DS6 (version B)

Problème I (EML S 2013)

Dans tout le problème, n est un entier tel que $n \geqslant 2$.
On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles à une colonne et n lignes, nommées « matrices colonnes » dans la suite du problème.
Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A.
Si $V \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors ${}^tV$ désigne la matrice transposée de V.
Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et si $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, alors le coefficient de la ligne numéro i et de la colonne numéro j de A est notée $a_{i,j}$, la matrice A est notée $A = \big(a_{i,j}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
Si $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors la matrice colonne V est notée $V = (v_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.
Si $A = \big(a_{i,j}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on note $C_j(A)$ la matrice colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée des coefficients de la colonne numéro j de A. Ainsi : $C_j(A) = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Partie I : Un exemple

Soient $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $A_0 = U_0\,{}^tV_0$.

1. Vérifier que 0 est valeur propre de A_0 et déterminer une base du sous-espace propre associé.

Démonstration.

- Tout d'abord : $A_0 = U_0\,{}^tV_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 6 & -3 \\ 4 & -4 & 8 & -4 \end{pmatrix}$.
- La matrice A_0 possède deux colonnes colinéaires ($C_2 = -C_1$ par exemple).
  Ainsi, A_0 est non inversible.

$$\boxed{\text{On en déduit que 0 est valeur propre de } A_0.}$$

Commentaire

Étant donnée la construction de A_0, déterminer le rang de cette matrice s'avère très simple :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 6 & -3 \\ 4 & -4 & 8 & -4 \end{pmatrix}\right) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = 1
\end{aligned}$$

En effet, la dernière famille considérée est libre car constituait uniquement d'un vecteur non nul (rappelons que si $\mathcal{F}$ est libre : $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \mathrm{Card}(\mathcal{F})$.

- Déterminons $E_0(A_0)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 0.

  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_0(A_0) & \iff & A_0 \; X = 0_{\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \\
& \iff & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 6 & -3 \\ 4 & -4 & 8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & + & 2\,z & - & t & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & + & 4\,z & - & 2\,t & = & 0 \\ 3\,x & - & 3\,y & + & 6\,z & - & 3\,t & = & 0 \\ 4\,x & - & 4\,y & + & 8\,z & - & 4\,t & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2\,L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3\,L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4\,L_1}}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & + & 2\,z & - & t & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff & \left\{ \; x \; = \; y \; - \; 2\,z \; + \; t \right.
\end{array}$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl}
E_0(A_0) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid x = y - 2z + t \right\} \\
& = & \left\{ \begin{pmatrix} y - 2z + t \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid (y, z, t) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
& = & \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (y, z, t) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
& = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } E_0(A_0) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).}$$

- Démontrons que la famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre.

  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

  Supposons : $\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(*)$. Or :

$$(*) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & 2\,\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & & & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \right.$$

$$\boxed{\text{La famille } \mathcal{F} \text{ est libre.}}$$

- La famille $\mathcal{F}$ est :
  - × génératrice de $E_0(A_0)$,
  - × libre.

$$\boxed{\text{On en conclut que } \mathcal{F} \text{ est une base de } E_0(A_0).}$$

Commentaire

- Considérons l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$ dont la représentation dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$ est A_0. Par le théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc} \dim\big(\mathbb{R}^4\big) & = & \dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big) & + & \dim\big(\operatorname{Im}(f)\big) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ 4 & & \dim\big(E_0(f)\big) & & \operatorname{rg}(f) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ \dim\big(\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})\big) & = & \dim\big(E_0(A_0)\big) & + & \operatorname{rg}(A_0) \end{array}$$

  Profitons-en pour rappeler que l'écriture $\operatorname{Ker}(A_0)$ est impropre car A_0 est une matrice, pas une application linéaire.
- Cette égalité permet de démontrer :

$$\dim\big(E_0(A_0)\big) = \dim\big(\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})\big) - \operatorname{rg}(A_0) = 4 - 1 = 3$$

  On pouvait utiliser cet argument à la place de l'argument de liberté de la famille $\mathcal{F}$.

□

2. a) Calculer $A_0\, U_0$.

Démonstration.

$$A_0\, U_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 6 & -3 \\ 4 & -4 & 8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } A_0\, U_0 = 1 \cdot U_0.}$$

□

b) Montrer que A_0 est diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, U_0 est un vecteur popre de A_0 associé à la valeur propre 1.
- La famille $\mathcal{G} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ est :
  - × libre en tant que concaténation de deux familles libres de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes.
  - × telle que : $\text{Card}\big(\mathcal{G}\big) = 4 = \dim\big(\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})\big)$.

  On en déduit que la famille $\mathcal{G}$ est une base de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$\boxed{\text{Comme } \mathcal{G} \text{ est une base de vecteurs propres de } A, \text{ la matrice } A_0 \text{ est diagonalisable.}}$

Commentaire

On pouvait aussi démontrer la diagonalisabilité par un argument de dimension.

- D'après la question ***1.*** : $\dim\big(E_0(A_0)\big) = \text{Card}(\mathcal{F}) = 3$.
- D'après la question précédente, U_0 est un vecteur popre de A_0 associé à la valeur propre 7. On en déduit : $\dim\big(E_1(A_0)\big) \geqslant 1$.
- Ainsi :
  $$\dim\big(E_0(A_0)\big) + \dim\big(E_1(A_0)\big) \geqslant 3 + 1 = 4$$
  Et comme $\dim\big(E_0(A_0)\big) + \dim\big(E_1(A_0)\big) \leqslant 4$, on en conclut :
  $$\dim\big(E_0(A_0)\big) + \dim\big(E_1(A_0)\big) = 4 = \dim\big(\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})\big)$$
  Ainsi, la matrice A_0 est diagonalisable.

□

c) Déterminer une matrice diagonale D de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ et une matrice inversible P de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $A_0 = PDP^{-1}$.

Démonstration.
La matrice A_0 est diagonalisable.
Il existe donc une matrice inversible P et une matrice D diagonale telles que :

$$A_0 = PDP^{-1}$$

Plus précisément :

- × la matrice $P \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ est obtenue par concaténation de bases des sous-espaces propres de A_0.
- × la matrice $D \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ est la matrice diagonale dont les coefficients sont les valeurs propres de A_0 (dans le même ordre d'apparition que les vecteurs propres).

$$\boxed{\text{Ainsi : } A_0 = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

□

Partie II : Trace d'une matrice carrée

Pour toute matrice $A = \big(a_{i,j}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle trace de A et on note $\mathrm{tr}(A)$ la somme des coefficients diagonaux de A, c'est-à-dire $\mathrm{tr}(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

3. Montrer que l'application $\mathrm{tr} : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & \mathrm{tr}(A) \end{array}$, est linéaire.

Démonstration.
Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, soit $A = \big(a_{i,j}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $B = \big(b_{i,j}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- Tout d'abord, par définition de la somme de matrices : $\lambda A + \mu B = \big(\lambda\, a_{i,j} + \mu\, b_{i,j}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
- Par définition de la trace :

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{tr}\big(\lambda A + \mu B\big) & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \big(\lambda A + \mu B\big)_{i,i} & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \big(\lambda\, a_{i,i} + \mu\, b_{i,i}\big) & \\ & = & \lambda \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i} + \mu \sum\limits_{i=1}^{n} b_{i,i} & \textit{(par linéarité de la somme)} \\ & = & \lambda\ \mathrm{tr}(A) + \mu\ \mathrm{tr}(B) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, l'application tr est bien linéaire.}}$$

□

4. Montrer : $\forall (A, B) \in \big(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\big)^2$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Démonstration.
On note $A = \big(a_{i,j}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et soit $B = \big(b_{i,j}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
De plus, on note : $C = AB = \big(c_{i,j}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $D = BA = \big(d_{i,j}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

- Soit $i \in [\![1, n]\!]$ et soit $j \in [\![1, n]\!]$. Par définition du produit matriciel :

$$c_{i,j} = (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, b_{k,j} \qquad \text{et} \qquad d_{i,j} = (BA)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k}\, a_{k,j}$$

- On a alors :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{tr}(AB) \ = \ tr(C) & = & \sum\limits_{i=1}^{n} c_{i,i} \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}\, b_{k,i} \right) \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_{k,i}\, a_{i,k} \right) \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_{k,i}\, a_{i,k} \right) \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} d_{k,k} \right) \ = \ \mathrm{tr}(D) \ = \ \mathrm{tr}(BA) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).}$$

Commentaire

On a rappelé en début d'exercice la formule permettant d'obtenir les coefficients de la matrice produit AB. Cette formule ne revêt pas de difficulté. Elle exprime le fait que que le coefficient en position (i,j) de la matrice AB est obtenu en réalisant le produit de la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice A par la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice B.

$$c_{i,j} \;=\; (AB)_{i,j} \;=\; \begin{pmatrix} a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix} \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, b_{k,j}$$

□

5. Vérifier, pour tout $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $\mathrm{tr}({}^tAA) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{j,i}^2$.

Démonstration.
Notons $B = {}^tA$. Rappelons : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $b_{i,j} = a_{j,i}$.
En reprenant la démonstration précédente :

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\left({}^tAA\right) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{k,i}\, a_{i,k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,k}\, a_{i,k} \right) \qquad \textit{(car } B = {}^tA\textit{)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,k}^2 \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathrm{tr}\left({}^tAA\right) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,k}^2 \right).}$$

Commentaire

Les variables de sommation sont des variables muettes. On peut donc les renommer sans changer le résultat énoncé. Si on souhaite retrouver la même présentation que celle présente dans l'énoncé, on peut écrire :

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,k}^2 \right) \;=\; \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\sum_{\beta=1}^{n} a_{\beta,\alpha}^2 \right) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}^2 \right)$$

□

Partie III : Une caractérisation des matrices de rang 1

6. Soient $U = (u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $V = (v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ deux matrices colonnes non nulles de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

a) Justifier : $U\,{}^tV \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Déterminer les coefficients de $U\,{}^tV$ à l'aide des coefficients de U et de V.

Démonstration.

- D'après l'énoncé : $U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et ${}^tV \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } U\,{}^tV \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned} U\,{}^tV &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_{n-1} & v_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & \dots & u_1v_{n-1} & u_1v_n \\ u_2v_1 & u_2v_2 & \dots & u_2v_{n-1} & u_2v_n \\ \vdots & & & & \\ u_{n-1}v_1 & u_{n-1}v_2 & \dots & u_{n-1}v_{n-1} & u_{n-1}v_n \\ u_nv_1 & u_nv_2 & \dots & u_nv_{n-1} & u_nv_n \end{pmatrix} = (u_i\,v_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \end{aligned}$$

$$\boxed{U\,{}^tV = (u_i\,v_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}}$$

□

b) Exprimer $\mathrm{tr}\left(U\,{}^tV\right)$ à l'aide des coefficients de U et de V.

Démonstration.
Notons $A = U\,{}^tV$. D'après la question précédente, et par définition de l'opérateur tr :

$$\mathrm{tr}\left(U\,{}^tV\right) = \sum_{i=1}^{n} A_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} u_i\,v_i$$

$$\boxed{\mathrm{tr}\left(U\,{}^tV\right) = \sum_{i=1}^{n} u_i\,v_i}$$

Commentaire

On ne peut `EN AUCUN CAS` utiliser le résultat de la question ***4***. La raison en est simple : U et V sont des matrices de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et non de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Rappelons, à toutes fins utiles, que le résultat d'une question ne peut être utilisé que si l'on se trouve dans le cadre d'application de ce résultat. Il convient donc de vérifier que les objets manipulés vérifient les propriétés nécessaires.

□

c) Quel est le rang de $U\,{}^tV$.

Démonstration.

- D'après la question ***6.a)*** :

$$\begin{aligned} U\,{}^tV &= \begin{pmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & \dots & u_1v_{n-1} & u_1v_n \\ u_2v_1 & u_2v_2 & \dots & u_2v_{n-1} & u_2v_n \\ \vdots & & & & \\ u_{n-1}v_1 & u_{n-1}v_2 & \dots & u_{n-1}v_{n-1} & u_{n-1}v_n \\ u_nv_1 & u_nv_2 & \dots & u_nv_{n-1} & u_nv_n \end{pmatrix} \\ &= \left(v_1 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} \quad v_2 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} \quad \dots \quad v_{n-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} \quad v_n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} v_1\,U & \dots & v_n\,U \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Par hypothèse, la matrice V est non nulle.
Ainsi, V admet (au moins) un coefficient non nul. Notons le v_{j_0} (avec $j_0 \in [\![1,n]\!]$).

$$\begin{array}{rcll} \text{rg}\left(U\,{}^tV\right) & = & \text{rg}\left(v_1\,U,\ \ldots,\ v_n\,U\right) & \\ & = & \text{rg}\left(v_{j_0}U\right) & \\ & = & \text{rg}\left(U\right) & \textit{(car } v_{j_0} \neq 0\textit{)} \end{array}$$

Or, la famille (U) est libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul.

$$\boxed{\text{On en déduit : rg}\left(U^tV\right) = \text{rg}\left(U\right) = 1.}$$

□

7. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

a) Montrer qu'il existe $j_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, il existe $\alpha_j \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$C_j(A) = \alpha_j\, C_{j_0}(A)$$

Démonstration.

- On procède par l'absurde.
Supposons que le matrice A possède deux colonnes non colinéaires.
Notons $k \in [\![1,n]\!]$ et $\ell \in [\![1,n]\!]$ les numéros respectifs de ces deux colonnes. Alors :

$$\begin{array}{rcl} \text{rg}(A) & = & \text{rg}\left(C_1(A),\ldots,C_n(A)\right) \\ & \geqslant & \text{rg}\left(C_k(A),C_\ell(A)\right) \ = \ 2 \end{array}$$

En effet, la famille $(C_k(A),C_\ell(A))$ est libre car constitué de deux vecteurs non colinéaires.
Absurde !

$$\boxed{\text{On en déduit que toute famille de deux colonnes de } A \text{ est liée.}}$$

- La matrice A étant de rang 1 elle admet une colonne non nulle (sinon, en procédant par l'absurde, on démontre qu'elle est nulle et donc de rang 0).
Notons j_0 le numéro de cette colonne non nulle.
Soit $j \in [\![1,n]\!] \setminus \{j_0\}$. D'après le point précédente, la famille $\left(C_j(A),C_{j_0}(A)\right)$ est liée.
Autrement dit, il existe $(\lambda_j,\mu_j) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$ tel que :

$$\lambda_j\, C_j(A) + \mu_j\, C_{j_0}(A) = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$$

$$\text{ainsi :} \quad \lambda_j\, C_j(A) = -\mu_j\, C_{j_0}(A)$$

$$\text{et :} \quad C_j(A) = \underbrace{-\frac{\mu_j}{\lambda_j}}_{\alpha_j}\, C_{j_0}(A)$$

Notons que cette dernière écriture est valide car $\lambda_j \neq 0$. On le démontre par l'absurde.
Supposons $\lambda_j = 0$. Dans ce cas : $\mu_j\, C_{j_0}(A) = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.
Or, comme $C_{j_0}(A) \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$, on en déduit : $\mu_j = 0$.
Ainsi $(\alpha_j,\mu_j) = (0,0)$. Absurde !

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } j \in [\![1,n]\!], \text{ il existe } \alpha_j \in \mathbb{R},\ C_j(A) = \alpha_j\ C_{j_0}(A).}$$

□

b) En déduire qu'il existe deux matrices colonnes non nulles U et V de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = U\,{}^tV$.

Démonstration.
D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \alpha_1\, C_{j_0}(A) & \dots & \alpha_n\, C_{j_0}(A) \end{pmatrix} \\ &= C_{j_0}(A) \times \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} && \textit{(en remontant les calculs en } \textbf{\textit{6.c)}}\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } A = U\,{}^tV \text{ avec } U = C_{j_0}(A) \text{ et } V = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.}$$

□

8. Énoncer une caractérisation des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

Démonstration.

- D'après la question ***6.c)*** :

$$\begin{array}{l} A \text{ sécrit sous la forme } A = U{}^tV \\ \text{avec } (U, V) \in \big(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)^2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rg}(A) = 1$$

- D'après la question ***7.b)*** :

$$\mathrm{rg}(A) = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} A \text{ sécrit sous la forme } A = U{}^tV \\ \text{avec } (U, V) \in \big(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)^2 \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \quad \mathrm{rg}(A) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} A \text{ sécrit sous la forme } A = U{}^tV \\ \text{avec } (U, V) \in \big(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)^2 \end{array} \quad .}$$

□

Partie IV : Une caractérisation des matrices de rang 1 diagonalisables

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. On note U et V deux matrices colonnes non nulles de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = U\,{}^tV$ et on note $a = \mathrm{tr}(A)$.

9. Montrer que 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

Démonstration.

- D'après l'énoncé :

$$\mathrm{rg}(A) = 1 < n = \dim\big(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)$$

On en conclut que la matrice A n'est pas inversible.

$$\boxed{\text{Ainsi, 0 est valeur propre de } A.}$$

- Notons $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Considérons l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$ dont la représentation dans la base $\mathscr{B}$ est A. Par le théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc} \dim\big(\mathbb{R}^n\big) & = & \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) & + & \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ n & & \dim\big(E_0(f)\big) & & \mathrm{rg}(f) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ \dim\big(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big) & = & \dim\big(E_0(A)\big) & + & \mathrm{rg}(A) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \dim\big(E_0(A)\big) = \dim\big(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big) - \mathrm{rg}(A) = n - 1.}$$

□

10. Montrer : ${}^tV\,U = (a)$, puis : $A^2 = a\,A$.

Démonstration.
On reprend les notations de la **Partie III**.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} {}^tV\,U & = & \begin{pmatrix} v_1 & \ldots & v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{n} u_i\,v_i & \\ & = & \mathrm{tr}\left({}^tU\,V\right) & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{6.b)}}\textit{)} \\ & = & \mathrm{tr}(A) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } {}^tV\,U = (a).}$$

- D'autre part :

$$\begin{array}{rcll} A^2 & = & \left({}^tU\,V\right)^2 & \\ & = & \left({}^tU\,V\right)\,\left({}^tU\,V\right) & \\ & = & {}^tU\,\left(V\,{}^tU\right)\,V & \\ & = & a\,{}^tU\,V & \textit{(car } V\,{}^tU = a\textit{)} \\ & = & a\,A & \end{array}$$

$$\boxed{A^2 = a\,A}$$

□

11. Montrer que si $a = 0$, alors A n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration.

- Supposons $a = 0$. D'après la question précédente :

$$A^2 \ = \ 0\,A \ = \ 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$

- On en déduit que $P(X) = X^2$ est un polynôme annulateur de A. Ainsi :

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{\text{racines de } P\} = \{0\}$$

  Autrement dit, le réel 0 est la seule valeur propre possible de la matrice A.
  Or, d'après la question ***9.***, le réel 0 est bien valeur propre de A.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathrm{Sp}(A) = \{0\}.}$$

- Enfin, toujours d'après la question ***9.*** :

$$\dim\left(E_0(A)\right) = n - 1 < n = \dim\left(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right)$$

$$\boxed{\text{On en déduit que si } a = 0, \text{ la matrice } A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

□

12. On suppose $a \neq 0$. Calculer $A\,U$. Déduire des questions précédentes que A est diagonalisable.

Démonstration.

- D'après la question ***10.*** :
$$A^2 - a\,A \;=\; 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$
On en déduit que $P(X) = X^2 - a\,X = X\,(X-a)$ est un polynôme annulateur de A. Ainsi :
$$\text{Sp}(A) \subset \{\text{racines de } P\} = \{0, a\}$$

- Par ailleurs :
$$A\,U \;=\; \big(U\,{}^tV\big)\;U \;=\; U\big({}^tV\,U\big) \;=\; a\,U$$
On en déduit que a est valeur propre de A.
$$\boxed{\text{Comme de plus 0 est bien valeur propre de } A\text{, on a : } \text{Sp}(A) = \{0, a\}.}$$

- Considérons alors la famille $\mathcal{G}$ obtenue par concaténation des vecteurs d'une base de $E_0(A)$ et de U. Cette famille est :
  - × libre en tant que concaténation de deux familles libres de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes.
  - × telle que : $\text{Card}\big(\mathcal{G}\big) = (n-1)+1 = n = \dim\big(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)$.

  On en déduit que la famille $\mathcal{G}$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
$$\boxed{\text{Comme } \mathcal{G} \text{ est une base de vecteurs propres de } A\text{, la matrice } A \text{ est diagonalisable.}}$$
□

13. Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 soit diagonalisable.

Démonstration.
Considérons A une matrice de rang 1.

- D'après la question ***12.*** :
$$\text{tr}(A) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad A \text{ est diagonalisable}$$

- D'après la question ***11.*** :
$$\text{tr}(A) \neq 0 \quad \Leftarrow \quad A \text{ est diagonalisable}$$
En effet, par contraposée on démontre : $\text{tr}(A) \neq 0 \;\Rightarrow\; A$ n'est pas diagonalisable.

$$\boxed{\text{Ainsi, si } A \text{ une matrice de rang 1 : } \text{tr}(A) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$
□

Problème II (ESSEC I 2012)

Ce problème comporte deux parties relativement indépendantes.
Dans la première partie on étudie les lois log-normales. On s'intéresse dans la partie II à une modélisation du cours d'une action appelée modèle binomial ou de Cox-Ross-Rubinstein et à son comportement asymptotique.

Notations et définitions

- Les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
- On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
- On note respectivement $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X, lorsque celles-ci existent.
- Soit m un réel et σ un réel strictement positif. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi log-normale de paramètres (m, σ^2) si X est à valeurs strictement positives et si $\ln(X)$ suit la loi normale de paramètres (m, σ^2). On écrit alors $X \hookrightarrow \mathcal{LN}(m, \sigma^2)$.

Partie I - Quelques propriétés des lois log-normales

On note dans cette partie m un réel et σ un réel strictement positif.
Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi log-normale de paramètres (m, σ^2).
On pourra dans la suite utiliser la variable aléatoire $Y = \ln(X)$.

1. Soit a et b deux réels, a étant différent de 0. On rappelle que si U est une variable aléatoire qui suit une loi normale de paramètres (m, σ^2), alors $a\,U + b$ suit aussi une loi normale.
Quels en sont les paramètres ?

Démonstration.

- Tout d'abord, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(a\,U + b) \;=\; a\,\mathbb{E}(U) + b \;=\; am + b$$

- Ensuite :

$$\mathbb{V}(a\,U + b) \;=\; a^2\,\mathbb{V}(U) \;=\; a^2\,\sigma^2$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } aU + b \hookrightarrow \mathcal{N}\left(am + b, a^2\,\sigma^2\right).}$$

□

2. *Cas où $m = 0$.*
On suppose dans cette question 2 que $X \hookrightarrow \mathcal{LN}(0, \sigma^2)$.

a) *Densité.*
Exprimer la fonction de répartition F de X en fonction de Φ .
En déduire que X est une variable aléatoire à densité et que la fonction définie par :

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x\,\sigma\,\sqrt{2\pi}}\ \exp\left(-\dfrac{\big(\ln(x)\big)^2}{2\sigma^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

est une densité de probabilité de X.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme X suit une loi log-normale, d'après l'énoncé : $X(\Omega) \subset \left]0, +\infty\right[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x \in \left]-\infty, 0\right]$, alors $[X \leqslant x] = \varnothing$ car $X(\Omega) \subset \left]0, +\infty\right[$ (car $X(\Omega) \subset \left]0, +\infty\right[$). D'où :

$$F(x) \ = \ \mathbb{P}([X \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

  × si $x \in \left]0, +\infty\right[$, alors :

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathbb{P}([X \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([\ln(X) \leqslant \ln(x)]) && \textit{(par stricte croissance de la fonction } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ &= \mathbb{P}([Y \leqslant \ln(x)]) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[\frac{Y}{\sigma} \leqslant \frac{\ln(x)}{\sigma}\right]\right) && \textit{(car } \sigma > 0\textit{)} \\ &= \Phi\left(\frac{\ln(x)}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

En effet, d'après l'énoncé, comme $X \hookrightarrow \mathcal{LN}(0, \sigma^2)$, alors $Y \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$.
On obtient donc, d'après la question ***1.*** (appliquée à $a = \dfrac{1}{\sigma}$ et $b = 0$) : $\dfrac{Y}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.
En particulier, la fonction de répartition de la v.a.r. $\dfrac{Y}{\sigma}$ est la fonction Φ.

$$\boxed{\text{Finalement, } F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left]-\infty, 0\right] \\ \Phi\left(\dfrac{\ln(x)}{\sigma}\right) & \text{si } x \in \left]0, +\infty\right[\end{cases}}$$

- Montrons que X est une v.a.r. à densité.
  × La fonction F est continue :
    - sur $\left]-\infty, 0\right[$ en tant que fonction constante,
    - sur $\left]0, +\infty\right[$ en tant que composée de fonctions continues sur des intervalles adéquats (la fonction Φ est bien continue sur $\mathbb{R}$ car c'est la fonction de répartition d'une v.a.r. à densité),
    - en 0. En effet, d'une part : $\lim\limits_{x \to 0^-} F(x) = F(0) = 0$. D'autre part :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} F(x) &= \lim_{t \to -\infty} \Phi(t) && \textit{(car } \sigma > 0\textit{)} \\ &= 0 && \textit{(car } \Phi \textit{ est une fonction de répartition)} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\lim_{x \to 0^-} F(x) \ = \ F(0) \ = \ \lim_{x \to 0^+} F(x)$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } F \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

× La fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ avec des arguments similaires à ceux de la continuité sur ces intervalles.

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0.}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } X \text{ est une v.a.r. à densité.}}$$

Commentaire

Détaillons la continuité de la fonction F sur $]0, +\infty[$.
La fonction F est continue sur $]0, +\infty[$ car elle est la composée $F = \Phi \circ h_1$ de :

× $h_1 : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{\sigma}$ qui est :
  - continue sur $]0, +\infty[$,
  - telle que $h_1(]0, +\infty[) \subset \mathbb{R}$.

× Φ qui est continue sur $\mathbb{R}$, car c'est la fonction de répartition d'une v.a.r. à densité.

- On détermine une densité f de X en dérivant F sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ (qui sont bien des intervalles ouverts).

  × Soit $x \in \,]-\infty, 0[$.

$$f(x) \ = \ F'(x) \ = \ 0$$

  × Soit $x \in \,]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} f(x) &= F'(x) = \frac{1}{\sigma\, x}\ \Phi'\left(\frac{\ln(x)}{\sigma}\right) \\ &= \frac{1}{\sigma\, x}\ \varphi\left(\frac{\ln(x)}{\sigma}\right) \\ &= \frac{1}{\sigma\, x}\ \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\ \exp\left(-\frac{\left(\frac{\ln(x)}{\sigma}\right)^2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\sigma\, x \sqrt{2\,\pi}}\ \exp\left(-\frac{\big(\ln(x)\big)^2}{2\,\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

  × On choisit la valeur arbitraire : $f(0) = 0$.

$$\boxed{\text{Finalement, } f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \,]-\infty, 0] \\ \dfrac{1}{\sigma\, x\sqrt{2\,\pi}}\ \exp\left(-\dfrac{\big(\ln(x)\big)^2}{2\,\sigma^2}\right) & \text{si } x \in \,]0, +\infty[\end{cases}.}$$

□

b) *Espérance.*

(i) Établir l'existence de $\mathbb{E}(X)$ et l'égalité : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\sigma^2} - 2y\right)\right)\, dy$.

Démonstration.

- D'après le théorème de transfert, la v.a.r. $X = \mathrm{e}^Y$ admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^y\, \varphi_{0,\sigma^2}(y)\, dy$ est absolument convergente.
(on rappelle que φ_{0,σ^2} est une densité de Y car $Y \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$)

Or, pour tout $y \in \mathbb{R}$: $e^y\, \varphi_{0,\sigma^2}(y) > 0$.

Donc, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^y\, \varphi_{0,\sigma^2}(y)\, dy$ est absolument convergente, équivaut à montrer qu'elle est convergente.

- Montrons d'abord que l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} e^y\, \varphi_{0,\sigma^2}(y)\, dy$ est convergente.

  × La fonction $y \mapsto e^y\, \varphi_{0,\sigma^2}(y)$ est continue sur $[1, +\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} e^y\, \varphi_{0,\sigma^2}(y)\, dy$ est donc uniquement impropre en $+\infty$.

  × Soit $y \in [1, +\infty[$.

$$e^y\, \varphi_{0,\sigma^2}(y) \ = \ e^y\, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \ = \ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}+y}$$

  On a donc :

  - tout d'abord : $\forall y \in [1, +\infty[$, $e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}+y} > 0$ et $\dfrac{1}{y^2} > 0$
  - ensuite : $e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}+y} = \underset{y\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{y^2}\right)$. En effet :

$$\frac{e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}+y}}{\frac{1}{y^2}} \ = \ y^2\, e^{-y^2\left(\frac{1}{2\sigma^2}-\frac{1}{y}\right)} \ = \ y^2\, e^{-y^2} e^{\frac{1}{2\sigma^2}-\frac{1}{y}}$$

    Or : $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} y^2\, e^{-y^2} = 0$ par croissances comparées. De plus : $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} e^{\frac{1}{2\sigma^2}-\frac{1}{y}} = e^{\frac{1}{2\sigma^2}}$.

    D'où : $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} \frac{e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}+y}}{\frac{1}{y^2}} = 0$.

  - l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{y^2}\, dy$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant $2 > 1$. Donc elle est convergente.

  Par critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} e^y\, \varphi_{0,\sigma^2}(y)\, dy$ est convergente.

- De même, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} e^y\, \varphi_{0,\sigma^2}(y)\, dy$ est convergente.
- Enfin, comme la fonction $y \mapsto e^y\, \varphi_{0,\sigma^2}(y)$ est continue sur le segment $[-1, 1]$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^y\, \varphi_{0,\sigma^2}(y)\, dy$ est bien définie.

Finalement, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^y\, \varphi_{0,\sigma^2}(y)\, dy$ converge, la v.a.r. X admet donc une espérance.

- On obtient alors :

$$\mathbb{E}(Y) \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} e^y\, \varphi_{0,\sigma^2}(y)\, dy \ = \ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^y\, e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\, dy \ = \ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\sigma^2}-2y\right)}\, dy$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) \ = \ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\sigma^2}-2y\right)}\, dy}$$

Commentaire

On pouvait également répondre à cette question en utilisant une densité de X : la fonction f trouvée à la question précédente.

- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer qu'elle est convergente pour un calcul de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^r\, f(x)\, dx$.
- La fonction f est nulle en dehors de $[0, +\infty[$, donc :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx \;=\; \int_{0}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$
- La fonction $x \mapsto x\, f(x)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$ est donc uniquement impropre en $+\infty$.
- De plus, soit $x \in\,]0, +\infty[$:
$$x\, f(x) \;=\; \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\, \sigma \sqrt{2\,\pi}}\ \exp\left(-\frac{\big(\ln(x)\big)^2}{2\,\sigma^2}\right) \;=\; \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}}\ \exp\left(-\frac{\big(\ln(x)\big)^2}{2\,\sigma^2}\right)$$
On obtient alors :
  × tout d'abord : $\forall x \in [1, +\infty[$, $\exp\left(-\dfrac{\big(\ln(x)\big)^2}{2\,\sigma^2}\right) > 0$ et $\dfrac{1}{x^2} > 0$.
  × ensuite : $\exp\left(-\dfrac{\big(\ln(x)\big)^2}{2\,\sigma^2}\right) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ (à démontrer)
  × l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant $2 > 1$. Elle est donc convergente.

  Par critère de négligeabilité des intégrales généralisés de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$ est convergente.
- De plus, la fonction $x \mapsto x\, f(x)$ est continue sur le segment $[0, 1]$. L'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{1} x\, f(x)\, dx$ est donc bien définie.
- Finalement $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$ converge, donc X admet une espérance.
- Montrons enfin : $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x\, f(x)\, dx \;=\; \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2} - 2y\right)\right)\, dy$.

× Soit $B \in [1, +\infty[$. On effectue le changement de variable $\boxed{y = \ln(x)}$.

$y = \ln(x)$ (donc $x = \mathrm{e}^y$)
$\hookrightarrow dy = \dfrac{1}{x}\, dx$ et $dx = \mathrm{e}^y\, dy$
- $x = 1 \;\Rightarrow\; y = 0$
- $x = B \;\Rightarrow\; y = \ln(B)$

Ce changement de variable est valide car $\psi : y \mapsto \mathrm{e}^y$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \ln(B)]$.

Commentaire

On obtient :

$$\begin{aligned}\int_1^B x\, f(x)\ dx &= \int_0^{\ln(B)} e^y f(e^y)\ dy \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\ln(B)} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2} - 2y\right)\right)\ dy\end{aligned}$$

Ainsi, par passage à la limite quand B tend vers $+\infty$ (on a déjà montré que $\displaystyle\int_1^{+\infty} x\, f(x)\ dx$ converge) :

$$\int_1^{+\infty} x\, f(x)\ dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2} - 2y\right)\right)\ dy$$

× Soit $A \in\ ]0,1]$.
On effectue le même changement de variable sur le segment $[A,1]$ et en faisant tendre A vers 0, on obtient :

$$\int_0^1 x\, f(x)\ dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2} - 2y\right)\right)\ dy$$

Finalement, on retrouve bien :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_0^{+\infty} x\, f(x)\ dx \\ &= \int_0^1 x\, f(x)\ dx + \int_1^{+\infty} x\, f(x)\ dx \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2} - 2y\right)\right) + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2} - 2y\right)\right) \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2} - 2y\right)\right)\end{aligned}$$

□

(ii) En utilisant le changement de variable $t = \dfrac{y}{\sigma} - \sigma$, en déduire $\mathbb{E}(X)$ en fonction de σ.

Démonstration.

Comme suggéré par l'énoncé, on effectue le changement de variable $\boxed{t = \dfrac{y}{\sigma} - \sigma}$.

$$\left|\begin{array}{l} t = \dfrac{y}{\sigma} - \sigma \quad (\text{donc } y = \sigma(t+\sigma)) \\ \hookrightarrow dt = \dfrac{1}{\sigma}\ dy \quad \text{et} \quad dy = \sigma\ dt \\ \bullet\ y = -\infty \ \Rightarrow\ t = -\infty \text{ (car } \sigma > 0) \\ \bullet\ y = +\infty \ \Rightarrow\ t = +\infty \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car $\psi : t \mapsto \sigma\,(t+\sigma)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et les intégrales en présence sont convergentes d'après la question précédente.

On obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2} - 2y\right)\right) \\
&= \frac{1}{\cancel{\sigma}\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\big(\sigma(t+\sigma)\big)^2}{\sigma^2} - 2\sigma(t+\sigma)\right)\right) (\cancel{\sigma}\ dt) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\cancel{\sigma^2}(t+\sigma)^2}{\cancel{\sigma^2}} - 2\sigma\, t - 2\sigma^2\right)\right)\ dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(t^2 + \cancel{2\sigma\, t} + \sigma^2 - \cancel{2\sigma\, t} - 2\sigma^2\right)\right)\ dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\, t^2 + \frac{1}{2}\, \sigma^2\right)\ dt \\
&= \mathrm{e}^{\frac{\sigma^2}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\, t^2\right)\ dt \\
&= \mathrm{e}^{\frac{\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\ dt \\
&= \mathrm{e}^{\frac{\sigma^2}{2}} \times 1 && \textit{(car φ est une densité)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \mathrm{e}^{\frac{\sigma^2}{2}}}$$

Commentaire

- Le programme officiel stipule que « les changements de variables affines pourront être utilisés directement sur des intégrales sur un intervalle quelconque ». Pour autant, ce type de changement de variable ne peut se faire qu'après avoir démontré la convergence (ce qu'on a fait en question précédente).
- Cela signifie aussi que, de manière générale, on ne peut effectuer de changement de variable directement sur une intégrale impropre : on doit se ramener au préalable sur une intégrale sur un segment.

□

c) *Variance.*

(i) Soit α un réel non nul. Montrer que X^α suit une loi log-normale dont on précisera les paramètres.

Démonstration.

- On note $Z = X^\alpha$ et $h : x \mapsto x^\alpha$ de sorte que : $Z = h(X)$.
On rappelle : $X(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$. Alors :

$$Z(\Omega) \;=\; \big(h(X)\big)(\Omega) \;=\; h\big(X(\Omega)\big) \;\subset\; h(]0, +\infty[)$$

Or la fonction h est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ (car $\alpha > 0$), donc :

$$h(]0, +\infty[) \;=\; \left]\lim_{x\to 0} h(x),\ \lim_{x\to+\infty} h(x)\right[\;=\;]0, +\infty[$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } Z(\Omega) \subset \,]0, +\infty[.}$$

- Montrons maintenant que la v.a.r. $\ln(Z)$ suit une loi normale.
  Tout d'abord :
  $$\ln(Z) \; = \; \ln\left(X^\alpha\right) \; = \; \alpha \, \ln(X) \; = \; \alpha \, Y$$
  Or, comme $X \hookrightarrow \mathcal{LN}(0, \sigma^2)$, alors : $Y \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$.
  Donc, d'après la question ***1.*** (appliquée à $a = \alpha$ et $b = 0$) :
  $$\ln(Z) = \alpha \, Y \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \alpha^2 \, \sigma^2\right)$$

$$\boxed{\text{Par définition d'une loi log-normale, on en déduit : } X^\alpha \hookrightarrow \mathcal{LN}(0, \alpha^2 \, \sigma^2).}$$ □

(ii) En déduire que X admet une variance et : $\mathbb{V}(X) = \mathrm{e}^{\sigma^2} \left(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\right)$.

Démonstration.
- La v.a.r. X admet une variance si et seulement si elle admet un moment d'ordre 2.
  Donc X admet une variance si et seulement si la v.a.r. X^2 admet une espérance.
- Or, d'après la question précédente : $X^2 \hookrightarrow \mathcal{LN}(0, 2^2 \, \sigma^2)$.
  Ainsi, d'après la question ***2.b)(i)***, X^2 admet une espérance.
  $$\boxed{\text{La v.a.r. } X \text{ admet donc une variance.}}$$
- De plus, d'après ***2.b)(ii)*** :
  $$\mathbb{E}(X^2) \; = \; \mathrm{e}^{\frac{4 \, \sigma^2}{2}} \; = \; \mathrm{e}^{2 \, \sigma^2}$$
- On en déduit, par formule de Koenig-Huygens :
  $$\mathbb{V}(X) \; = \; \mathbb{E}(X^2) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2 \; = \; \mathrm{e}^{2 \, \sigma^2} - \left(\mathrm{e}^{\frac{\sigma^2}{2}}\right)^2 \; = \; \mathrm{e}^{2 \, \sigma^2} - \mathrm{e}^{\sigma^2} \; = \; \mathrm{e}^{\sigma^2} \left(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\right)$$
  $$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{V}(X) = \mathrm{e}^{\sigma^2} \left(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\right).}$$ □

3. On reprend le cas général : $X \hookrightarrow \mathcal{LN}(m, \sigma^2)$.

a) Soit μ un réel strictement positif.
Montrer que μX suit une loi log-normale de paramètres $\left(m + \ln(\mu), \sigma^2\right)$.

Démonstration.
- On note $S = \mu \, X$ et $h : x \mapsto \mu \, x$ de sorte que : $S = h(X)$.
  On rappelle : $X(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$. Ainsi :
  $$S(\Omega) \; = \; \left(h(X)\right)(\Omega) \; = \; h\big(X(\Omega)\big) \; \subset \; h(]0, +\infty[)$$
  Or, la fonction h est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ (car $\mu > 0$), donc :
  $$h(]0, +\infty[) \; = \; \left]\lim_{x \to 0} \; h(x), \lim_{x \to +\infty} \; h(x)\right[\; = \;]0, +\infty[$$
  $$\boxed{\text{Ainsi : } S(\Omega) \subset \,]0, +\infty[.}$$
- Montrons maintenant : $\ln(S) \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m + \ln(\mu), \sigma^2\right)$.
  Tout d'abord :
  $$\ln(S) \; = \; \ln(\mu \, X) \; = \; \ln(X) + \ln(\mu) \; = \; Y + \ln(\mu)$$
  Or, comme $X \hookrightarrow \mathcal{LN}(m, \sigma^2)$, alors : $Y \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$.
  Donc, d'après la question ***1.*** (appliquée à $a = 1$ et $b = \ln(\mu)$) :
  $$\ln(S) = Y + \ln(\mu) \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m + \ln(\mu), \sigma^2\right)$$

$$\boxed{\text{Par définition d'une loi log-normale, on en déduit : } \mu \, X \hookrightarrow \mathcal{LN}(m + \ln(\mu), \sigma^2).}$$ □

b) Justifier l'existence de $\mathbb{E}(X)$, de $\mathbb{V}(X)$, et établir :

$$\mathbb{E}(X) = \mathrm{e}^{m+\frac{\sigma^2}{2}} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = \mathrm{e}^{2m+\sigma^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1\right)$$

Démonstration.

- Tout d'abord :
  - × d'après les questions ***2.b)*** et ***2.c)***, on sait qu'une v.a.r. Y de loi $\mathcal{LN}(0,\sigma^2)$ admet une variance (et donc une espérance). On cherche donc à se ramener à une telle loi.
  - × d'après la question précédente, pour tout $\mu > 0$, la v.a.r. $\mu\, X$ suit la loi $\mathcal{LN}(m+\ln(\mu),\sigma^2)$.

  On cherche donc un réel $\mu_0 > 0$ tel que $m + \ln(\mu_0) = 0$. Alors :
  - × on saura d'après la question précédente : $\mu_0\, X \hookrightarrow \mathcal{LN}(0,\sigma^2)$,
  - × on pourra alors en déduire l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(\mu_0\, X)$ et $\mathbb{V}(\mu_0\, X)$ d'après les questions ***2.b)*** et ***2.c)***,
  - × on obtiendra alors l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
- Déterminons donc μ_0 tel que : $m + \ln(\mu_0) = 0$.

$$m + \ln(\mu_0) = 0 \;\Leftrightarrow\; \ln(\mu_0) = -m \;\Leftrightarrow\; \mu_0 = \mathrm{e}^{-m}$$

  On pose donc $\mu_0 = \mathrm{e}^{-m} > 0$.
- D'après la question précédente, on obtient :

$$\mathrm{e}^{-m}\, X \;\hookrightarrow\; \mathcal{LN}(0,\sigma^2)$$

- On en déduit, d'après les questions ***2.b)*** et ***2.c)(ii)***, que la v.a.r. $U = \mathrm{e}^{-m}\, X$ admet une espérance et une variance. De plus :

$$\mathbb{E}(U) = \mathrm{e}^{\frac{\sigma^2}{2}} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(U) = \mathrm{e}^{\sigma^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1\right)$$

  On en déduit que la v.a.r. $X = \mathrm{e}^{m}\, U$ admet une espérance et une variance en tant que multiple d'une v.a.r. qui en admet une.
- De plus, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X) \;=\; \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{m}\, U\right) \;=\; \mathrm{e}^{m}\, \mathbb{E}(U) \;=\; \mathrm{e}^{m}\, \mathrm{e}^{\frac{\sigma^2}{2}} \;=\; \mathrm{e}^{m+\frac{\sigma^2}{2}}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \mathrm{e}^{m+\frac{\sigma^2}{2}}}$$

- Enfin :

$$\mathbb{V}(X) \;=\; \mathbb{V}\left(\mathrm{e}^{m}\, U\right) \;=\; \left(\mathrm{e}^{m}\right)^2 \mathbb{V}(U) \;=\; \mathrm{e}^{2m} \times \mathrm{e}^{\sigma^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1\right) \;=\; \mathrm{e}^{2m+\sigma^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1\right)$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathrm{e}^{2m+\sigma^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1\right)}$$

Commentaire

Revenons sur le choix de $\mu = \mathrm{e}^{-m}$.

- Toute la question ***2.*** consiste à démontrer des propriétés sur la loi $\mathcal{LN}(0,\sigma^2)$.
- En question ***3.***, on souhaite maintenant démontrer des propriétés sur la loi $\mathcal{LN}(m,\sigma^2)$. L'objectif est alors :
  1) se ramener à la loi $\mathcal{LN}(0,\sigma^2)$,
  2) exploiter les résultats de la question ***2.***,
  3) en déduire les résultats sur la loi $\mathcal{LN}(m,\sigma^2)$.
- On choisit donc μ de telle sorte à ce que : $m + \ln(\mu) = 0$. Autrement dit : $\mu = \mathrm{e}^{-m}$.

□

Partie II - Le modèle binomial de Cox-Ross-Rubinstein

Soit n un entier naturel non nul.
On souhaite modéliser l'évolution du cours d'une action entre les dates 0 et t fixé, strictement positif.
On suppose qu'initialement ce cours est $S_{0,n} = 1$ et si l'on note $S_{k,n}$ la valeur aléatoire de ce cours à la date $\dfrac{kt}{n}$, $k \in \{1, ..., n\}$, on a la relation :

$$S_{k,n} \;=\; S_{k-1,n} \times \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right)$$

où :

- μ est une constante réelle strictement positive liée au rendement moyen de l'action sur une durée égale à t ;
- v est une constante réelle strictement positive appelée volatilité de l'action sur la durée t ;
- $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$ (autrement dit : $\mathbb{P}([Y_k = 1]) = \mathbb{P}([Y_k = -1]) = \dfrac{1}{2}$).

  On suppose que n est assez grand pour que $1 + \dfrac{\mu}{n} - \dfrac{v}{\sqrt{n}} > 0$.

On admet que $S_{0,n}, ..., S_{n,n}$ sont des variables aléatoires discrètes.
On note C_n la variable aléatoire $S_{n,n}$, qui modélise le cours de l'action à l'instant t.

4. Simulation de la variable aléatoire C_n.

a) Que renvoie la fonction **Scilab** suivante ?

```
1  function Y = mystere()
2    u = rand()
3    if u < 1/2 then
4      Y = -1
5    else
6      Y = 1
7    end
8  endfunction
```

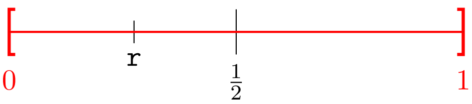
Démonstration.

- La fonction débute par la ligne 2 :

```
2    u = rand()
```

  L'instruction `rand()` renvoie un réel choisi aléatoirement dans $[0, 1]$.
  Plus formellement, il s'agit de simuler une v.a.r. U telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$.

- Cette valeur `r` choisie aléatoirement dans $[0, 1]$ permet d'obtenir la valeur `Y`.



  Deux cas se présentent.

  – Si $\texttt{r} \leqslant \dfrac{1}{2}$: alors, on affecte à la variable `Y` la valeur -1.
  Ce cas se produit avec la probabilité :

$$\mathbb{P}\left(\left[0 \leqslant U \leqslant \frac{1}{2}\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[U \leqslant \frac{1}{2}\right]\right) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}([Y = -1])$$

– Si `r` $> \dfrac{1}{2}$: alors, on affecte à la variable `Y` la valeur 1.
Ce cas se produit avec la probabilité :

$$\mathbb{P}\left(\left[\frac{1}{2} < U \leqslant 1\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[\frac{1}{2} < U\right]\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left[U \leqslant \frac{1}{2}\right]\right) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}([Y = 1])$$

On en déduit que la fonction `mystere` simule la v.a.r. Y.

Commentaire

- Plus généralement, cette méthode permet d'obtenir une simulation de n'importe quelle v.a.r. X finie. Détaillons ce résultat. Soit X une v.a.r. telle que :
  × $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$,
  × $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}([X = x_i]) = p_i$.

  L'idée est alors de découper le segment $[0, 1]$ en n intervalles I_1, ..., I_n.
  La taille du premier intervalle est p_1, celle du deuxième est p_2 et ainsi de suite.
  De sorte que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

  $$\mathbb{P}([U \in I_i]) = p_i = \mathbb{P}([X = x_i])$$

  Il n'y a plus qu'à écrire le programme correspondant.
- Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, dire simplement que la fonction `mystere` renvoie une simulation de la v.a.r. Y démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir tous les points alloués à cette question.
  On procédera de même dans les autres questions **Scilab**.

□

b) Dans la déclaration de fonction qui suit, remplacer les « ··· » par des expressions en **Scilab** pour que la fonction ainsi déclarée simule la variable aléatoire C_n.

```
function C = SimuC(n, mu, v)
  C = 1
  for k = ...
    C = C ⋆ ...
  end
endfunction
```

Démonstration.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `SimuC`,
  × elle prend en entrée 3 paramètres `n`, `mu` et `v`,
  × elle admet pour variable de sortie `C`.

```
function C = SimuC(n, mu, v)
```

On initialise la variable `C` à : $S_{0,n} = 1$.

```
  C = 1
```

- **Structure itérative**
On met ensuite en place une structure itérative (boucle for) pour mettre à jour la variable `C`. Pour cela on utilise la relation :
$$S_{k,n} \;=\; S_{k-1,n} \times \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right)$$
On effectue donc une boucle pour `k` variant de 1 à n puisque $C_n = S_{n,n}$.
On rappelle qu'on simule la v.a.r. Y_k à l'aide de la fonction `mystere`. On complète donc la fonction `SimuC` de la façon suivante :

```
for k = 1:n
  C = C * (1 + mu / n + (v / sqrt(n)) * mystere())
end
```

□

5. a) Calculer l'espérance et la variance commune aux Y_k.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
- La v.a.r. Y_k admet une variance (donc une espérance), car c'est une v.a.r. finie.
- Par définition de l'espérance :
$$\mathbb{E}(Y_k) \;=\; -1 \times \mathbb{P}([Y_k = -1]) + 1 \times \mathbb{P}([Y_k = 1]) \;=\; -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \;=\; 0$$
- Par théorème de transfert :
$$\mathbb{E}(Y_k^2) \;=\; (-1)^2 \times \mathbb{P}([Y_k = -1]) + 1^2 \times \mathbb{P}([Y_k = 1]) \;=\; \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \;=\; 1$$
Par formule de Koenig-Huygens :
$$\mathbb{V}(Y_k) \;=\; \mathbb{E}(Y_k^2) - \big(\mathbb{E}(Y_k)\big)^2 \;=\; 1 - 0^2 \;=\; 1$$
$$\boxed{\mathbb{E}(Y_k) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Y_k) = 1.}$$

□

b) (i) Montrer l'égalité : $C_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right)$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(m)$ où $\mathcal{P}(m)$: $S_{m,n} = \displaystyle\prod_{k=1}^{m} \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right)$

▸ **Initialisation**
D'une part :
$$\begin{aligned} S_{1,n} &= S_{1-1,n} \times \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_1\right) \quad \textit{(d'après l'énoncé)} \\ &= S_{0,n} \times \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_1\right) \\ &= 1 \times \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_1\right) \end{aligned}$$
D'autre part :
$$\prod_{k=1}^{1} \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right) \;=\; \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_1\right)$$
D'où $\mathcal{P}(1)$.

▶ **Hérédité** : soit $m \in \mathbb{N}^*$.
Supposons $\mathcal{P}(m)$ et démontrons $\mathcal{P}(m+1)$ (*i.e.* $S_{m+1,n} = \prod\limits_{k=1}^{m+1} \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right)$).

$$\begin{array}{rcll} S_{m+1,n} & = & S_{m,n} \times \left(1 + \dfrac{\mu}{n} + \dfrac{v}{\sqrt{n}}\, Y_{m+1}\right) & \textit{(d'après l'énoncé)} \\ & = & \left(1 + \dfrac{\mu}{n} + \dfrac{v}{\sqrt{n}}\, Y_{m+1}\right) \prod\limits_{k=1}^{m} \left(1 + \dfrac{\mu}{n} + \dfrac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right) & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & \prod\limits_{k=1}^{m+1} \left(1 + \dfrac{\mu}{n} + \dfrac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right) & \end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(m+1)$.

Ainsi, par principe de récurrence : $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $S_{m,n} = \prod\limits_{k=1}^{m} \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right)$.

$$\boxed{\text{En particulier : } C_n = S_{n,n} = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right).}$$

Commentaire

Remarquons que l'on démontre bien ici une égalité entre variables aléatoires.

□

(ii) En déduire : $\mathbb{E}(C_n) = \left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^n$ et $\mathbb{V}(C_n) = \left(\left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^2 + \frac{v^2}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^{2n}$.

Démonstration.

- La v.a.r. C_n admet une variance (donc une espérance) en tant que v.a.r. finie (C_n est un produit de v.a.r. finies).
- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(C_n) & = & \mathbb{E}\left(\prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{\mu}{n} + \dfrac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right)\right) \\ & = & \prod\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(1 + \dfrac{\mu}{n} + \dfrac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right) \end{array}$$

  où la dernière égalité est obtenue car les v.a.r. $1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_1$, ..., $1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_n$ sont indépendantes par lemme des coalitions.
- Or, soit $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}\left(1 + \dfrac{\mu}{n} + \dfrac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right) & = & 1 + \dfrac{\mu}{n} + \dfrac{v}{\sqrt{n}}\, \mathbb{E}(Y_k) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ & = & 1 + \dfrac{\mu}{n} + \cancel{\dfrac{v}{\sqrt{n}} \times} 0 & \textit{(d'après } \textbf{\textit{5.a)}}\textit{)} \\ & = & 1 + \dfrac{\mu}{n} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{E}(C_n) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\mu}{n}\right) = \left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^n.}$$

- Ensuite :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(C_n^2) &= \mathbb{E}\left(\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}\,Y_k\right)\right)^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}\,Y_k\right)^2\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(\left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}\,Y_k\right)^2\right)
\end{aligned}$$

où la dernière égalité est obtenue car les v.a.r. $\left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}\,Y_1\right)^2, \ldots, \left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}\,Y_n\right)^2$ sont indépendantes par lemme des coalitions.

- Or, soit $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}\,Y_k\right)^2\right) &= \mathbb{E}\left(\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2+2\left(1+\frac{\mu}{n}\right)\frac{v}{\sqrt{n}}\,Y_k+\frac{v^2}{n}\,Y_k^2\right) \\
&= \left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2+2\left(1+\frac{\mu}{n}\right)\frac{v}{\sqrt{n}}\,\mathbb{E}(Y_k)+\frac{v^2}{n}\,\mathbb{E}(Y_k^2) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
&= \left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2+\cancel{2\left(1+\frac{\mu}{n}\right)\frac{v}{\sqrt{n}}\times 0}+\frac{v^2}{n}\times 1 && \textit{(d'après \textbf{5.a)})} \\
&= \left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2+\frac{v^2}{n}
\end{aligned}$$

- D'où :

$$\mathbb{E}(C_n^2) = \prod_{k=1}^{n}\left(\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2+\frac{v^2}{n}\right) = \left(\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2+\frac{v^2}{n}\right)^n$$

- Par formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(C_n) = \mathbb{E}(C_n^2)-\big(E(C_n)\big)^2 = \left(\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2+\frac{v^2}{n}\right)^n-\left(\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^n\right)^2$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{V}(C_n) = \left(\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2+\frac{v^2}{n}\right)^n-\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{2n}.}$$

□

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(C_n)$ et montrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{V}(C_n) = \mathrm{e}^{2\mu}\big(\mathrm{e}^{v^2}-1\big)$.
Déterminer les paramètres de la loi log-normale ayant pour espérance la première limite et pour variance la seconde.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{E}(C_n) = \left(1+\frac{\mu}{n}\right)^n = \exp\left(\ln\left(\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^n\right)\right) = \exp\left(n\,\ln\left(1+\frac{\mu}{n}\right)\right)$$

Par ailleurs, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\mu}{n} = 0$, on a : $\ln\left(1+\frac{\mu}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mu}{n}$. D'où :

$$n\,\ln\left(1+\frac{\mu}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\,\frac{\mu}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \cancel{n}\frac{\mu}{\cancel{n}} = \mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mu$$

Or la fonction exp est continue en μ, donc, par composition de **limites**, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(C_n) = \mathrm{e}^{\mu}$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(C_n) = \mathrm{e}^{\mu}}$$

Commentaire

- On rappelle que pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, on a :
$$\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$$
Ce résultat est obtenu par composition des limites à partir du résultat : $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.
- Lorsqu'on étudie une suite de la forme $\left(u_n{}^{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, il est classique d'utiliser l'écriture :
$$u_n{}^{a_n} \ = \ \exp\left(a_n \ \ln(u_n)\right)$$
(il faut évidemment vérifier au préalable : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$)
Cette écriture n'est autre que la définition de $u_n{}^{a_n}$ si a_n n'est pas un entier. Il faut donc systématiquement penser à cette écriture dans ce cas. Comme le démontre la question précédente, cette écriture peut aussi être utile dans le cas où a_n est entier.

- Déterminons, si elle existe, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{V}(C_n)$.
  × Tout d'abord, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{\mu}{n}\right)^n = e^{\mu}$, on en déduit :
$$\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{2n} \ = \ \left(\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^n\right)^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (e^{\mu})^2 = e^{2\mu}$$
  × Ensuite :
$$\begin{aligned}\left(\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2+\frac{v^2}{n}\right)^n &= \exp\left(n\ \ln\left(\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2+\frac{v^2}{n}\right)\right)\\ &= \exp\left(n\ \ln\left(1+2\,\frac{\mu}{n}+\frac{\mu^2}{n^2}+\frac{v^2}{n}\right)\right)\\ &= \exp\left(n\ \ln\left(1+(2\,\mu+v^2)\ \frac{1}{n}+\frac{\mu^2}{n^2}\right)\right)\end{aligned}$$
  Par ailleurs, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (2\mu+v^2)\ \dfrac{1}{n}+\dfrac{\mu^2}{n^2} = 0$, on a :
$$\ln\left(1+(2\,\mu+v^2)\ \frac{1}{n}+\frac{\mu^2}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \left((2\,\mu+v^2)\ \frac{1}{n}+\frac{\mu^2}{n^2}\right)$$
  D'où :
$$\begin{aligned}n\ \ln\left(1+(2\,\mu+v^2)\ \frac{1}{n}+\frac{\mu^2}{n^2}\right) &\underset{n\to+\infty}{\sim} n\left((2\,\mu+v^2)\ \frac{1}{n}+\frac{\mu^2}{n^2}\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \cancel{n}\times\frac{1}{\cancel{n}}\left(2\,\mu+v^2+\frac{\mu^2}{n}\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\,\mu+v^2\end{aligned}$$
  Or la fonction exp est continue en $2\,\mu+v^2$, donc, par composition de **limites** :
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2+\frac{v^2}{n}\right)^n = e^{2\,\mu+v^2}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \lim_{n\to+\infty} \mathbb{V}(C_n) \ = \ e^{2\,\mu+v^2}-e^{2\,\mu} \ = \ e^{2\,\mu}\left(e^{v^2}-1\right).}$$

- D'après la question ***3.b)***, on cherche des paramètres m et σ^2 tels que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{e}^{m+\frac{\sigma^2}{2}} & = & \mathrm{e}^{\mu} \\ \mathrm{e}^{2m+\sigma^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1\right) & = & \mathrm{e}^{2\mu}\left(\mathrm{e}^{v^2}-1\right) \end{array}\right.$$

On souhaite donc résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} m & + & \dfrac{\sigma^2}{2} & = & \mu \\ 2m & + & \sigma^2 & = & 2\mu \\ & & \sigma^2 & = & v^2 \end{array}\right. \underset{}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2\,L_1}{\Longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{rcrcl} m & + & \dfrac{\sigma^2}{2} & = & \mu \\ & & \sigma^2 & = & v^2 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow 2\,L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} 2m & = & 2\mu - v^2 \\ \sigma^2 & = & v^2 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, en choisissant } X \hookrightarrow \mathcal{LN}\left(\dfrac{2\mu - v^2}{2}, v^2\right)\text{, on obtient, d'après } \textbf{\textit{3.b)}} : \\ \mathbb{E}(X) = \mathrm{e}^{\mu} \text{ et } \mathbb{V}(X) = \mathrm{e}^{2\mu}\left(\mathrm{e}^{v^2}-1\right).\end{array}}$$

$\square$

6. a) Expliciter un couple de réels (a_n, b_n) tel que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right) = a_n + b_n\, Y_k$$

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent :

× si $\omega \in [Y_k = -1]$, alors $Y_k(\omega) = -1$. On obtient d'une part :

$$\ln\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right) \;=\; \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} - \frac{v}{\sqrt{n}}\right)$$

D'autre part :

$$a_n + b_n\, Y_k \;=\; a_n - b_n$$

On obtient : $a_n - b_n \;=\; \ln\left(1 + \dfrac{\mu}{n} - \dfrac{v}{\sqrt{n}}\right)$.

× si $\omega \in [Y_k = 1]$, alors $Y_k(\omega) = 1$. Alors, en raisonnant comme précédemment :

$$a_n + b_n \;=\; \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\right)$$

Comme $([Y_k = -1], [Y_k = 1])$ forme un système complet d'événements, on en déduit :

$$\ln\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right) = a_n + b_n\, Y_k$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcl} a_n & - & b_n & = & \ln\left(1 + \dfrac{\mu}{n} - \dfrac{v}{\sqrt{n}}\right) \\ a_n & + & b_n & = & \ln\left(1 + \dfrac{\mu}{n} + \dfrac{v}{\sqrt{n}}\right) \end{array}\right.$$

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{\begin{array}{rcrcl} a_n & - & b_n & = & \ln\left(1 + \dfrac{\mu}{n} - \dfrac{v}{\sqrt{n}}\right) \\ & & 2b_n & = & \ln\left(1 + \dfrac{\mu}{n} + \dfrac{v}{\sqrt{n}}\right) - \ln\left(1 + \dfrac{\mu}{n} - \dfrac{v}{\sqrt{n}}\right) \end{array}\right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow 2\,L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{\begin{array}{rcl} 2a_n & = & \ln\left(1 + \dfrac{\mu}{n} + \dfrac{v}{\sqrt{n}}\right) + \ln\left(1 + \dfrac{\mu}{n} - \dfrac{v}{\sqrt{n}}\right) \\ 2b_n & = & \ln\left(1 + \dfrac{\mu}{n} + \dfrac{v}{\sqrt{n}}\right) - \ln\left(1 + \dfrac{\mu}{n} - \dfrac{v}{\sqrt{n}}\right) \end{array}\right.$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Finalement : } \ln\left(1 + \dfrac{\mu}{n} + \dfrac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right) = a_n + b_n\, Y_k \text{ si et seulement si} \\ a_n = \dfrac{1}{2}\left(\ln\left(1 + \dfrac{\mu}{n} + \dfrac{v}{\sqrt{n}}\right) + \ln\left(1 + \dfrac{\mu}{n} - \dfrac{v}{\sqrt{n}}\right)\right) \text{ et } b_n = \dfrac{1}{2}\left(\ln\left(1 + \dfrac{\mu}{n} + \dfrac{v}{\sqrt{n}}\right) - \ln\left(1 + \dfrac{\mu}{n} - \dfrac{v}{\sqrt{n}}\right)\right). \end{array}}$$

Commentaire

On peut noter que $\ln\left(1 + \dfrac{\mu}{n} - \dfrac{v}{\sqrt{n}}\right)$ et $\ln\left(1 + \dfrac{\mu}{n} + \dfrac{v}{\sqrt{n}}\right)$ sont bien définis car, d'après l'énoncé (en début de ***Partie II***) : $1 + \dfrac{\mu}{n} - \dfrac{v}{\sqrt{n}} > 0$.

Et on a donc : $1 + \dfrac{\mu}{n} + \dfrac{v}{\sqrt{n}} \geqslant 1 + \dfrac{\mu}{n} - \dfrac{v}{\sqrt{n}} > 0$

□

b) En déduire : $\ln(C_n) = n\, a_n + b_n \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après ***5.b)(i)*** : $C_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{\mu}{n} + \dfrac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right)$.
  Or $1 + \dfrac{\mu}{n} + \dfrac{v}{\sqrt{n}} > 0$ et $1 + \dfrac{\mu}{n} - \dfrac{v}{\sqrt{n}} > 0$, on en déduit : $C_n(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$.
  Donc la v.a.r. $\ln(C_n)$ est bien définie.
- Ensuite :

$$\begin{array}{rcll} \ln(C_n) & = & \ln\left(\prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{\mu}{n} + \dfrac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right)\right) & \textit{(d'après } \textbf{\textit{5.b)(i)}}\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \dfrac{\mu}{n} + \dfrac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right) & \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} (a_n + b_n\, Y_k) & \textit{(d'après } \textbf{\textit{6.a)}}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \ln(C_n) = n\, a_n + b_n \sum_{k=1}^{n} Y_k}$$

□

c) Établir la convergence en loi, quand n tend vers $+\infty$, de $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,(Y_1+\cdots+Y_n)$ vers la loi normale centrée réduite. On énoncera précisément le théorème utilisé.

Démonstration.

- La suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a.r. :
  - × indépendantes,
  - × de même loi,
  - × de même variance non nulle (d'après ***5.a)***, elle vaut 1)

  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$S_n = Y_1+\cdots+Y_n \quad \text{et} \quad S_n^* = \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(S_n)}}$$

  (notons que la v.a.r. S_n admet une variance (et donc une espérance) en tant que somme de v.a.r. qui en admettent une)

  Alors, par théorème central limite : $S_n^* \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} Z$, où $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

- Démontrons : $S_n^* = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,(Y_1+\cdots+Y_n)$.
  - × Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(S_n) & = & \mathbb{E}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i\right) & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{E}(Y_i) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{n} 0 & \textit{(d'après } \textbf{\textit{5.a)}}\textit{)} \\ & = & 0 & \end{array}$$

  - × Ensuite :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{V}(S_n) & = & \mathbb{E}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i\right) & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{V}(Y_i) & \textit{(car } Y_1, \ldots, Y_n \textit{ sont mutuellement indépendantes)} \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{n} 1 & \textit{(d'après } \textbf{\textit{5.a)}}\textit{)} \\ & = & n & \end{array}$$

  - × Ainsi :

$$S_n^* = \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(S_n)}} = \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$\boxed{\text{On obtient bien : } \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Y_i \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} Z, \text{ où } Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).}$$

□

7. a) Rappeler le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ au voisinage de 0.

Démonstration.

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)}$$

□

b) Déterminer les développements limités à l'ordre 2 au voisinage de 0 des fonctions $x \mapsto \ln(1 + vx + \mu x^2)$ et $x \mapsto \ln(1 - vx + \mu x^2)$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, il existe une fonction ε définie dans un voisinage de 0, telle que, au voisinage de 0 :

$$\ln(1+u) \ = \ u - \frac{1}{2}\, u^2 + u^2\, \varepsilon(u) \qquad (*)$$

où : $\lim\limits_{u\to 0} \varepsilon(u) = 0$.

- Comme $\lim\limits_{x\to 0} vx + \mu x^2 = 0$, on peut appliquer cette égalité $(*)$ à $u = vx + \mu x^2$, pour x dans un voisinage de 0. On obtient :

$$\begin{aligned} & \ln(1 + vx + \mu x^2) \\ = \ & \left(vx + \mu x^2\right) - \frac{1}{2}\left(vx + \mu x^2\right)^2 + \left(vx + \mu x^2\right)^2 \varepsilon\left(vx + \mu x^2\right) \\ = \ & vx + \mu x^2 - \frac{1}{2}\left(v^2\, x^2 + 2\, v\, \mu\, x^3 + \mu^2\, x^4\right) + \left(v^2\, x^2 + 2\, v\, \mu\, x^3 + \mu^2\, x^4\right) \varepsilon\left(vx + \mu\, x^2\right) \\ = \ & vx + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right) x^2 + x^2 \left(-v\, \mu\, x - \frac{1}{2}\, \mu^2\, x^2 + (v^2 + 2\, v\, \mu\, x + \mu^2\, x^2)\, \varepsilon(vx + \mu\, x^2)\right) \end{aligned}$$

On note alors ε_1 la fonction définie au voisinage de 0 par :

$$\varepsilon_1 : x \mapsto -v\, \mu\, x - \frac{1}{2}\, \mu^2\, x^2 + (v^2 + 2\, v\, \mu\, x + \mu^2\, x^2)\, \varepsilon(vx + \mu\, x^2)$$

On obtient :

$$\ln(1 + vx + \mu x^2) \ = \ vx + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right) x^2 + x^2\, \varepsilon_1(x)$$

Il reste à démontrer $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$ pour en déduire :

$$\ln(1 + vx + \mu x^2) \ = \ vx + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right) x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

× Tout d'abord : $\lim\limits_{x\to 0} \ - v\, \mu\, x - \frac{1}{2}\, \mu^2\, x^2 = 0$.

× De plus, comme $\lim\limits_{x\to 0} vx + \mu\, x^2 = 0$, par théorème de composition des limites :

$$\lim_{x\to 0} \varepsilon(vx + \mu\, x^2) \ = \ \lim_{u\to 0} \varepsilon(u) \ = \ 0$$

× Enfin : $\lim\limits_{x\to 0} v^2 + 2\, v\, \mu\, x + \mu^2\, x^2 = v^2$.

On obtient bien : $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \ln(1 + vx + \mu x^2) \ = \ vx + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right) x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).}$$

- On procède de même pour la fonction $x \mapsto \ln(1 - vx + \mu x^2)$.
  Comme $\lim\limits_{x\to 0} -vx + \mu x^2 = 0$, on peut appliquer l'égalité $(*)$ à $u = -vx + \mu x^2$, pour x dans un voisinage de 0. On obtient :

$$\begin{array}{rl} & \ln(1 - vx + \mu x^2) \\ = & \left(-vx + \mu x^2\right) - \dfrac{1}{2}\left(-vx + \mu x^2\right)^2 + \left(-vx + \mu x^2\right)^2 \varepsilon\left(-vx + \mu x^2\right) \\ = & -vx + \mu x^2 - \dfrac{1}{2}\left(v^2\, x^2 - 2\, v\, \mu\, x^3 + \mu^2\, x^4\right) + \left(v^2\, x^2 - 2\, v\, \mu\, x^3 + \mu^2\, x^4\right) \varepsilon\left(-vx + \mu\, x^2\right) \\ = & -vx + \left(\mu - \dfrac{v^2}{2}\right) x^2 + x^2 \left(v\, \mu\, x - \dfrac{1}{2}\, \mu^2\, x^2 + (v^2 - 2\, v\, \mu\, x + \mu^2\, x^2)\, \varepsilon(-vx + \mu\, x^2)\right) \end{array}$$

  On note alors ε_2 la fonction définie au voisinage de 0 par :

$$\varepsilon_1 : x \mapsto v\, \mu\, x - \frac{1}{2}\, \mu^2\, x^2 + (v^2 - 2\, v\, \mu\, x + \mu^2\, x^2)\, \varepsilon(-vx + \mu\, x^2)$$

  On obtient :

$$\ln(1 - vx + \mu x^2) \;=\; -vx + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right) x^2 + x^2\, \varepsilon_2(x)$$

  Il reste à démontrer $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$ pour en déduire :

$$\ln(1 - vx + \mu x^2) \;=\; -vx + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right) x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

  × Tout d'abord : $\lim\limits_{x\to 0} v\, \mu\, x - \dfrac{1}{2}\, \mu^2\, x^2 = 0$.

  × De plus, comme $\lim\limits_{x\to 0} -vx + \mu\, x^2 = 0$, par théorème de composition des limites :

$$\lim_{x\to 0} \varepsilon(-vx + \mu\, x^2) \;=\; \lim_{u\to 0} \varepsilon(u) \;=\; 0$$

  × Enfin : $\lim\limits_{x\to 0} v^2 - 2\, v\, \mu\, x + \mu^2\, x^2 = v^2$.

  On obtient bien : $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \ln(1 - vx + \mu x^2) \;=\; -vx + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right) x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).}$$

□

c) Démontrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\, a_n = \mu - \dfrac{v^2}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\, b_n = v$.
En déduire que b_n est strictement positif à partir d'un certain rang.
On suppose dans la suite que cette condition est réalisée.

Démonstration.

- Commençons par étudier la suite $(n\, a_n)$.

  × Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après ***6.a)*** :

$$a_n \;=\; \frac{1}{2}\left(\ln\left(1 + v\, \frac{1}{\sqrt{n}} + \mu\, \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - v\, \frac{1}{\sqrt{n}} + \mu\, \frac{1}{n}\right)\right)$$

× Rappelons que, d'après la question précédente, pour x dans un voisinage de 0 :

$$\ln(1+vx+\mu x^2) \ = \ vx + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right) x^2 + x^2\, \varepsilon_1(x)$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$, on peut appliquer cette égalité à $x = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ pour n dans un voisinage de $+\infty$. On obtient :

$$\ln\left(1 + v\,\frac{1}{\sqrt{n}} + \mu\,\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2\right) \ = \ v\,\frac{1}{\sqrt{n}} + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 \varepsilon_1\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_1\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$ par théorème de composition des limites.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \ln\left(1 + \frac{v}{\sqrt{n}} + \frac{\mu}{n}\right) = \frac{v}{\sqrt{n}} + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right)\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\,\varepsilon_1\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).}$$

× De même :

$$\ln\left(1 - v\,\frac{1}{\sqrt{n}} + \mu\,\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2\right) \ = \ -v\,\frac{1}{\sqrt{n}} + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 \varepsilon_2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_2\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$ par théorème de composition des limites.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \ln\left(1 - \frac{v}{\sqrt{n}} + \frac{\mu}{n}\right) = -\frac{v}{\sqrt{n}} + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right)\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\,\varepsilon_2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).}$$

× On en déduit :

$$\begin{aligned}
n\,a_n \ &= \ \frac{n}{2}\left(\cancel{\frac{v}{\sqrt{n}}} + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right)\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\,\varepsilon_1\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \cancel{\frac{v}{\sqrt{n}}} + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right)\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\,\varepsilon_2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \\
&= \ \frac{n}{2}\left(2\left(\mu - \frac{v^2}{2}\right)\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\left(\varepsilon_1\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \varepsilon_2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right) \\
&= \ \mu - \frac{v^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\varepsilon_1\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \varepsilon_2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \lim_{n\to+\infty} n\,a_n = \mu - \frac{v^2}{2}.}$$

- On procède de même pour la suite $(\sqrt{n}\,b_n)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après ***6.a)*** :

$$\begin{aligned}
\sqrt{n}\,b_n \ &= \ \frac{\sqrt{n}}{2}\left(\ln\left(1 + v\,\frac{1}{\sqrt{n}} + \mu\,\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 - v\,\frac{1}{\sqrt{n}} + \mu\,\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \ \frac{\sqrt{n}}{2}\left(\frac{v}{\sqrt{n}} + \cancel{\left(\mu - \frac{v^2}{2}\right)\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}\,\varepsilon_1\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \left(-\frac{v}{\sqrt{n}} + \cancel{\left(\mu - \frac{v^2}{2}\right)\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}\,\varepsilon_2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right) \\
&= \ \frac{\sqrt{n}}{2}\left(\frac{2v}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\left(\varepsilon_1\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \varepsilon_2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right) \\
&= \ v + \frac{1}{2\sqrt{n}}\left(\varepsilon_1\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \varepsilon_2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\,b_n = 0.}$$

- Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\, b_n = v$ et $v \neq 0$, on a :

$$\sqrt{n}\, b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v \qquad \text{donc} \qquad b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{v}{\sqrt{n}}$$

Or :
× la suite $\left(\dfrac{v}{\sqrt{n}}\right)$ est à termes strictement positifs (car $v > 0$),
× deux suites équivalentes ont même signe à partir d'un certain rang.

$$\boxed{\text{On en déduit que les termes de la suite } (b_n) \text{ sont strictement positifs à partir d'un certain rang.}}$$

□

8. On note F_n la fonction de répartition de $\dfrac{1}{\sqrt{n}}(Y_1 + \cdots + Y_n)$ et G_n la fonction de répartition de $\ln(C_n)$.

Soit x un réel. On pose $y = \dfrac{x - \mu + \frac{v^2}{2}}{v}$.

a) Soit ε un réel strictement positif.

(i) Établir l'existence d'un réel η strictement positif tel que :

$$\Phi(y) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \Phi(y-\eta) \leqslant \Phi(y+\eta) \leqslant \Phi(y) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Démonstration.
La fonction Φ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction de répartition d'une v.a.r. à densité. En particulier, Φ est continue en y. Donc il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{R}$:

$$|z - y| \leqslant \eta \ \Rightarrow\ |\Phi(z) - \Phi(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

- En particulier, en choisissant $z = y + \eta$, on a bien :

$$|z - y| \ = \ |(\cancel{y} + \eta) - \cancel{y}| \ = \ \eta \ \leqslant \ \eta$$

Donc : $|\Phi(y+\eta) - \Phi(y)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Or, Φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (en effet : $\forall z \in \mathbb{R}$, $\Phi'(z) = \varphi(z) > 0$). Donc : $\Phi(y+\eta) - \Phi(y) > 0$. D'où :

$$|\Phi(y+\eta) - \Phi(y)| \ = \ \Phi(y+\eta) - \Phi(y)$$

Ainsi : $\Phi(y+\eta) \leqslant \Phi(y) + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

- De même, en choisissant $z = y - \eta$, on a bien : $|(y-\eta) - y| \leqslant \eta$. Et donc, par stricte croissance de Φ sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ccc} |\Phi(y-\eta) - \Phi(y)| & \leqslant & \dfrac{\varepsilon}{2} \\ \shortparallel & & \\ -\left(\Phi(y-\eta) - \Phi(y)\right) & & \end{array}$$

D'où : $\Phi(y) - \dfrac{\varepsilon}{2} \leqslant \Phi(y-\eta)$.

$$\boxed{\text{Finalement, il existe bien } \eta > 0 \text{ tel que : } \Phi(y) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \Phi(y-\eta) \leqslant \Phi(y+\eta) \leqslant \Phi(y) + \frac{\varepsilon}{2}.}$$

□

(ii) Montrer qu'il existe un entier naturel n_1 tel que, pour tout $n \geqslant n_1$:

$$y - \eta \ \leqslant \ \frac{x - na_n}{\sqrt{n}\, b_n} \ \leqslant \ y + \eta$$

Démonstration.

- Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} n\, a_n = \mu - \dfrac{v^2}{2}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n}\, b_n = v$:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x - n\, a_n}{\sqrt{n}\, b_n} \ = \ \frac{x - \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right)}{v} \ = \ \frac{x - \mu + \frac{v^2}{2}}{v} \ = \ y$$

- On en déduit que, pour tout $\varepsilon_0 > 0$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_1$:

$$\left| \frac{x - n\, a_n}{\sqrt{n}\, b_n} - y \right| \ \leqslant \ \varepsilon_0$$

- Or :

$$\begin{aligned} \left| \frac{x - n\, a_n}{\sqrt{n}\, b_n} - y \right| \ \leqslant \ \varepsilon_0 \ & \Leftrightarrow \ -\varepsilon_0 \leqslant \frac{x - n\, a_n}{\sqrt{n}\, b_n} - y \leqslant \varepsilon_0 \\ & \Leftrightarrow \ y - \varepsilon_0 \leqslant \frac{x - n\, a_n}{\sqrt{n}\, b_n} \leqslant y + \varepsilon_0 \end{aligned}$$

Ainsi, en choisissant $\varepsilon_0 = \eta > 0$, il existe bien $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_1$:
$$y - \eta \ \leqslant \ \frac{x - n\, a_n}{\sqrt{n}\, b_n} \ \leqslant \ y + \eta.$$

□

(iii) Montrer qu'il existe un entier naturel n_2 tel que, pour tout $n \geqslant n_2$:

$$F_n(y + \eta) \leqslant \Phi(y + \eta) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad F_n(y - \eta) \geqslant \Phi(y - \eta) - \frac{\varepsilon}{2}$$

Démonstration.

- D'après ***6.c)***, pour tout $z \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(z) \ = \ \Phi(z)$.

  Soit $z \in \mathbb{R}$. On obtient alors, pour tout $\varepsilon_1 > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$:

$$|F_n(z) - \Phi(z)| \ \leqslant \ \varepsilon_1$$

  c'est-à-dire :

$$-\varepsilon_1 \ \leqslant \ F_n(z) - \Phi(z) \ \leqslant \ \varepsilon_1$$

  ou encore :

$$\Phi(z) - \varepsilon_1 \ \leqslant \ F_n(z) \ \leqslant \ \Phi(z) + \varepsilon_1$$

- En appliquant cette relation à $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $z = y + \eta$, on obtient qu'il existe $n_3 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_3$:

$$\Phi(y + \eta) - \frac{\varepsilon}{2} \ \leqslant \ F_n(y + \eta) \ \leqslant \ \Phi(y + \eta) + \frac{\varepsilon}{2}$$

- En appliquant cette relation à $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $z = y - \eta$, on obtient qu'il existe $n_4 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_4$:

$$\Phi(y - \eta) - \frac{\varepsilon}{2} \ \leqslant \ F_n(y - \eta) \ \leqslant \ \Phi(y - \eta) + \frac{\varepsilon}{2}$$

En particulier, en choisissant $n_2 = \max(n_3, n_4)$, pour tout $n \geqslant n_2$:
$$F_n(y + \eta) \ \leqslant \ \Phi(y + \eta) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad F_n(y - \eta) \ \geqslant \ \Phi(y - \eta) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

□

(iv) Montrer : $G_n(x) = F_n\left(\dfrac{x - na_n}{\sqrt{n}\, b_n}\right)$, et en déduire que, pour n assez grand, on a :

$$\left| G_n(x) - \Phi\left(\frac{x - \mu + \frac{v^2}{2}}{v}\right) \right| \leqslant \varepsilon$$

Démonstration.

$$\begin{array}{rcll} G_n(x) & = & \mathbb{P}([\ln(C_n) \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[n\, a_n + b_n \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k \leqslant x\right]\right) & \textit{(d'après } \textbf{6.b)}\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[b_n \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k \leqslant x - n\, a_n\right]\right) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k \leqslant \dfrac{x - n\, a_n}{\sqrt{n}\, b_n}\right]\right) & \textit{(car } \sqrt{n} > 0 \textit{ et } b_n > 0 \textit{ à partir d'un certain rang (énoncé de la question } \textbf{7.a)(ii)}\textit{))} \\ & = & F_n\left(\dfrac{x - n\, a_n}{\sqrt{n}\, b_n}\right) & \textit{(par définition de } F_n\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{G_n(x) \ = \ F_n\left(\frac{x - n\, a_n}{\sqrt{n}\, b_n}\right)}$$

□

(v) En déduire que, pour n assez grand, on a :

$$\left| G_n(x) - \Phi\left(\frac{x - \mu + \frac{v^2}{2}}{v}\right) \right| \leqslant \varepsilon$$

Démonstration.
On note $N = \max(n_1, n_2)$. Soit $n \geqslant N$.

- Tout d'abord, d'après ***8.a)(iii)*** :

$$\left| G_n(x) - \Phi\left(\frac{x - \mu + \frac{v^2}{2}}{v}\right) \right| = \left| F_n\left(\frac{x - n\, a_n}{\sqrt{n}\, b_n}\right) - \Phi(y) \right|$$

- Comme $n \geqslant N \geqslant n_1$, d'après ***8.a)(ii)*** :

$$y - \eta \leqslant \frac{x - n\, a_n}{\sqrt{n}\, b_n} \leqslant y + \eta$$

- De plus, la fonction F_n est croissante sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction de répartition. Donc :

$$\begin{array}{ccccl} F_n(y - \eta) & \leqslant & F_n\left(\dfrac{x - n\, a_n}{\sqrt{n}\, b_n}\right) & \leqslant & F_n(y + \eta) \\ \rotatebox{90}{$\geqslant$} & & & & \rotatebox{90}{$\leqslant$} \\ \Phi(y - \eta) - \dfrac{\varepsilon}{2} & & & & \Phi(y + \eta) + \dfrac{\varepsilon}{2} \quad \textit{(d'après } \textbf{7.a)(iv)} \textit{ car } n \geqslant N \geqslant n_2\textit{)} \\ \rotatebox{90}{$\geqslant$} & & & & \rotatebox{90}{$\leqslant$} \\ \left(\Phi(y) - \dfrac{\varepsilon}{2}\right) - \dfrac{\varepsilon}{2} & & & & \left(\Phi(y) + \dfrac{\varepsilon}{2}\right) + \dfrac{\varepsilon}{2} \quad \textit{(d'après } \textbf{7.a)(i)}\textit{)} \end{array}$$

Finalement :

$$\Phi(y) - \varepsilon \leqslant F_n\left(\frac{x - n\, a_n}{\sqrt{n}\, b_n}\right) \leqslant \Phi(y) + \varepsilon$$

Ainsi : $-\varepsilon \leqslant F_n\left(\dfrac{x - n\,a_n}{\sqrt{n}\,b_n}\right) - \Phi(y) \leqslant \varepsilon$. D'où :

$$\left|F_n\left(\dfrac{x - n\,a_n}{\sqrt{n}\,b_n}\right) - \Phi(y)\right| \leqslant \varepsilon$$
$$\shortparallel$$
$$\left|G_n(x) - \Phi\left(\dfrac{x-\mu+\frac{v^2}{2}}{v}\right)\right|$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit qu'il existe } N \in \mathbb{N} \text{ tel que, pour tout } n \geqslant N : \\ \left|G_n(x) - \Phi\left(\dfrac{x-\mu+\frac{v^2}{2}}{v}\right)\right| \leqslant \varepsilon.\end{array}}$$

□

b) `(CUBES uniquement)`. En conclure que la suite de variables aléatoires $\big(\ln(C_n)\big)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi normale dont on précisera les paramètres.

Démonstration.

- On a démontré en question ***7.a)***, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N) \Rightarrow \left(\left|G_n(x) - \Phi\left(\dfrac{x-\mu+\frac{v^2}{2}}{v}\right)\right| \leqslant \varepsilon\right)$$

Donc, par définition de la limite, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = \Phi\left(\dfrac{x-\mu+\frac{v^2}{2}}{v}\right)$$

- On note Z une v.a.r. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\Phi\left(\dfrac{x-\mu+\frac{v^2}{2}}{v}\right) &= \mathbb{P}\left(\left[Z \leqslant \dfrac{x-\mu+\frac{v^2}{2}}{v}\right]\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[v\,Z \leqslant x-\mu+\tfrac{v^2}{2}\right]\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[v\,Z + \mu - \dfrac{v^2}{2} \leqslant x\right]\right) \\ &= \mathbb{P}([T \leqslant x]) \qquad \textit{(où } T = v\,Z + \mu - \dfrac{v^2}{2}\textit{)}\end{aligned}$$

Or, comme $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, d'après la question ***1.*** (appliquée à $a = v$ et $b = \mu - \dfrac{v^2}{2}$) : $T \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu - \dfrac{v^2}{2}, v^2\right)$.

Ainsi : $\Phi\left(\dfrac{x-\mu+\frac{v^2}{2}}{v}\right) = \Phi_{\mu-\frac{v^2}{2},v^2}(x)$.

On reconnaît la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}\left(\mu - \dfrac{v^2}{2}, v^2\right)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \big(\ln(C_n)\big)_{n\geqslant 1} \text{ converge en loi vers la v.a.r. } T \text{ de loi } \mathcal{N}\left(\mu - \dfrac{v^2}{2}, v^2\right).}$$

□

9. `(CUBES uniquement)` Démontrer que $(C_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi log-normale de paramètres $\left(\mu - \dfrac{v^2}{2}, v^2\right)$.

Démonstration.

- Déterminons tout d'abord l'expression de la fonction de répartition d'une loi $\mathcal{LN}\left(\mu - \dfrac{v^2}{2}, v^2\right)$.
  On note D une v.a.r. de loi $\mathcal{LN}\left(\mu - \dfrac{v^2}{2}, v^2\right)$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x \in \,]-\infty, 0]$, alors $[D \leqslant x] = \varnothing$ car $D(\Omega) \subset \,]0,+\infty[$. Donc :
  $$F_D(x) \ = \ \mathbb{P}([D \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$
  × si $x \in \,]0, +\infty[$.
  D'après la question ***3.*** : $G = \mathrm{e}^{-\left(\mu - \frac{v^2}{2}\right)} D \ \hookrightarrow \ \mathcal{LN}(0, v^2)$.
  Ainsi, d'après ***2.a)*** : $F_G(x) \ = \ \Phi\left(\dfrac{\ln(x)}{v^2}\right)$.
  D'où :
  $$\begin{aligned} F_D(x) \ &= \ \mathbb{P}\left(\left[\mathrm{e}^{\mu - \frac{v^2}{2}} \, G \leqslant x\right]\right) \\ &= \ \mathbb{P}\left(\left[G \leqslant x \ \mathrm{e}^{-\left(\mu - \frac{v^2}{2}\right)}\right]\right) \\ &= \ \Phi\left(\dfrac{\ln\left(x \ \mathrm{e}^{-\left(\mu - \frac{v^2}{2}\right)}\right)}{v^2}\right) \\ &= \ \Phi\left(\dfrac{\ln(x) - \mu + \frac{v^2}{2}}{v^2}\right) \end{aligned}$$
  $$\boxed{\text{Ainsi, } F_D : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \,]-\infty, 0] \\ \Phi\left(\dfrac{\ln(x) - \mu + \frac{v^2}{2}}{v^2}\right) & \text{si } x \in \,]0, +\infty[\end{cases}.}$$
- Montrons maintenant que (C_n) converge en loi vers D.
  × On a déjà remarqué en question ***6.b)*** : $C_n(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$.
  × Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - si $x \in \,]-\infty, 0]$, alors $[C_n \leqslant x] = \varnothing$, car $C_n(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$. Donc :
  $$F_{C_n}(x) \ = \ \mathbb{P}([C_n \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$
  Or : $F_D(x) = 0$.
  On a donc bien : $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{C_n}(x) = F_D(x)$.

- si $x \in \,]0, +\infty[$, alors :

$$\begin{array}{rcll} F_{C_n}(x) & = & \mathbb{P}([C_n \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([\ln(C_n) \leqslant \ln(x)]) & \textit{(par stricte croissance de } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ & = & G_n\big(\ln(x)\big) & \end{array}$$

Or, d'après la question ***7.b)*** :

$$\begin{array}{ccc} \lim\limits_{n \to +\infty} G_n\big(\ln(x)\big) & = & \Phi\left(\dfrac{\ln(x) - \mu + \frac{v^2}{2}}{v^2}\right) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \lim\limits_{n \to +\infty} F_{C_n}(x) & & F_D(x) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R}, \lim\limits_{n \to +\infty} F_{C_n}(x) = F_D(x).}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } (C_n) \text{ converge en loi vers la v.a.r. } D \text{ qui suit la loi } \mathcal{LN}\left(\mu - \frac{v^2}{2}, v^2\right).}$$ □