DS1 (version A) /146

Exercice 1 /30

On désigne par id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. ***a)*** Calculer $(A+I)^2$.

- **1 pt :** $(A+I)^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

- **1 pt :** $(A+I)^2 = A^2 - 2A + I$
- **1 pt :** $A^{-1} = -A - 2I$

2. On note $F = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\}$.

a) Résoudre l'équation $AX = -X$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- **1 pt : écriture système** $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -4x & + & 2y & - & 2z & = & 0 \\ -2x & + & y & - & z & = & 0 \\ 6x & - & 3y & + & 3z & = & 0 \end{array} \right.$
- **1 pt : résolution système** $\{ z \;=\; -2x + y$
- **1 pt :** $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

b) En déduire que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de F.

- **1 pt : F est un sev**
- **1 pt : famille génératrice de F**
- **1 pt : famille libre**

3. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.

- **3 pts :** $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) Montrer que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- 1 pt pour $P^{-1}A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **ou** $AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $P^{-1}AP = T$

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P^{-1}A^nP = T^n$.

- 1 pt : initialisation

- 2 pts : hérédité

4. a) Exhiber une matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = -I + N$.

- 1 pt : $N = T + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- 1 pt : $N^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$

- 1 pt : récurrence immédiate

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.
Le résultat devra faire apparaître T^n comme combinaison linéaire de I et de N.

- 1 pt : $-I$ **et** N **commutent**

- 1 pt : découpage valable car $n \geqslant 1$

- 1 pt : $\forall k \geqslant 2$**,** $N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$

- 1 pt : $I^{n-k} = I$

- 1 pt : $T^n = (-1)^n(I - n\,N)$

- 1 pt : cas $n = 0$

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer enfin T^n comme combinaison linéaire de I et de T.

- 1 pt : $T^n = (-1)^{n+1}\big((n-1)\,I + n\,T\big)$

5. a) Expliquer pourquoi l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = (-1)^{n+1}\big((n-1)\,I + n\,A\big)$.

- 1 pt

b) Vérifier que la formule trouvée à la question ***5.a)*** reste valable pour $n = -1$.

- 1 pt

Exercice 2 /35

1. Quelle est la nature des séries $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n+1}$ et $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(n+1)^2}$?

- **3 pts : $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n+1}$ diverge (1 pt pour équivalence, 1 pt pour $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ série de Riemann d'exposant 1, 1 pt pour citation du critère)**
- **2 pts : $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(n+1)^2}$ converge (1 pt pour équivalence, 1 pt pour $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ série de Riemann d'exposant 2)**

2. Écrire une fonction **Python** qui prend en paramètre un entier `n` et renvoie $S_{\mathtt{n}} = \sum_{k=0}^{\mathtt{n}} \frac{1}{(k+1)^2}$, somme partielle d'ordre `n` de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(n+1)^2}$.

- **4 pts : 1 pt pour structure de fonction, 1 pt pour initialisation, 2 pts pour boucle for**

3. On note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs, décroissante et de limite nulle.
Pour tout entier naturel n, on pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k, \quad v_n = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k, \quad s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$$

a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante, et que la suite (v_n) est croissante.

- **2 pts : (u_n) décroissante**
- **1 pt : (v_n) croissante**

b) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n \leqslant u_n$.
En déduire que la suite (u_n) admet une limite s et que la suite (v_n) admet la même limite s.

- **2 pts : $v_n \leqslant u_n$ (1 pt pour calcul de $v_n - u_n$, 1 pt pour $a_n > 0$)**
- **2 pts : (u_n) et (v_n) convergent vers s (1 pt pour $\lim_{n\to\infty} v_n - u_n = 0$, 1 pt pour théorème des suites adjacente)**
  On pourra aussi attribuer les 2 pts pour tout autre réponse valide.

c) En déduire que la suite (s_n) converge vers s.

- **3 pts : démonstration de la propriété de recouvrement (1 pt pour l'introduction de l'intervalle ouvert I contenant s, 1 pt pour reconnaître $u_n = s_{2n}$ et $v_n = s_{2n+1}$, 1 pt pour le reste)**

4. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n a_n$ est convergente.

- **1 pt**

5. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ est convergente. On note $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$ sa somme.

- **1 pt**

6. a) Établir, pour tout réel t positif et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k \;=\; \frac{1}{1+t} - (-1)^n \, \frac{t^n}{1+t}$$

- 2 pts (1 s'il manque l'argument $t \neq -1$)

b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \;=\; \ln(2) - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \, dt$$

- 2 pts : $\displaystyle\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \, t^k \; dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}$

- 1 pt : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t} \; dt = \ln(2)$

c) Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \, dt \right| \;\leqslant\; \frac{1}{n+1}$$

- 1 pt : inégalité triangulaire $\displaystyle\left| \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \, dt \right| \leqslant \int_0^1 \left| \frac{t^n}{1+t} \right| \, dt$

- 1 pt : montrer $\dfrac{t^n}{1+t} < t^n$

- 1 pt : croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant

- 1 pt : conclusion

d) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

- 1 pt : utilisation *6.c)*

- 1 pt : théorème d'encadrement

Exercice 3

Soit $p \in]0,1[$. On note $q = 1 - p$. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. Dans cette question (et dans cette question seulement), on suppose que la v.a.r. X suit une loi géométrique de paramètre p.
Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

2. On suppose maintenant que X est une v.a.r. **quelconque** qui vérifie : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

a) Démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}([X = k]) \ = \ \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k])$$

b) Démontrer que la variable aléatoire X suit alors la loi $\mathcal{G}(p)$.

3. Conclure.

Problème /62

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Étude de fonction /15

1. ***a)*** Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

- **1 pt : continuité sur** $]-\infty, 0[$ **et sur** $]0, +\infty[$
- **1 pt : continuité en** 0

b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

- **1 pt :** $\forall x \in \mathbb{R}^*$**,** $f'(x) = \dfrac{(1-x)\, \mathbf{e}^x - 1}{(\mathbf{e}^x - 1)^2}$

On admettra pour la suite que $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$ et que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. ***a)*** Étudier les variations de l'application $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par :

$$u : x \mapsto (1-x)\, e^x - 1$$

- **1 pt :** u **dérivable sur** $\mathbb{R}$ **et** $\forall x \in \mathbb{R}$**,** $u'(x) = -x\, \mathbf{e}^x$ **(0 s'il n'est pas fait mention de la dérivabilité de** u**)**
- **1 pt : variations de** u

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $u'(x)$		$+$		$-$	
Variations de u	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

b) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0$.

- **1 pt :** $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(x) \leqslant 0$
- **1 pt :** $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) < 0$
- **1 pt :** $f'(0) = -\dfrac{1}{2} < 0$

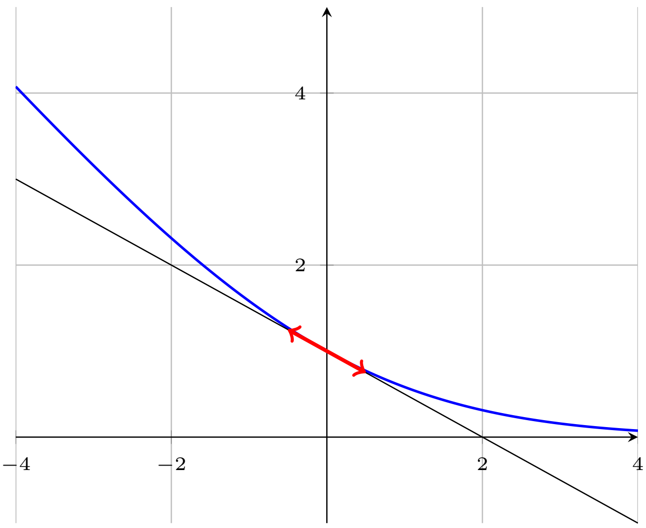
c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
Dresser le tableau de variations de f.

- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
- **1 pt : TV**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$		$-$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

d) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

- **4 pts : 1 pt pour tangente en 0, 2 pts pour cohérence courbe, 1 pt propreté**



Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f /25

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. Montrer que f admet un point fixe et un seul, noté α, que l'on calculera.

- **1 pt : 0 n'est pas solution**
- **1 pt : $\alpha = \ln(2)$ seule solution sur $\mathbb{R}^*$**

4. ***a)*** Établir : $\forall x \in [0, +\infty[,\ \mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0$.

- **1 pt : $g : x \mapsto \mathrm{e}^{2x} - 2x\,\mathrm{e}^x - 1$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2\mathrm{e}^x\,(\mathrm{e}^x - 1 - x)$**
- **2 pts : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$ (1 pt pour convexité, 1 pt pour tangente en 0)**

b) Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[,\ f'(x) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^x - 1}{2(\mathrm{e}^x - 1)^2}$.

- **1 pt**

c) Montrer : $\forall x \in [0, +\infty[,\ -\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0$.

- **1 pt : $\forall x \in [0, +\infty[$, $f'(x) < 0$**
- **1 pt : $f'(0) \geqslant -\dfrac{1}{2}$**
- **1 pt : $\forall x \in]0, +\infty[$, $f'(x) \geqslant -\dfrac{1}{2}$**

d) Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

- **5 pts : IAF (2 pts hypothèses, 1 pt IAF, 2 pts $(u_n, \alpha) \in [0, +\infty[^2$)**

5. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}(1 - \alpha)$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

6. Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

- **1 pt**

7. Écrire un programme en **Python** qui calcule et affiche le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$.

- **4 pts : 1 pt initialisation, 2 pts boucle while, 1 pt disp**

```python
n = 0
u = 1
while abs(u - np.log(2)) >= 10**(-9) :
    u = u / (np.exp(u) - 1)
    n = n + 1
print(n)
```

8. Si on ne connaissait pas la valeur de α, comment aurait-on pu déterminer un entier n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$? Écrire l'appel correspondant en **Python**.

- **3 pts : 2 pts $N = \left\lceil \dfrac{9\ \ln(10)}{\ln(2)} \right\rceil$, 1 pt `np.ceil(9 * np.log(10) / np.log(2))`**

Étude d'une fonction définie par une intégrale /15

On note $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$G : x \mapsto \int_x^{2x} f(t)\ dt.$$

9. Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G'(x) = \begin{cases} \dfrac{x(3-\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^{2x}-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- **1 pt : f continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$**
- **1 pt : $G(x) = F(2x) - F(x)$**
- **1 pt : G de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$**
- **1 pt : $G'(x) = 2\, f(2x) - f(x)$**
- **1 pt : $G' : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x(3-\mathbf{e}^x)}{\mathbf{e}^{2x}-1} & \textbf{si } x \neq 0 \\ 1 & \textbf{si } x = 0 \end{cases}$**

10. a) Montrer : $\forall x \in [0, +\infty[,\ 0 \leqslant G(x) \leqslant x f(x)$.

En déduire la limite de G en $+\infty$.

- **1 pt : $\forall x \in [x, 2x]$, $0 \leqslant f(t) \leqslant f(x)$**
- **2 pts : $0 \leqslant G(x) \leqslant x\, f(x)$ (dont 1 pt pour $x \leqslant 2x$ car $x \geqslant 0$)**
- **1 pt : $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = 0$**

b) Montrer : $\forall x \in\,]-\infty, 0],\ G(x) \leqslant x f(x)$.

En déduire la limite de G en $-\infty$.

- **1 pt : $\forall x \in [2x, x]$, $f(t) \geqslant f(x)$**
- **2 pts : $G(x) \leqslant x\, f(x)$ (dont 1 pt pour $2x \leqslant x$ car $x \leqslant 0$)**
- **1 pt : $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = -\infty$**

11. Dresser le tableau de variations de G. On n'essaiera pas de calculer $G\big(\ln(3)\big)$.

- **2 pts**

x	$-\infty$		$\ln(3)$		$+\infty$
Signe de $G'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de G	$-\infty$	$\nearrow$	$G(\ln(3))$	$\searrow$	0