \leqslant x\, f(x)$.
En déduire la limite de G en $-\infty$.

Démonstration.

- Soit $x \in] - \infty, 0]$.

× Soit $t \in [2x, x]$. Alors :

$$\begin{array}{lccccc} & 2x & \leqslant & t & \leqslant & x \\ \text{donc} & f(2x) & \geqslant & f(t) & \geqslant & f(x) \end{array} \quad \textit{(par décroissance de } f \textit{ sur } [0, +\infty[\textit{)}$$

× Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($2x \leqslant x$, car $x \leqslant 0$) :

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\int_{2x}^{x} f(t) \, dt & \geqslant & \displaystyle\int_{2x}^{x} f(x) \, dt \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ -\displaystyle\int_x^{2x} f(t) \, dt & & -\displaystyle\int_x^{2x} f(x) \, dt \end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_x^{2x} f(t)\ dt & \leqslant & \displaystyle\int_x^{2x} f(x)\ dt & & \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \\ G(x) & & f(x)(2x-x) & = & x\, f(x) \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \,]-\infty, 0],\ G(x) \leqslant x\, f(x)}$$

- D'après la question ***2.c)*** : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. On en déduit $\lim\limits_{x \to -\infty} x\, f(x) = -\infty$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par théorème de comparaison : } \lim\limits_{x \to -\infty} G(x) = -\infty.}$$

□

11. Dresser le tableau de variations de G. On n'essaiera pas de calculer $G(\ln 3)$.

Démonstration.

- D'après la question ***9*** :

$$G' : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x\,(3 - e^x)}{e^{2x} - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Déterminons, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, le signe de $G'(x)$.
Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

× Étudions le signe de $(3 - e^x)$.

$$\begin{array}{rcll} 3 - e^x \geqslant 0 & \Leftrightarrow & 3 \geqslant e^x & \\ & \Leftrightarrow & \ln(3) \geqslant x & \textit{(par stricte croissance de la fonction } \ln \textit{ sur }]0, +\infty[\textit{)} \end{array}$$

× Étudions le signe de $e^{2x} - 1$.

$$\begin{array}{rcll} e^{2x} - 1 \geqslant 0 & \Leftrightarrow & e^{2x} \geqslant 1 & \\ & \Leftrightarrow & 2x \geqslant 0 & \textit{(par stricte croissance de la fonction } \ln \textit{ sur }]0, +\infty[\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & x \geqslant 0 & \end{array}$$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		$\ln(3)$		$+\infty$
Signe de x		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $3 - e^x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $e^{2x} - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $G'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	

- On obtient enfin le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		$\ln(3)$		$+\infty$
Signe de $G'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de G			$G(\ln(3))$		
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	0

$\square$