DS6 (version B)

Problème I

Dans tout le problème, n est un entier tel que $n \geqslant 2$.
On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles à une colonne et n lignes, nommées « matrices colonnes » dans la suite du problème.
Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A.
Si $V \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors ${}^tV$ désigne la matrice transposée de V.
Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et si $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, alors le coefficient de la ligne numéro i et de la colonne numéro j de A est notée $a_{i,j}$, la matrice A est notée $A = \big(a_{i,j}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Si $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors la matrice colonne V est notée $V = (v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Si $A = \big(a_{i,j}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on note $C_j(A)$ la matrice colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée des coefficients de la colonne numéro j de A. Ainsi : $C_j(A) = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Partie I : Un exemple

Soient $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $A_0 = U_0 {}^tV_0$.

1. Vérifier que 0 est valeur propre de A_0 et déterminer une base du sous-espace propre associé.

2. ***a)*** Calculer $A_0\, U_0$.

b) Montrer que A_0 est diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

c) Déterminer une matrice diagonale D de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ et une matrice inversible P de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $A_0 = PDP^{-1}$.

Partie II : Trace d'une matrice carrée

Pour toute matrice $A = \big(a_{i,j}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle trace de A et on note $\mathrm{tr}(A)$ la somme des coefficients diagonaux de A, c'est-à-dire $\mathrm{tr}(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

3. Montrer que l'application $\mathrm{tr} : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & \mathrm{tr}(A) \end{array}$, est linéaire.

4. Montrer : $\forall (A,B) \in \big(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\big)^2$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

5. Vérifier, pour tout $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $\mathrm{tr}({}^tAA) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{j,i}^2$.

Partie III : Une caractérisation des matrices de rang 1

6. Soient $U = (u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $V = (v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ deux matrices colonnes non nulles de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

a) Justifier : $U\,{}^tV \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Déterminer les coefficients de $U\,{}^tV$ à l'aide des coefficients de U et de V.

b) Exprimer $\mathrm{tr}(U\,{}^tV)$ à l'aide des coefficients de U et de V.

c) Quel est le rang de $U\,{}^tV$.

7. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

a) Montrer qu'il existe $j_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, il existe $\alpha_j \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$C_j(A) = \alpha_j \, C_{j_0}(A)$$

b) En déduire qu'il existe deux matrices colonnes non nulles U et V de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = U\,{}^tV$.

8. Énoncer une caractérisation des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

Partie IV : Une caractérisation des matrices de rang 1 diagonalisables

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. On note U et V deux matrices colonnes non nulles de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = U\,{}^tV$ et on note $a = \mathrm{tr}(A)$.

9. Montrer que 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

10. Montrer : ${}^tV\,U = (a)$, puis : $A^2 = a\,A$.

11. Montrer que si $a = 0$, alors A n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

12. On suppose $a \neq 0$. Calculer $A\,U$. Déduire des questions précédentes que A est diagonalisable.

13. Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 soit diagonalisable.

Problème II

Ce problème comporte deux parties relativement indépendantes.
Dans la première partie on étudie les lois log-normales. On s'intéresse dans la partie II à une modélisation du cours d'une action appelée modèle binomial ou de Cox-Ross-Rubinstein et à son comportement asymptotique.

Notations et définitions

- Les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
- On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
- On note respectivement $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X, lorsque celles-ci existent.
- Soit m un réel et σ un réel strictement positif. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi log-normale de paramètres (m, σ^2) si X est à valeurs strictement positives et si $\ln(X)$ suit la loi normale de paramètres (m, σ^2). On écrit alors $X \hookrightarrow \mathcal{LN}(m, \sigma^2)$.

Partie I - Quelques propriétés des lois log-normales

On note dans cette partie m un réel et σ un réel strictement positif.
Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi log-normale de paramètres (m, σ^2).
On pourra dans la suite utiliser la variable aléatoire $Y = \ln(X)$.

1. Soit a et b deux réels, a étant différent de 0. On rappelle que si U est une variable aléatoire qui suit une loi normale de paramètres (m, σ^2), alors $a\,U + b$ suit aussi une loi normale.
Quels en sont les paramètres ?

2. *Cas où $m = 0$.*
On suppose dans cette question 2 que $X \hookrightarrow \mathcal{LN}(0, \sigma^2)$.

a) *Densité.*
Exprimer la fonction de répartition F de X en fonction de Φ .
En déduire que X est une variable aléatoire à densité et que la fonction définie par :

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x\,\sigma\,\sqrt{2\pi}} \ \exp\left(-\dfrac{\big(\ln(x)\big)^2}{2\sigma^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

est une densité de probabilité de X.

b) *Espérance.*

(i) Établir l'existence de $\mathbb{E}(X)$ et l'égalité : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\sigma\,\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y^2}{\sigma^2} - 2y\right)\right)\, dy.$

(ii) En utilisant le changement de variable $t = \dfrac{y}{\sigma} - \sigma$, en déduire $\mathbb{E}(X)$ en fonction de σ.

c) *Variance.*

(i) Soit α un réel non nul. Montrer que X^α suit une loi log-normale dont on précisera les paramètres.

(ii) En déduire que X admet une variance et : $\mathbb{V}(X) = \mathrm{e}^{\sigma^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\right)$.

3. On reprend le cas général : $X \hookrightarrow \mathcal{LN}(m, \sigma^2)$.

a) Soit μ un réel strictement positif.
Montrer que μX suit une loi log-normale de paramètres $\big(m + \ln(\mu), \sigma^2\big)$.

b) Justifier l'existence de $\mathbb{E}(X)$, de $\mathbb{V}(X)$, et établir :

$$\mathbb{E}(X) = \mathrm{e}^{m+\frac{\sigma^2}{2}} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = \mathrm{e}^{2m+\sigma^2}\big(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\big)$$

Partie II - Le modèle binomial de Cox-Ross-Rubinstein

Soit n un entier naturel non nul.
On souhaite modéliser l'évolution du cours d'une action entre les dates 0 et t fixé, strictement positif.
On suppose qu'initialement ce cours est $S_{0,n} = 1$ et si l'on note $S_{k,n}$ la valeur aléatoire de ce cours à la date $\dfrac{kt}{n}$, $k \in \{1, ..., n\}$, on a la relation :

$$S_{k,n} \ = \ S_{k-1,n} \times \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right)$$

où :

- μ est une constante réelle strictement positive liée au rendement moyen de l'action sur une durée égale à t ;
- v est une constante réelle strictement positive appelée volatilité de l'action sur la durée t ;
- $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$ (autrement dit : $\mathbb{P}([Y_k = 1]) = \mathbb{P}([Y_k = -1]) = \dfrac{1}{2}$).

  On suppose que n est assez grand pour que $1 + \dfrac{\mu}{n} - \dfrac{v}{\sqrt{n}} > 0$.

On admet que $S_{0,n}, ..., S_{n,n}$ sont des variables aléatoires discrètes.
On note C_n la variable aléatoire $S_{n,n}$, qui modélise le cours de l'action à l'instant t.

4. *Simulation de la variable aléatoire C_n.*

a) Que renvoie la fonction **Scilab** suivante ?

```
function Y = mystere()
  u = rand()
  if u < 1/2 then
    Y = -1
  else
    Y = 1
  end
endfunction
```

b) Dans la déclaration de fonction qui suit, remplacer les « $\cdots$ » par des expressions en **Scilab** pour que la fonction ainsi déclarée simule la variable aléatoire C_n.

```
function C = SimuC(n, mu, v)
  C = 1
  for k = ...
    C = C * ...
  end
endfunction
```

5. ***a)*** Calculer l'espérance et la variance commune aux Y_k.

b) (i) Montrer l'égalité : $C_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{\mu}{n} + \dfrac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right)$.

(ii) En déduire : $\mathbb{E}(C_n) = \left(1 + \dfrac{\mu}{n}\right)^n$ et $\mathbb{V}(C_n) = \left(\left(1 + \dfrac{\mu}{n}\right)^2 + \dfrac{v^2}{n}\right)^n - \left(1 + \dfrac{\mu}{n}\right)^{2n}$.

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(C_n)$ et montrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{V}(C_n) = \mathrm{e}^{2\mu}\big(\mathrm{e}^{v^2} - 1\big)$.
Déterminer les paramètres de la loi log-normale ayant pour espérance la première limite et pour variance la seconde.

6. ***a)*** Expliciter un couple de réels (a_n, b_n) tel que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right) = a_n + b_n\, Y_k$$

b) En déduire : $\ln(C_n) = n\, a_n + b_n \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.

c) Établir la convergence en loi, quand n tend vers $+\infty$, de $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,(Y_1 + \cdots + Y_n)$ vers la loi normale centrée réduite. On énoncera précisément le théorème utilisé.

7. ***a)*** Rappeler le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ au voisinage de 0.

b) Déterminer les développements limités à l'ordre 2 au voisinage de 0 des fonctions $x \mapsto \ln(1 + vx + \mu x^2)$ et $x \mapsto \ln(1 - vx + \mu x^2)$.

c) Démontrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\, a_n = \mu - \dfrac{v^2}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\, b_n = v$.
En déduire que b_n est strictement positif à partir d'un certain rang.
On suppose dans la suite que cette condition est réalisée.

8. On note F_n la fonction de répartition de $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,(Y_1 + \cdots + Y_n)$ et G_n la fonction de répartition de $\ln(C_n)$.

Soit x un réel. On pose $y = \dfrac{x - \mu + \frac{v^2}{2}}{v}$.

a) Soit ε un réel strictement positif.

(i) Établir l'existence d'un réel η strictement positif tel que :

$$\Phi(y) - \frac{\varepsilon}{2} \ \leqslant\ \Phi(y - \eta) \ \leqslant\ \Phi(y + \eta) \ \leqslant\ \Phi(y) + \frac{\varepsilon}{2}$$

(ii) Montrer qu'il existe un entier naturel n_1 tel que, pour tout $n \geqslant n_1$:

$$y - \eta \ \leqslant\ \frac{x - n a_n}{\sqrt{n}\, b_n} \ \leqslant\ y + \eta$$

(iii) Montrer qu'il existe un entier naturel n_2 tel que, pour tout $n \geqslant n_2$:

$$F_n(y + \eta) \leqslant \Phi(y + \eta) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad F_n(y - \eta) \geqslant \Phi(y - \eta) - \frac{\varepsilon}{2}$$

(iv) Montrer : $G_n(x) = F_n\left(\dfrac{x - n a_n}{\sqrt{n}\, b_n}\right)$, et en déduire que, pour n assez grand, on a :

$$\left| G_n(x) - \Phi\left(\frac{x - \mu + \frac{v^2}{2}}{v}\right) \right| \ \leqslant\ \varepsilon$$

b) `(CUBES uniquement)` En conclure que la suite de variables aléatoires $\big(\ln(C_n)\big)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi normale dont on précisera les paramètres.

9. `(CUBES uniquement)` Démontrer que $(C_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi log-normale de paramètres $\left(\mu - \dfrac{v^2}{2}, v^2\right)$.