DS8 (version A)

EXERCICE

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrés à n lignes et n colonnes à coefficients réels et B_n l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 0 ou à 1.

1. *Exemple 1.* Soit A la matrice de B_2 définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer la matrice A^2.

- **1 pt :** $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = I_2$

b) Quelles sont les valeurs propres de A ?

- **1 pt : D'après la question *1.a)*,** $A^2 - I_2 = 0$**. On en déduit que le polynôme** $P(X) = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ **est un polynôme annulateur de** A**.**
- **1 pt :** $\text{Sp}(A) \subset \{-1, 1\}$
- **1 pt :** 1 **est bien valeur propre de** A
- **1 pt :** -1 **est bien valeur propre de** A

c) La matrice A est-elle diagonalisable ?

- **1 pt : La matrice** A **est carrée d'ordre** 2 **et admet** 2 **valeurs propres distinctes donc la matrice** A **est diagonalisable**

2. *Exemple 2.* Soit B la matrice de B_3 définie par : $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère les instructions et la sortie (`ans`) **Scilab** suivantes :

```
B = [0,1,0;1,0,0;0,0,1]
P = [1,1,0;1,-1,0;0,0,1]
inv(P) * B * P
```

```
ans  =
    1.   0.   0.
    0. - 1.   0.
    0.   0.   1.
```

a) Déduire les valeurs propres de B de la séquence **Scilab** précédente.

- **1 pt : Notons** $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **et** $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$**. D'après la séquence Scilab,** $P^{-1}BP = D$**, d'où** $B = PDP^{-1}$
- **1 pt : Ainsi,** B **est semblable à la matrice diagonale** D**. Elle est donc diagonalisable et ses valeurs propres sont les coefficients diagonaux de** D
- **1 pt :** $\text{Sp}(B) = \{-1, 1\}$

b) Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de B.

- **1 pt : La famille** $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ **constituée des colonnes de la matrice** P **est une base de vecteurs propres de** B
- **2 pt :** $E_{-1}(B) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$
- **2 pt :** $E_1(B) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

3. a) Combien existe-t-il de matrices appartenant à B_n ?

- **1 pt : Une matrice** M **de** B_n **est une matrice de** $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ **dont chaque coefficient vaut soit** 0 **soit** 1**. On a** 2 **choix pour chaque coefficient et il y a** n^2 **coefficients**
- **1 pt :** $\text{Card}(B_n) = 2^{n^2}$

b) Combien existe-t-il de matrices de B_n dont chaque ligne et chaque colonne comporte exactement un coefficient égal à 1 ?

- **1 pt : Une matrice** M **de** B_n **dont chaque ligne et chaque colonne comporte exactement un coefficient égal à** 1 **est entièrement déterminée par :**
  - × **la position du** 1 **sur la** $1^{\text{ère}}$ **ligne :** n **possibilités.**
    (on peut le placer sur n'importe quelle colonne)
  - × **la position du** 1 **sur la** $2^{\text{ème}}$ **ligne :** $n-1$ **possibilités.**
    (on peut le placer sur n'importe quelle colonne non déjà choisie)
  - × **la position du** 1 **sur la** $3^{\text{ème}}$ **ligne :** $n-2$ **possibilités.**
    (on peut le placer sur n'importe quelle colonne non déjà choisie)
  - × ...
  - × **la position du** 1 **sur la** $n^{\text{ème}}$ **ligne :** 1 **possibilité.**
    (on peut le placer sur n'importe quelle colonne non déjà choisie)
- **1 pt : L'ensemble des matrices de** B_n **dont chaque ligne et chaque colonne comporte exactement un coefficient égal à** 1 **comporte exactement** $n!$ **éléments**

4. Dans cette question, n est un entier supérieur ou égal à 2.
Soit E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E. On note :
- id l'endomorphisme identité de E ;
- F le noyau de l'endomorphisme $(u + \text{id})$ et G le noyau de l'endomorphisme $(u - \text{id})$;
- p la dimension de F et q la dimension de G.

On suppose que $u \circ u = \text{id}$.

a) Justifier que l'image de $(u - \text{id})$ est incluse dans F.

- **1 pt : Soit** $y \in \text{Im}(u - \text{id})$**. Montrons que** $y \in F = \text{Ker}(u + \text{id})$
- **1 pt : Par définition, il existe** $x \in E$ **tel que** $y = (u - \text{id})(x) = u(x) - x$
- **3 pt :** $(u + \text{id})(y) = 0_E$ **(2 pt pour les justifications)**

b) En déduire l'inégalité : $p + q \geqslant n$.

- **1 pt :** $\text{Im}(u - \text{id}) \subset \text{Ker}(u + \text{id})$**. Ainsi :** $\dim(\text{Im}(u - \text{id})) \leqslant \dim(\text{Ker}(u + \text{id})) = p$
- **1 pt : D'après le théorème du rang,** $\dim(\text{Im}(u - \text{id})) = n - q$

On suppose désormais que $1 \leqslant p < q$.
Soit $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ une base de F et $(g_1, g_2, \dots, g_q)$ une base de G.

c) Justifier que $(f_1, f_2, \dots, f_p,\ g_1, g_2, \dots, g_q)$ est une base de E.

- **1 pt :** $\dim(\text{Ker}(u+\text{id})) = p \geqslant 1$. **En particulier :** $\text{Ker}(u+\text{id}) \neq \{0_E\}$. **Ainsi,** -1 **est valeur propre de** u **et** $F = \text{Ker}(u+\text{id}) = E_{-1}(u)$
- **1 pt :** $\dim(\text{Ker}(u-\text{id})) = q > 1$. **En particulier :** $\text{Ker}(u-\text{id}) \neq \{0_E\}$. **Ainsi,** 1 **est valeur propre de** u **et** $G = \text{Ker}(u-\text{id}) = E_1(u)$
- **1 pt : On a alors :**
  × **la famille** $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ **est une base de** $E_{-1}(u)$.
  En particulier, c'est donc une famille libre de $E_{-1}(u)$.
  × **la famille** $(g_1, g_2, \dots, g_q)$ **est une base de** $E_1(u)$.
  En particulier, c'est donc une famille libre de $E_1(u)$.
- **1 pt : La famille** $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_p,\ g_1, g_2, \dots, g_q)$ **est la concaténation de deux familles libres de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes. Ainsi,** $\mathcal{F}$ **est une famille libre de** E
- **1 pt : par liberté,** $\text{Card}(\mathcal{F}) = p + q \ \leqslant\ \dim(E) = n$
- **1 pt : Or, d'après la question précédente :** $p + q \geqslant n$ **donc** $p + q = n$
- **1 pt : la famille** $\mathcal{F}$ **est libre et** $\text{Card}(\mathcal{F}) = n = \dim(E)$ **donc** $\mathcal{F}$ **est une base de** E

d) Calculer $u(g_1 - f_1)$ et $u(g_1 + f_1)$.

- **1 pt :** $u(g_1 - f_1) = g_1 + f_1$
- **1 pt :** $u(g_1 + f_1) = g_1 - f_1$

e) Trouver une base de E dans laquelle la matrice de u appartient à B_n.

- **1 pt : On considère** $\mathscr{B}'$ **la famille :**

$$\mathscr{B}' = (g_1 - f_1,\ g_1 + f_1,\ g_2 - f_2,\ g_2 + f_2, \dots,\ g_p - f_p,\ g_p + f_p,\ g_{p+1},\ g_{p+2}, \dots,\ g_q)$$

- **3 pt :** $\mathscr{B}'$ **est une famille libre**
- **1 pt :** $\text{Card}(\mathscr{B}') = n = \dim(E)$ **donc** $\mathscr{B}'$ **est une base de** E
- **3 pt : la matrice de** u **dans la base** $\mathscr{B}'$ **ne contient que des** 1 **et des** 0

PROBLÈME

Les tables de mortalité sont utilisées en démographie et en actuariat pour prévoir l'espérance de vie des individus d'une population. On s'intéresse dans ce problème à un modèle qui permet d'ajuster la durée de vie à des statistiques portant sur les décès observés au sein d'une génération.
Dans tout le problème, on note :

- a et b deux réels strictement positifs ;
- $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires du problème ;
- $G_{a,b}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $G_{a,b}(x) = \exp\left(-ax - \dfrac{b}{2}x^2\right)$.

Partie I. Loi exponentielle linéaire

1. a) Montrer que la fonction $G_{a,b}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur l'intervalle $]0,1]$.

- 2 pts :
  - **1 pt : $G_{a,b}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,+\infty[$ car elle est la composée $G_{a,b} = g_2 \circ g_1$**
  - **1 pt : g_1 polynomiale et telle que : $g_1([0,+\infty[) \subset \mathbb{R}$.**

- 1 pt : $G'_{a,b}(x) = (-a-bx)\ \exp\left(-ax - \dfrac{b}{2}x^2\right) = -(a+bx)\exp\left(-ax - \dfrac{b}{2}x^2\right) < 0$

- 1 pt : $G_{a,b}$ est continue et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$

- 1 pt : réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $G_{a,b}([0,+\infty[) =]\lim\limits_{x\to+\infty} G_{a,b}(x), G_{a,b}(0)] =]0,1]$

b) Pour tout réel $y > 0$, résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $ax + \dfrac{b}{2}x^2 = y$.

- 1 pt : $P(X) = \dfrac{b}{2}\ X^2 + aX - y$ admet pour discriminant
$\Delta = a^2 - 4 \times \dfrac{b}{2} \times (-y) = a^2 + 2by > 0$

- 1 pt : 2 racines $r_+ = \dfrac{-a+\sqrt{\Delta}}{2\frac{b}{2}} = \dfrac{-a+\sqrt{a^2+2by}}{b}$ **et** $r_- = \dfrac{-a-\sqrt{\Delta}}{2\frac{b}{2}} = -\dfrac{a+\sqrt{a^2+2by}}{b}$

- 1 pt : $b > 0$ et $y > 0$ donc $a^2 + 2by > a^2$ et $\sqrt{a^2+2by} > \sqrt{a^2} = |a| = a$ (ainsi $r_+ > 0$)

- 0 pt : d'autre part, $r_- < 0$ car $a > 0$, $\sqrt{a^2+2by} > 0$ et $b > 0$

c) On note $G_{a,b}^{-1}$ la bijection réciproque de $G_{a,b}$.
Quelle est, pour tout $u \in [0,1[$, l'expression de $G_{a,b}^{-1}(1-u)$?

- 1 pt : $v = G_{a,b}^{-1}(1-u) \Leftrightarrow G_{a,b}(v) = 1-u \Leftrightarrow \exp\left(-av - \dfrac{b}{2}v^2\right) = 1-u$ **car** $v \geqslant 0$

- 1 pt : $\Leftrightarrow -av - \dfrac{b}{2}v^2 = \ln(1-u)$ **avec** $1-u \in]0,1]$

- 1 pt : en notant $y = -\ln(1-u)$, comme $1-u \in]0,1]$, $\ln(1-u) \in]-\infty,0]$ alors $y \geqslant 0$

- 1 pt : on retrouve l'équation de la q précédente qui admet comme solution
$$r_+ = \frac{-a+\sqrt{a^2+2by}}{b} = \frac{-a+\sqrt{a^2-2b\ \ln(1-u)}}{b} \geqslant 0 \text{ et } r_- < 0$$

- 1 pt : comme $G_{a,b}^{-1}$ est à valeurs dans $[0,+\infty[$, on en déduit :
$$v = G_{a,b}^{-1}(1-u) \Leftrightarrow v = \frac{-a+\sqrt{a^2-2b\ \ln(1-u)}}{b}$$

2. ***a)*** Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\ dx$.

- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^1 G_{a,b}(x)\ dx$ **bien définie car** $G_{a,b}$ **continue sur le** `SEGMENT` $[0,1]$.
- **1 pt :** $\forall x \in [1,+\infty[$, $G_{a,b}(x) \geqslant 0$ **et** $\dfrac{1}{x^2} \geqslant 0$
- **1 pt :** $G_{a,b}(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ **car** $x^2\ G_{a,b}(x) = \dfrac{x^2}{(\mathbf{e}^a)^x} \times \dfrac{1}{\mathbf{e}^{\frac{b}{2}x^2}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \times 0 = 0$
- **1 pt : l'intégrale impropre** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\ dx$ **est convergente en tant qu'intégrale de Riemann impropre en** $+\infty$**, d'exposant** 2 $(2 > 1)$

b) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{b}{2\pi}} \times \exp\left(-\dfrac{1}{2} b\left(x + \dfrac{a}{b}\right)^2\right)$.
Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire suivant une loi normale dont on précisera les paramètres (espérance et variance).

- **1 pt :** $\sqrt{\dfrac{b}{2\pi}} = \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{2\pi}} = \dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{b}}\ \sqrt{2\pi}}$
- **1 pt :** $\exp\left(-\dfrac{1}{2}b\left(x+\dfrac{a}{b}\right)^2\right) = \exp\left(-\dfrac{1}{2}b\left(\dfrac{bx+a}{b}\right)^2\right)$
- **1 pt :** $= \exp\left(-\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{b}\ \dfrac{\cancel{b}(x+\frac{a}{b})}{\cancel{b}}\right)^2\right) = \exp\left(-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x+\frac{a}{b}}{\frac{1}{\sqrt{b}}}\right)^2\right)$
- **1 pt :** f **est la densité d'une v.a.r.** X **qui suit la loi** $\mathcal{N}\left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right)$

c) Soit Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
Déduire de la question ***2.b)***, l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\ dx = \sqrt{\frac{2\pi}{b}} \times \exp\left(\frac{a^2}{2b}\right) \times \Phi\left(-\frac{a}{\sqrt{b}}\right)$$

- **1 pt :** $-ax - \dfrac{b}{2}\ x^2 = -\dfrac{1}{2}\ b\ \left(x + \dfrac{a}{b}\right)^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{a^2}{b}$
- **1 pt :** $G_{a,b}(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{2}\ b\ \left(x+\dfrac{a}{b}\right)^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{a^2}{b}\right) = \sqrt{\dfrac{2\pi}{b}} \times \exp\left(\dfrac{a^2}{2b}\right) \times \sqrt{\dfrac{b}{2\pi}} \times \exp\left(-\dfrac{1}{2}\ b\ \left(x+\dfrac{a}{b}\right)^2\right)$
  $= \sqrt{\dfrac{2\pi}{b}} \times \exp\left(\dfrac{a^2}{2b}\right) \times f(x)$
- **3 pts :**
  - × **1pt : changement de variable** $u = \dfrac{x+\frac{a}{b}}{\frac{1}{\sqrt{b}}}$ **valide** $\varphi : u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{b}} u - \dfrac{a}{b}$ **est** $\mathcal{C}^1$ **sur** $[\frac{a}{\sqrt{b}}, +\infty[$
  - × **1pt :** $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\ dx = \sqrt{\frac{b}{2\pi}} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\ b\ \left(x+\frac{a}{b}\right)^2\right) dx = \sqrt{\frac{b}{2\pi}} \int_{\frac{a}{\sqrt{b}}}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\ u^2\right) \frac{1}{\sqrt{b}}\ du$
  - × **1 pt :** $\displaystyle = \int_{\frac{a}{\sqrt{b}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \mathbf{e}^{-\frac{u^2}{2}}\ du$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_{\frac{a}{\sqrt{b}}}^{+\infty} \varphi(u)\ du = 1 - \int_{-\infty}^{\frac{a}{\sqrt{b}}} \varphi(u)\ du = 1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right) = \Phi\left(-\frac{a}{\sqrt{b}}\right)$

3. Pour tout $a > 0$ et pour tout $b > 0$, on pose : $f_{a,b}(x) = \begin{cases} (a+bx)\ \exp\left(-ax - \dfrac{b}{2}x^2\right) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

a) Justifier que la fonction $f_{a,b}$ est une densité de probabilité.
On dit qu'une variable aléatoire suit la loi exponentielle linéaire de paramètres a et b, notée $\mathcal{E}_\ell(a,b)$, si elle admet $f_{a,b}$ pour densité.

- **1 pt : la fonction $f_{a,b}$ est :**
  - × **continue sur $]-\infty, 0[$ car constante sur cet intervalle,**
  - × **continue sur $]0, +\infty[$ comme composée et produit de fonctions continues sur $]0, +\infty[$.**
- **1 pt : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_{a,b}(x) \geqslant 0$ car :**
  - × **si $x \geqslant 0$: $f_{a,b}(x) = (a+bx)\exp\left(-ax - \dfrac{b}{2}x^2\right) > 0$ (car $a > 0$ et $b > 0$),**
  - × **si $x < 0$: $f_{a,b}(x) = 0 \geqslant 0$.**
- **1 pt : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(x)\ dx = \int_0^{+\infty} f_{a,b}(x)\ dx$ car $f_{a,b}$ est nulle en dehors de $[0,+\infty[$**
- **1 pt : $f_{a,b}$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ ainsi l'intégrale est impropre seulement en $+\infty$**
- **1 pt : $\displaystyle\int_0^A f_{a,b}(x)\ dx = \int_0^A (a+bx)\ \exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right)\ dx = -\left[\ \exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right)\ \right]_0^A$**
  $= -\left(\exp\left(-aA - \dfrac{b}{2}A^2\right) - \exp(0)\right) = 1 - \mathrm{e}^{-aA} \times \mathrm{e}^{-\frac{b}{2}A^2} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

b) Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{E}_\ell(a,b)$. À l'aide d'une intégration par parties, justifier que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ telle que : $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\ dx$.

- **1 pt : X admet une espérance ssi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\ f_{a,b}(x)\ dx$ est acv, ce qui équivaut à ...**
- **0 pt : $f_{a,b}$ nulle en dehors de $[0,+\infty[$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf_{a,b}(x)\ dx = \int_0^{+\infty} xf_{a,b}(x)\ dx$**
- **1 pt : IPP $u(x) = x$ et $v'(x) = f_{a,b}(x)$ car u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$**
- **1 pt : $\displaystyle\int_0^A x\ f_{a,b}(x)\ dx = A\ G_{a,b}(A) = A\ \exp\left(-aA - \frac{b}{2}\ A^2\right) = \frac{A}{(\mathrm{e}^a)^A} \times \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{b}{2}A^2}} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$**

4. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1. On pose : $X = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 + 2bY}}{b}$.

a) Justifier que pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $\mathbb{P}([X \geqslant x]) = G_{a,b}(x)$.

- **1 pt : $\forall u \in [0,1[,\ G_{a,b}^{-1}(1-u) = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 - 2b\ \ln(1-u)}}{b}$**
- **1 pt : $-\ln(1-u) = y \ \Leftrightarrow\ \ln(1-u) = -y \ \Leftrightarrow\ 1 - u = \mathrm{e}^{-y} \ \Leftrightarrow\ u = 1 - \mathrm{e}^{-y}$**
- **0 pt : donc $G_{a,b}^{-1}(\mathrm{e}^{-y}) = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 + 2b\ y}}{b}$ et $X = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 + 2bY}}{b} = G_{a,b}^{-1}(\mathrm{e}^{-Y})$**
- **1 pt : $\mathbb{P}([X \geqslant x]) = \mathbb{P}\left(\left[G_{a,b}^{-1}(\mathrm{e}^{-Y})\ \geqslant\ x\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[\mathrm{e}^{-Y} \leqslant G_{a,b}(x)\right]\right)$ par stricte déc. de $G_{a,b}$**
- **1 pt : $= \mathbb{P}([-Y \ \leqslant\ \ln(G_{a,b}(x))]) = \mathbb{P}([Y \ \geqslant\ -\ln(G_{a,b}(x))]) = 1 - \mathbb{P}([Y \ <\ -\ln(G_{a,b}(x))])$**
  $= 1 - F_Y(-\ln(G_{a,b}(x))) = \cancel{1} - \left(\cancel{1} - \mathrm{e}^{-(-\ln(G_{a,b}(x)))}\right) = \mathrm{e}^{\ln(G_{a,b}(x))} = G_{a,b}(x)$

b) En déduire que X suit la loi $\mathcal{E}_\ell(a,b)$.

- **1 pt :** $g : x \mapsto \dfrac{-a+\sqrt{a^2+2b\ x}}{b}$ **et** $X(\Omega) = \big(g(Y)\big)\,(\Omega) = g\,\big(Y(\Omega)\big) = g\,\big([0,+\infty[\big) = [0,+\infty[$
- **2 pts :**
  - × **1 pt : si** $x < 0$, $F_X(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) = 0$
  - × **1 pt : si** $x \geqslant 0$, $F_X(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) = 1 - \mathbb{P}([X > x]) = 1 - G_{a,b}(x)$
- **1 pt :** F_X **est continue sur** $]0,+\infty[$ **car** $G_{a,b}$ **l'est et sur** $]-\infty,0[$ **car constante**
- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to 0}\ (1 - G_{a,b}(x)) = 1 - 1 = 0 = F_X(0) = \lim\limits_{x\to 0}\ 0$
- **1 pt : de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $]-\infty,0[$ **et sur** $]0,+\infty[$ **pour des raisons similaires**
- **1 pt : on obtient** $f_X = f_{a,b}$ **en dérivant sur les intervalles** `OUVERTS`

c) On note U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$.
Déterminer la loi de la variable aléatoire $G_{a,b}^{-1}(1-U)$.

- **1 pt : Si** $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$ **et** $\lambda > 0$**, alors** $-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U) \hookrightarrow \mathcal{E}\,(\lambda)$
- **1 pt : en notant** $Y = -\ln(1-U)$**, on obtient (stabilité)** $Y \hookrightarrow \mathcal{E}\,(1)$
- **1 pt : comme vu en question** ***4.a)*** **et** ***4.b)*** **:** $G_{a,b}^{-1}(\mathrm{e}^{-Y}) \hookrightarrow \mathcal{E}_\ell(a,b)$
- **1 pt : enfin** $\mathrm{e}^{-Y} = \mathrm{e}^{-(-\ln(1-U))} = \mathrm{e}^{\ln(1-U)} = 1 - U$

5. La fonction **Scilab** suivante génère des simulations de la loi exponentielle linéaire.

```
1 function x = grandlinexp(a,b,n)
2     u = rand(n,1)
3     y = ...........
4     x = (-a + sqrt(a^2 + 2 * b * y)) / b
5 endfunction
```

a) Quelle est la signification de la ligne de code 2 ?

- **1 pt : l'instruction** `rand(n,1)` **renvoie un vecteur colonne de taille** $\mathtt{n} \times 1$ **...**
- **1 pt : ... contenant le résultat de la simulation de** `n` **v.a.r. aléatoires indépendantes qui suivent toutes la même loi** $\mathcal{U}([0,1])$

b) Compléter la ligne de code 3 pour que la fonction `grandlinexp` génère les simulations désirées.

- **1 pt : d'après** ***4.c)*****, il suffit d'écrire :**

```
    y = - log(1 - u)
```

6. De quel nombre réel peut-on penser que les six valeurs générées par la boucle **Scilab** suivante fourniront des valeurs approchées de plus en plus précises et pourquoi ?

```
for k = 1:6
    mean(grandlinexp(0, 1, 10^k)
end
```

- **1 pt : la LfGN est citée**
- **1 pt :** `mean` **permet d'obtenir la moyenne des valeurs d'une matrice**
- **1 pt : le terme** $\mathbb{E}(X)$ **apparaît**
- **1 pt : le fait que l'approximation est a priori de plus en plus précise**

Dans la suite du problème, on note $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi exponentielle linéaire* $\mathcal{E}_\ell(a,b)$ *dont les paramètres* $a > 0$ *et* $b > 0$ *sont inconnus.*
Soit h *un entier supérieur ou égal à 2. On suit pendant une période de* h *années, une « cohorte » de* n *individus de même âge au début de l'étude et on modélise leurs durées de vie respectives à partir de cette date par les variables aléatoires* $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Partie II. Premier décès et intervalle de confiance de a

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les variables aléatoires M_n, H_n et U_n par :

$$M_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n), \quad H_n = \min(h, X_1, X_2, \dots, X_n) \quad \text{et} \quad U_n = nH_n.$$

7. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la probabilité $\mathbb{P}([M_n \geqslant x])$.
Reconnaître la loi de la variable aléatoire M_n.

- **1 pt : indépendance des v.a.r.**
- **1 pt : les v.a.r. sont de même loi**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([M_n \geqslant x]) = (G_{a,b}(x))^n$
- **1 pt :** $(G_{a,b}(x))^n = \left(\mathrm{e}^{-ax-\frac{b}{2}x^2}\right)^n = \mathrm{e}^{-nax-\frac{nb}{2}x^2}$
- **1 pt : si** $x < 0$ **alors** $[M_n \geqslant x] = \Omega$ **et** $\mathbb{P}([M_n \geqslant x]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$
- **1 pt : on reconnaît la fonction de survie de la loi** $\mathcal{E}_\ell(na, nb)$ **donc** $M_n \hookrightarrow \mathcal{E}_\ell(na, nb)$

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note F_{U_n} la fonction de répartition de la variable aléatoire U_n.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $F_{U_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \exp\left(-ax - \dfrac{b}{2n}x^2\right) & \text{si } 0 \leqslant x < nh \\ 1 & \text{si } x \geqslant nh \end{cases}$.

- **1 pt :** $H_n(\Omega) \subset [0, nh[$ **ou disjonction de cas correcte**
- **1 pt : si** $x < 0$ **alors** $[U_n > x] = \Omega$ **et** $\mathbb{P}([U_n > x]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$
- **3 pts : si** $x \in [0, nh[$
  - × **1 pt :** $\mathbb{P}([U_n > x]) = \mathbb{P}(\left[H_n > \frac{x}{n}\right]) = \mathbb{P}(\left[\min(h, M_n) > \frac{x}{n}\right]) = \mathbb{P}(\left[h > \frac{x}{n}\right] \cap \left[M_n > \frac{x}{n}\right])$
  - × **1 pt :** $[x < nh] = \Omega$ **car** $x \in [0, nh[$
  - × **1 pt :** $\mathbb{P}([U_n > x]) = \mathbb{P}(\left[M_n > \frac{x}{n}\right]) = \left(G_{a,b}(\frac{x}{n})\right)^n$
- **1 pt : si** $x \geqslant nh$**,** $\mathbb{P}([U_n > x]) = \mathbb{P}(\left[h > \frac{x}{n}\right] \cap \mathbb{P}(\left[M_n > \frac{x}{n}\right]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$ **car** $\left[h > \frac{x}{n}\right] = \varnothing$

b) Étudier la continuité de la fonction F_{U_n}.

- **1 pt :** F_{U_n} **est continue sur** $]-\infty, 0[$ **et sur** $]nh, +\infty[$ **car constante sur ces intervalles**
- **1 pt :** F_{U_n} **est continue sur** $]0, nh[$ **car** $G_{a,b}$ **l'est sur** $[0, +\infty[$
- **1 pt :** F_{U_n} **est continue en** 0 **puisque :**
  1) $\lim\limits_{x \to 0^-} F_{U_n}(x) = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0$**,**
  2) $\lim\limits_{x \to 0^+} F_{U_n}(x) = \lim\limits_{x \to 0} 1 - \left(G_{a,b}\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n = 1 - (G_{a,b}(0))^n = 1 - 1^n = 0$**,**
  3) $F_{U_n}(0) = 0$**.**
- **1 pt :** F_{U_n} **non continue en** nh **car** $F_{U_n}(nh) = 1$ **et**

$$\lim_{x \to (nh)^-} F_{U_n}(x) = \lim_{x \to nh} 1 - \left(G_{a,b}\left(\tfrac{x}{n}\right)\right)^n = 1 - \left(G_{a,b}\left(\tfrac{nh}{n}\right)\right)^n = 1 - \exp\left(-anh - \frac{b}{2\cancel{n}} n^{\cancel{2}}\ h^2\right) < 1$$

c) La variable aléatoire U_n admet-elle une densité ?

- **1 pt :** F_{U_n} **n'est pas continue sur** $\mathbb{R}$ **ainsi,** U_n **n'est pas une variable à densité**

d) Montrer que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

- 1 pt : disjonction sur les intervalles limites et surtout pas $[0, nh[$

- 1 pt : si $x < 0$ **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{U_n}(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$

- 1 pt : si $x \geqslant 0$ **alors, pour** n **suffisamment grand**
$\lim\limits_{n\to+\infty} F_{U_n}(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \exp\left(-ax - \dfrac{b}{2n}x^2\right)\right) = 1 - \exp(-ax)$

- 1 pt : cela se produit si $n > \left\lceil \dfrac{x}{h} \right\rceil$)

- 1 pt : on reconnaît la fonction de répartition d'une v.a.r. Z **telle que** $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(a)$**.**
Ainsi : $U_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} Z$

9. Soit $\alpha \in]0, 1[$.

a) Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1.
Trouver deux réels c et d strictement positifs tels que :

$$\mathbb{P}([c \leqslant Y \leqslant d]) = 1 - \alpha \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([Y \leqslant c]) = \frac{\alpha}{2}$$

- 1 pt : comme $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ **et que** $c > 0$ **et** $d > 0$ $\mathbb{P}([c \leqslant Y \leqslant d]) = F_Y(d) - F_Y(c) = (\cancel{1} - \mathrm{e}^{-d}) - (\cancel{1} - \mathrm{e}^{-c}) = \mathrm{e}^{-c} - \mathrm{e}^{-d}$ **et** $\mathbb{P}([Y \leqslant c]) = F_Y(c) = 1 - \mathrm{e}^{-c}$

- 1 pt : $\left\{\begin{array}{rcrcl} \mathrm{e}^{-c} & - & \mathrm{e}^{-d} & = & 1-\alpha \\ -\mathrm{e}^{-c} & & & = & -1+\dfrac{\alpha}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} & - & \mathrm{e}^{-d} & = & -\dfrac{\alpha}{2} \\ -\mathrm{e}^{-c} & & & = & -1+\dfrac{\alpha}{2} \end{array}\right.$

- 1 pt : $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathrm{e}^{-d} = \dfrac{\alpha}{2} \\ \mathrm{e}^{-c} = 1 - \dfrac{\alpha}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -d = \ln\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) \\ -c = \ln\left(1 - \dfrac{\alpha}{2}\right) \end{array}\right.$

- 1 pt : $c = -\ln\left(1 - \dfrac{\alpha}{2}\right) > 0$ **car** $1 - \dfrac{\alpha}{2} \in]0, 1[$ **(**$\alpha \in]0, 1[$**). De même,** $d = -\ln\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) > 0$

b) Montrer que $\left[\dfrac{c}{U_n}, \dfrac{d}{U_n}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de a, de niveau de confiance $1 - \alpha$.

- 1 pt : $\mathbb{P}\left(a \in \left[\dfrac{c}{U_n}, \dfrac{d}{U_n}\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{c}{U_n} \leqslant a \leqslant \dfrac{d}{U_n}\right]\right) = \mathbb{P}([c \leqslant a\ U_n \leqslant d]) = \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{c}{a} \leqslant U_n \leqslant \dfrac{d}{a}\right]\right)$

- 1 pt : $\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{c}{a} \leqslant Z \leqslant \dfrac{d}{a}\right]\right)$ **d'après *8.d)***

- 1 pt : $\mathbb{P}\left(\left[\dfrac{c}{a} \leqslant Z \leqslant \dfrac{d}{a}\right]\right) = F_Z\left(\dfrac{d}{a}\right) - F_Z\left(\dfrac{c}{a}\right) = (\cancel{1} - \mathrm{e}^{-a\frac{d}{a}}) - (\cancel{1} - \mathrm{e}^{-a\frac{c}{a}}) = \mathrm{e}^{-c} - \mathrm{e}^{-d} = 1 - \alpha$

Partie III. Nombre de survivants et estimateur convergent de b

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, soit S_i et D_i les variables aléatoires telles que :

$$S_i = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } X_i \geqslant h \\ 0 & \text{sinon} \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad D_i = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } X_i \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{array}\right.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\overline{S}_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} S_i$ et $\overline{D}_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} D_i$.

10. a) Justifier que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $\mathbb{E}(S_i) = G_{a,b}(h)$ et calculer $\mathbb{E}(S_i D_i)$.

- **1 pt :** $S_i(\Omega) = \{0, 1\}$ **donc** S_i **suit une loi de Bernoulli**
- **1 pt :** $S_i \mathcal{B}\left(\mathbb{P}([X_i \geqslant h])\right)$ **et** $\mathbb{P}([X_i \geqslant h]) = G_{a,b}(h)$
- **1 pt :** $S_i D_i = 1$ **ssi** $X_i \geqslant h$ **et** $X_i \leqslant 1$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_i \geqslant h] \cap [X_i \leqslant 1]) = \mathbb{P}([h \leqslant X_i \leqslant 1]) = 0$ **puisque** $h \geqslant 2$

b) Pour quels couples $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, les variables aléatoires S_i et D_j sont-elles indépendantes ?

- **1 pt : comme** $D_i(\Omega) = \{0, 1\}$**, la v.a.r.** D_i **suit une loi de Bernoulli de paramètre** $\mathbb{P}([X_i \leqslant 1]) = 1 - G_{a,b}(1)$
- **1 pt : ainsi** $\mathbb{E}(S_i D_i) = 0 \neq \mathbb{E}(S_i)\ \mathbb{E}(D_i)$
- **3 pts : cas** $j \in [\![1, n]\!]$ **tel que** $j \neq i$
  - × **1 pt :** $\mathbb{P}([S_i = 0] \cap [D_j = 0]) = \mathbb{P}([X_i < h] \cap [X_j > 1]) = \mathbb{P}([X_i < h]) \times \mathbb{P}([X_j > 1])$ $= \mathbb{P}([S_i = 0]) \times \mathbb{P}([D_j = 0])$
  - × **1 pt :** $\mathbb{P}([S_i = 0] \cap [D_j = 1]) = \mathbb{P}([X_i < h] \cap [X_j \leqslant 1]) = \mathbb{P}([X_i < h]) \times \mathbb{P}([X_j \leqslant 1])$ $= \mathbb{P}([S_i = 0]) \times \mathbb{P}([D_j = 1])$
  - × **1 pt : de même** $\mathbb{P}([S_i = 1] \cap [D_j = 0]) = \mathbb{P}([S_i = 1]) \times \mathbb{P}([D_j = 0])$ **et** $\mathbb{P}([S_i = 1] \cap [D_j = 1]) = \mathbb{P}([S_i = 1]) \times \mathbb{P}([D_j = 1])$

c) Déduire des questions précédentes l'expression de la covariance $\text{Cov}(\overline{S}_n, \overline{D}_n)$ de $\overline{S}_n$ et $\overline{D}_n$ en fonction de n, $G_{a,b}(h)$ et $G_{a,b}(1)$. Le signe de cette covariance était-il prévisible ?

- **1 pt :** $\text{Cov}(S_i, D_j) = \mathbb{E}(S_i D_j) - \mathbb{E}(S_i)\ \mathbb{E}(D_j) = 0$ **car** S_i **et** D_j **sont indépendantes**
- **1 pt :** $\text{Cov}(S_i, D_i) = \mathbb{E}(S_i D_i) - \mathbb{E}(S_i)\ \mathbb{E}(D_i) = 0 - G_{a,b}(h)\ (1 - G_{a,b}(1)) = -G_{a,b}(h)\ (1 - G_{a,b}(1))$
- **2 pts :** $\text{Cov}\left(\overline{S_n}, \overline{D_n}\right) = \text{Cov}\left(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} S_i, \dfrac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} D_j\right) = \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \text{Cov}(S_i, D_j)$
- **1 pt :** $\text{Cov}\left(\overline{S_n}, \overline{D_n}\right) = \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \text{Cov}(S_i, D_j) = \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i = j}} \text{Cov}(S_i, D_j) + \cancel{\dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i \neq j}} \text{Cov}(S_i, D_j)}$
  $= \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{i=1}^{n} \text{Cov}(S_i, D_i)$
- **1 pt :** $\text{Cov}\left(\overline{S_n}, \overline{D_n}\right) = -\dfrac{G_{a,b}(h)\ (1 - G_{a,b}(1))}{n} < 0$
- **1 pt :** $\overline{S_n}$ **représente la proportion d'individus encore en vie après** h **années et** $\overline{D_n}$ **représente la proportion d'individus morts au cours de la première année. Lorsqu'une de ces deux proportions augmente, l'autre à tendance à diminuer donc le signe était prévisible**

11. a) Montrer que $\overline{S}_n$ est un estimateur sans biais et convergent du paramètre $G_{a,b}(h)$.

- **1 pt :** $\overline{S_n}$ **admet une esp en tant que CL des** $v.a.r.$ S_1**, . . . ,** S_n **qui en admettent une**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(\overline{S_n}) = \mathbb{E}\left(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} S_i\right) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{E}(S_i) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} G_{a,b}(h) = \dfrac{1}{n}\ n\ G_{a,b}(h) = G_{a,b}(h)$
- **1 pt :** $\overline{S_n}$ **admet un moment d'ordre** 2 **car CL de** $v.a.r.$ **qui en admettent un**
- **1 pt : d'après la décomp biais variance** $r(\overline{S_n}) = \mathbb{V}(\overline{S_n}) + \left(\cancel{b(\overline{S_n})}\right)^2$
- **1 pt :** $\mathbb{V}\left(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} S_i\right) = \dfrac{1}{n^2}\ \mathbb{V}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} S_i\right) = \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{V}(S_i) = \dfrac{1}{n^2}\ n\ \mathbb{V}(S_1) = \dfrac{1}{n}\ \mathbb{V}(S_1) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

b) De quel paramètre, $\overline{D}_n$ est-il un estimateur sans biais et convergent ?

- 1 pt : $\overline{D_n}$ admet une espérance car CL des *v.a.r.* $D_1, \ldots, D_n$ qui en admettent une

- 1 pt : $\mathbb{E}(\overline{D_n}) = \mathbb{E}\left(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} D_i\right) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(D_i\right) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} (1 - G_{a,b}(1)) = 1 - G_{a,b}(1)$

- 1 pt : de même que dans la question précédente

$$r(\overline{D_n}) = \mathbb{V}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} D_i\right) = \frac{1}{n^2} \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} D_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(D_i) = \frac{1}{n^2} n \, \mathbb{V}(D_1) = \frac{1}{n} \mathbb{V}(D_1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

12. On pose : $z(a,b) = \ln(G_{a,b}(1))$ et $r(a,b) = \ln(G_{a,b}(h))$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $Z_n = \ln\left(1 - \overline{D}_n + \dfrac{1}{n}\right)$ et $R_n = \ln\left(\overline{S}_n + \dfrac{1}{n}\right)$.

On admet que Z_n et R_n sont des estimateurs convergents de $z(a,b)$ et $r(a,b)$ respectivement.

a) Soit ε, λ et μ des réels strictement positifs.

(i) Justifier l'inclusion suivante :

$$[|(\lambda Z_n - \mu R_n) - (\lambda z(a,b) - \mu r(a,b))| \geqslant \varepsilon] \subset [\lambda |Z_n - z(a,b)| + \mu |R_n - r(a,b)| \geqslant \varepsilon] \, .$$

- 1 pt :

- 1 pt :

- 1 pt :

- 1 pt :

(ii) En déduire l'inégalité suivante :

$$\mathbb{P}\big([|(\lambda Z_n - \mu R_n) - (\lambda z(a,b) - \mu r(a,b))\,| \geqslant \varepsilon] \big) \leqslant \mathbb{P}\Big(\Big[|Z_n - z(a,b)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2\lambda}\Big] \Big) + \mathbb{P}\Big(\Big[|R_n - r(a,b)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2\mu}\Big] \Big).$$

- 1 pt :

- 1 pt :

- 1 pt :

- 1 pt :

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $B_n = \dfrac{2}{h-1} Z_n - \dfrac{2}{h(h-1)} R_n$.

Montrer que B_n est un estimateur convergent du paramètre b.

- 1 pt :

- 1 pt :

- 1 pt :

- 1 pt :