DS6 (version A) /172

Exercice 1 /71

Soit $E = \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
On note I_3 la matrice identité de E et 0_3 la matrice nulle de E.
Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des matrices M de E vérifiant l'égalité :

$$M\,(M+I_3)\,(M+2\,I_3) \;=\; 0_3$$

Partie A : Exemple de matrices appartenant à $\mathscr{A}$

1. Déterminer l'ensemble des réels α tels que : $\alpha\, I_3 \in \mathscr{A}$.

- **1 pt :** $\alpha\, I_3 \in \mathscr{A} \;\Leftrightarrow\; \alpha\,(\alpha+1)\,(\alpha+2)\,I_3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$
- **1 pt :** $\alpha\,(\alpha+1)\,(\alpha+2)\,I_3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \;\Leftrightarrow\; \alpha\,(\alpha+1)\,(\alpha+2) = 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha = 0$ `OU` $\alpha = -1$ `OU` $\alpha = -2$

2. L'ensemble $\mathscr{A}$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?

- **1 pt : d'après la question précédente,** $-I_3 \in \mathscr{A}$ **mais** $-(-I_3) = I_3 \notin \mathscr{A}$

3. On note $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) On pose $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer $B\,X_1$ et $B\,X_2$.

- **1 pt :** $B\,X_1 = -2\,X_1$
- **1 pt :** $B\,X_2 = -X_2$

b) En déduire deux valeurs propres de B.
Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres associés.

- **1 pt :** $X_1 \neq 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ **et** $B\,X_1 = -2\,X_1$**, donc** -2 **est valeur propre de** B
- **1 pt :** $X_2 \neq 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ **et** $B\,X_2 = -X_2$**, donc** -1 **est valeur propre de** B
- **3 pts :** $E_{-2}(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
  - × **1 pt : écriture système** $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$
  - × **1 pt : résolution système** $\{x = y - z$
  - × **1 pt :** $E_{-2}(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

- **2 pts :** $\mathcal{F}_{-2} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ **base de** $E_{-2}(B)$
  - × **1 pt : libre**
  - × **1 pt : génératrice de** $E_{-2}(B)$
- **2 pts :** $E_{-1}(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}\,(X_2)$
- **1 pt :** (X_2) **base de** $E_{-1}(B)$

c) Démontrer que B est diagonalisable, et expliciter une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que : $B = PDP^{-1}$.

- **1 pt :** $\dim\big(E_{-2}(B)\big) = \mathrm{Card}(\mathcal{F}_{-2}) = 2$ **et** $\dim\big(E_{-1}(B)\big) = \mathrm{Card}(\mathcal{F}_{-1}) = 1$
- **1 pt :** $\dim\big(E_{-2}(B)\big) + \dim\big(E_{-1}(B)\big) = 3$ **et** $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$**, donc** B **diagonalisable.**
- **1 pt : il existe** P **inversible obtenue par concaténation de bases de sous-espaces propres de** B**. Donc :** $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- **1 pt : il existe** D **diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de** B**. Donc :** $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

d) Démontrer que $D \in \mathscr{A}$, puis que $B \in \mathscr{A}$.

- **2 pt :** $D \in \mathscr{A}$
  - × **1 pt :** $(D + I_3)\,(D + 2\,I_3) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$
  - × **1 pt :** $D\,(D + I_3)\,(D + 2\,I_3) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$
- **4 pt :** $B \in \mathscr{A}$
  - × **1 pt :** $D\,(D + I_3)\,(D + 2\,I_3) = D^3 + 3\,D^2 + 2\,D$
  - × **1 pt : par récurrence immédiate :** $\forall n \in \mathbb{N}$, $(P^{-1}\,B\,P)^n = P^{-1}\,B^n\,P$
  - × **2 pts :** $P^{-1}\,B^3\,P + 3\,P^{-1}\,B^2\,P + 2\,P^{-1}\,B\,P = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ **donc** $B\,(B + I_3)\,(B + 2\,I_3) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$

4. Plus généralement, on suppose que M est une matrice de E diagonalisable, que le spectre de M soit inclus dans $\{0, -1, -2\}$.
Démontrer : $M \in \mathscr{A}$.

- **1 pt : comme** M **diagonalisable, il existe** R **inversible et** Δ **diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de** M**, telles que :** $M = R\,\Delta\,R^{-1}$**.**
- **1 pt :** $\mathrm{Sp}(M) \subset \{0, -1, -2\}$**, il existe donc** $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \{0, -1, -2\}^3$ **tel que :** $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $\Delta\,(\Delta + I_3)\,(\Delta + 2\,I_3) = \begin{pmatrix} \lambda_1\,(\lambda_1 + 1)\,(\lambda_1 + 2) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2\,(\lambda_2 + 1)\,(\lambda_2 + 2) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3\,(\lambda_3 + 1)\,(\lambda_3 + 2) \end{pmatrix}$
- **1 pt : comme** $\lambda_i \in \{0, -1, -2\}$**, alors :** $\lambda_i\,(\lambda_i + 1)\,(\lambda_i + 2) = 0$
- **1 pt :** $\Delta\,(\Delta + I_3)\,(\Delta + 2\,I_3) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$**, donc, en raisonnant comme en question précédente :** $M \in \mathscr{A}$

Partie B : Diagonalisabilité des matrices de $\mathscr{A}$

Soit M une matrice appartenant à $\mathscr{A}$. On note $\mathrm{Sp}(M)$ le spectre de M.

5. Déterminer un polynôme annulateur de M, et démontrer que le spectre de M est inclus dans $\{0, -1, -2\}$.

- **1 pt : Le polynôme $Q(X) = X\,(X+1)\,(X+2)$ est un polynôme annulateur de M**
- **1 pt :** $\mathrm{Sp}(M) \subset$ **{racines de Q}** $= \{0, -1, -2\}$

6. On suppose dans cette question que M admet 0, -1 et -2 comme valeurs propres.
Justifier que M est diagonalisable.

- **1 pt :** $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ **et M possède 3 valeurs propres distinctes, donc M est diagonalisable.**

7. ***a)*** On suppose dans cette question que -1 est l'unique valeur propre de M.
Justifier que M et $M + 2\,I_3$ sont inversibles, puis démontrer : $M = -I_3$.

- **1 pt : Comme -1 est l'unique valeur propre de M, alors 0 et -2 ne sont pas valeurs propres de M.cOn en déduit que M et $M + 2\,I_3$ sont inversibles.**
- **1 pt : comme $M \in \mathscr{A}$, alors** $M\,(M+I_3)\,(M+2\,I_3) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$
- **1 pt :** $M\,(M+I_3)\,(M+2\,I_3) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ **donc** $M = -I_3$

b) Que peut-on dire de M si $\mathrm{Sp}(M) = \{-2\}$? Si $\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$?

- **1 pt : Si** $\mathrm{Sp}(M) = \{-2\}$**, alors M et $M + I_3$ sont inversibles. Comme $M \in \mathscr{A}$, on a toujours :** $M\,(M+I_3)\,(M+2\,I_3) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$**. En multipliant à gauche l'égalité successivement par M^{-1} puis $(M+I_3)^{-1}$, on obtient :** $M = -2\,I_3$**.**
- **1 pt : Si** $\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$**, alors $M + I_3$ et $M + 2\,I_3$ sont inversibles. Comme $M \in \mathscr{A}$, on a toujours :** $M\,(M+I_3)\,(M+2\,I_3) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$**. En multipliant à droite l'égalité successivement par $(M+2\,I_3)^{-1}$ puis $(M+I_3)^{-1}$, on obtient :** $M = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$**.**

8. On suppose dans cette question que M n'admet aucune valeur propre.
Justifier que les matrices M, $M + I_3$ et $M + 2\,I_3$ sont inversibles. Aboutir à une contradiction.

- **1 pt : Comme M n'admet aucune valeur propre, alors 0, -1 et -2 ne sont pas valeurs propres de M. On en déduit que M, $M + I_3$ et $M + 2\,I_3$ sont inversibles**
- **1 pt : comme $M \in \mathscr{A}$, en multipliant à gauche par M^{-1}, à droite par $(M+I_3)^{-1}$, puis par $(M+2\,I_3)^{-1}$, on obtient :** $I_3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$
- **1 pt : M admet donc au moins une valeur propre**

9. Dans cette question, on suppose que M admet exactement deux valeurs propres distinctes.
On traite ici le cas où $\mathrm{Sp}(M) = \{-1, -2\}$ (et on admet que dans les autres situations, le résultat serait similaire).
On veut démontrer par l'absurde que la matrice M est diagonalisable, et on suppose donc que M ne l'est pas. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est M. On note enfin id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

a) Démontrer :

$$(f + \mathrm{id}) \circ (f + 2\,\mathrm{id}) \;=\; 0 \qquad \text{et} \qquad (f + 2\,\mathrm{id}) \circ (f + \mathrm{id}) \;=\; 0$$

- **3 pts :** $(f+\mathrm{id}) \circ (f + 2\,\mathrm{id}) = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$
  - × **1 pt :** $\mathrm{Sp}(M) = \{-1, -2\}$**, donc M inversible.**
  - × **1 pt : comme $M \in \mathscr{A}$, alors** $(M+I_3)\,(M+2\,I_3) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$
  - × **1 pt : par isomorphisme de représentation** $(f+\mathrm{id}) \circ (f+2\,\mathrm{id}) = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$

- **2 pts :** $(f+2\,\mathrm{id})\circ(f+\mathrm{id}) = (f+\mathrm{id})\circ(f+2\,\mathrm{id})$
  × **1 pt :** $(M+I_3)\,(M+2\,I_3) = M^2+3\,M+2\,I_3 = (M+2\,I_3)\,(M+I_3)$
  × **1 pt : par isomorphisme de représentation, on conclut**

b) Démontrer : $\dim\big(\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id})\big) \geqslant 1$ et $\dim\big(\mathrm{Ker}(f+2\mathrm{id})\big) \geqslant 1$.

- **1 pt : comme M est une matrice représentative de f, alors :** $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(M) = \{-1,-2\}$
- **1 pt : On en déduit :** $\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id}) = E_{-1}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ **et** $\mathrm{Ker}(f+2\,\mathrm{id}) = E_{-2}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

c) En utilisant que M n'est pas diagonalisable, démontrer :

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id})\big) \;=\; 1 \qquad \text{et} \qquad \dim\big(\mathrm{Ker}(f+2\,\mathrm{id})\big) \;=\; 1$$

- **1 pt : comme** $\mathrm{Sp}(f) = \{-1,-2\}$**,**
  et que la matrice M n'est pas diagonalisable, alors l'endomorphisme f non plus.
  On en déduit : $\dim\big(E_{-1}(f)\big) + \dim\big(E_{-2}(f)\big) < \dim(\mathbb{R}^3)$
- **1 pt : Or la dimension d'un espace vectoriel est un entier. On en conclut :** $\dim\big(\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id})\big) + \dim\big(\mathrm{Ker}(f+2\,\mathrm{id})\big) \leqslant 2$
- **1 pt : d'après la question précédente :** $\dim\big(\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id})\big) + \dim\big(\mathrm{Ker}(f+2\,\mathrm{id})\big) \geqslant 2$
- **1 pt : on conclut en remarquant que chacun des termes de la somme de gauche appartient à** $\mathbb{N}^*$

d) Soit u un vecteur propre de f associé à la valeur propre -1.
Soit v un vecteur propre de f associé à la valeur propre -2.

(i) Justifier que (u,v) forme une famille libre dans $\mathbb{R}^3$.

- **1 pt : La famille (u,v) est la concaténation de deux vecteurs propres de f associés à des valeurs propres distinctes. Ils forment donc une famille libre.**

(ii) Soit w un vecteur de $\mathbb{R}^3$ n'appartenant pas à $\mathrm{Vect}\,(u,v)$.
Montrer que la famille (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

- **1 pt : Soit** $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$**. Supposons :** $\lambda_1\cdot u + \lambda_2\cdot v + \lambda_3\cdot w = 0_{\mathbb{R}^3}$ $(*)$**.**
- **1 pt : démonstration par l'absurde de** $\lambda_3 = 0$
- **1 pt : en reprenant $(*)$ et utilisant la liberté de (u,v), on en déduit que (u,v,w) libre**
- **1 pt :** $\mathrm{Card}\big((u,v,w)\big) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

(iii) En utilisant le fait que $\Big((f+\mathrm{id})\circ(f+2\,\mathrm{id})\Big)(w) = 0$ et $\Big((f+2\,\mathrm{id})\circ(f+\mathrm{id})\Big) = 0$, montrer qu'il existe deux réels α et β tels que :

$$f(w)+2\,w \;=\; \alpha\,u \qquad \text{et} \qquad f(w)+w \;=\; \beta\,v$$

En déduire que w est une combinaison linéaire de u et v, et aboutir à une contradiction.

- **1 pt : d'après *9.a)*,** $(f+\mathrm{id})\big(f(w)+2\,w\big) = 0_{\mathbb{R}^3}$ **donc** $f(w)+2\,w \in E_{-1}(f)$
- **2 pt :** $E_{-1}(f) = \mathrm{Vect}\,(u)$
  × **1 pt :** (u) **libre**
  × **1 pt :** $\mathrm{Card}\big((u)\big) = 1 = \dim\big(E_{-1}(f)$ **(d'après la quesion *9.c)*)**
- **1 pt :** $f(w)+2\,w \in \mathrm{Vect}\,(u)$**, il existe donc** $\alpha\in\mathbb{R}$ **tel que :** $f(w)+2\,w = \alpha\,u$
- **1 pt :** $f(w)+w \in \mathrm{Ker}(f+2\,\mathrm{id}) = E_{-2}(f)$

- **1 pt :** $E_{-2}(f) = \text{Vect}\,(v)$**. Il existe donc** $\beta \in \mathbb{R}$ **tel que :** $f(w) + w = \beta\, v$
- **1 pt :** $w = \alpha\, u - \beta\, v \in \text{Vect}\,(u, v)$**. Absurde !**
- **1 pt :** M **est donc diagonalisable**

10. Montrer alors que pour tout matrice M de E :

$$M \in \mathscr{A} \quad \Leftrightarrow \quad M \text{ est diagonalisable et } \text{Sp}(M) \subset \{0, -1, -2\}$$

- **1 pt :** ($\Leftarrow$) **d'après** ***4.***
- **5 pt :** ($\Rightarrow$)
  - × **1 pt : d'après** ***5.***, $\text{Sp}(M) \subset \{0, -1, -2\}$
  - × **1 pt : si** M **admet** 3 **valeurs propres distinctes, alors, d'après la question** ***6.***, **la matrice** M **est diagonalisable.**
  - × **1 pt : si** M **admet exactement** 2 **valeurs propres distinctes, alors, d'après la question** ***9.***, **la matrice** M **est diagonalisable.**
  - × **1 pt : si** M **admet exactement** 1 **valeur propre, alors, d'après la question** ***7.*** **:** $M = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ `OU` $M = -I_3$ `OU` $M = -2\, I_3$**. Dans ces** 3 **cas,** M **est diagonale donc diagonalisable**
  - × **1 pt : d'après la question** ***8.***, **il n'est pas possible que** M **n'admette aucune valeur propre.**

Exercice 2 /59

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose, si ces intégrales convergent :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n}\, dt, \qquad J_n = \int_0^{1} \frac{\ln(t)}{1+t^n}\, dt, \qquad \text{et} \qquad K_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n}\, dt$$

Partie A

Dans cette partie, on fixe un entier n supérieur ou égal à 2.

1. a) Démontrer : $\dfrac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t)$.

- **1 pt**

b) Démontrer : $\forall y \in\,]0,1]$, $\displaystyle\int_y^1 \ln(t)\, dt = -1 + y - y\,\ln(y)$.

En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\, dt$ converge et déterminer sa valeur.

- **1 pt : IPP**
- **1 pt : validité car** $u : t \mapsto \ln(t)$ **et** $v : t \mapsto t$ **sont de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur le segment** $[y,1]$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_y^1 \ln(t)\, dt = -1 + y - y\,\ln(y)$
- **1 pt : par croissances comparées,** $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\, dt$ **est convergente et :** $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\, dt = -1 + 0 - 0 = -1$

c) Démontrer que l'intégrale définissant J_n converge.

- **1 pt : la fonction** $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t^n}$ **est continue sur** $]0,1]$**. L'intégrale** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}\, dt$ **est donc uniquement impropre en** 0**.**
- **3 pts : critère d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues positives**
  - × **1 pt :** $\forall t \in\,]0,1]$, $-\dfrac{\ln(t)}{1+t^n} \geqslant 0$ **et** $-\ln(t) \geqslant 0$
  - × **1 pt : d'après *1.a)*,** $-\dfrac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{t\to 0}{\sim} -\ln(t)$
  - × **1 pt : l'intégrale** $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\, dt$ **est convergente d'après la question précédente. L'intégrale** $\displaystyle\int_0^1 -\ln(t)\, dt$ **l'est donc aussi**

2. a) Calculer $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \left(t^{\frac{3}{2}}\, \frac{\ln(t)}{1+t^n} \right)$.

- **1 pt :** $t^{\frac{3}{2}}\, \dfrac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} t^{\frac{3}{2}}\, \dfrac{\ln(t)}{t^n} = \dfrac{\ln(t)}{t^{n-\frac{3}{2}}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ **par croissances comparées car** $n - \dfrac{3}{2} > 0$ **(car** $n \geqslant 2$**)**

b) En déduire la nature de l'intégrale définissant K_n.

- **1 pt : la fonction** $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t^n}$ **est continue sur** $[1,+\infty[$**. L'intégrale** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n}\,dt$ **est donc uniquement impropre en** $+\infty$**.**
- **3 pts : critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives**
  - × **1 pt : d'après** *2.a)* **:** $\dfrac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$
  - × **1 pt :** $\forall t \in [1,+\infty[$, $\dfrac{\ln(t)}{1+t^n} \geqslant 0$ **et** $\dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \geqslant 0$.
  - × **1 pt : l'intégrale** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt$ **est une intégrale de Riemann, impropre en** $+\infty$**, d'exposant** $\frac{3}{2}$ **(**$\frac{3}{2} > 1$**). Elle est donc convergente.**

3. Quelle est la nature de l'intégrale définissant I_n ?

- **1 pt : La fonction** $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t^n}$ **est continue sur** $]0,+\infty[$**. L'intégrale** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n}\,dt$ **est donc impropre à la fois en** 0 **et en** $+\infty$**.**
- **2 pts :** I_n **convergente**
  - × **1 pt : d'après la question** *1.***, l'intégrale** $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(t)}{1+t^n}\,dt$ **est convergente.**
  - × **1 pt : d'après la question** *2.***, l'intégrale** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n}\,dt$ **est convergente.**

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse à la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. a) Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\forall t \in\,]0,1], \qquad 0 \leqslant \frac{\ln(t)}{1+t^n} - \ln(t) \leqslant -t^n \ln(t)$$

- **1 pt : cas** $t = 1$
- **2 pts : cas** $t \in\,]0,1[$
  - × **1 pt :** $0 \leqslant \dfrac{\ln(t)}{1+t^n} - \ln(t) \leqslant -t^n \ln(t) \Leftrightarrow 0 \geqslant \dfrac{1}{1+t^n} - 1 \geqslant -t^n$ **(car, comme** $t \in\,]0,1[$ **:** $\ln(t) < 0$**)**
  - × **1 pt :** $0 \geqslant \dfrac{1}{1+t^n} - 1 \geqslant -t^n \Leftrightarrow 0 \leqslant 1 \leqslant 1+t^n$

b) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 -t^n \ln(t)\,dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{(n+1)^2}$.

- **1 pt : La fonction** $t \mapsto -t^n \ln(t)$ **est continue sur** $]0,1]$**. L'intégrale** $\displaystyle\int_0^1 -t^n \ln(t)\,dt$ **est donc uniquement impropre en** 0**.**
- **1 pt : IPP**
- **1 pt : Cette IPP est valide car les fonctions** $u : t \mapsto \ln(t)$ **et** $v : t \mapsto -\dfrac{1}{n+1}\,t^{n+1}$ **sont de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur le segment** $[A,1]$

- **1 pt :** $\displaystyle\int_A^1 -t^n \ln(t)\ dt = \frac{1}{n+1}\ A^{n+1}\ln(A) + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\ A^{n+1}$
- **1 pt : par croissances comparées, on a la conclusion**

c) Déduire des questions précédentes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = -1$.

- **1 pt : D'après la question *4.a)*, pour tout** $t \in\ ]0,1]$ **:** $\ln(t) \leqslant \dfrac{\ln(t)}{1+t^n} \leqslant \ln(t) - t^n \ln(t)$
- **1 pt : d'après *1.b)*, *1.c)*, les intégrales** $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ dt$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}\ dt$ **et** $\displaystyle\int_0^1 \ln(t) - t^n \ln(t)\ dt$ **sont convergentes**
- **1 pt : Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant** $(0 \leqslant 1)$**, et les intégrales en présence convergentes :** $\displaystyle -1 \leqslant J_n \leqslant \int_0^1 \ln(t) - t^n \ln(t)\ dt$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^1 \ln(t) - t^n \ln(t)\ dt = -1 + \frac{1}{(n+1)^2}$
- **1 pt : par théorème d'encadrement** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = -1$

5. a) Démontrer que pour tout réel x supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant \ln(x) \leqslant x$.
En déduire que pour tout réel x supérieur ou égal à 1 et pour tout entier n supérieur ou égal à 3 :

$$0 \leqslant \frac{\ln(x)}{1+x^n} \leqslant \frac{1}{x^{n-1}}$$

- **3 pts :** $\forall x \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant \ln(x) \leqslant x$
  × **1 pt : La fonction** $f : x \mapsto \ln(x)$ **est concave sur** $]0,+\infty[$**. Sa courbe représentative** $\mathcal{C}_f$ **est donc située en dessous de ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse** 1
  × **1 pt : cette tangente est la droite d'équation** $y = f(1) + f'(1)\,(x-1) = x-1$
  × **1 pt :** $\ln(x) \leqslant x - 1 \leqslant x$
- **2 pts :** $\forall x \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant \dfrac{\ln(x)}{1+x^n} \leqslant \dfrac{1}{x^{n-1}}$
  × **1 pt :** $x^n \leqslant 1 + x^n$ **donc** $\dfrac{1}{x^{n-1}} \geqslant \dfrac{x}{1+x^n}$
  × **1 pt : par transitivité** $0 \leqslant \dfrac{\ln(x)}{1+x^n} \leqslant \dfrac{x}{1+x^n} \leqslant \dfrac{1}{x^{n-1}}$

b) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $0 \leqslant K_n \leqslant \dfrac{1}{n-2}$.

- **1 pt : l'intégrale** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n}\ dt$ **est convergente d'après *2.b)***
- **1 pt : l'intégrale** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{n-1}}\ dt$ **est une intégrale de Riemann, impropre en** $+\infty$**, d'exposant** $n-1$ $(n-1>1$ **car** $n \geqslant 3)$**. Elle est donc convergente.**
- **1 pt : Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant** $(1 \leqslant +\infty)$**, et les intégrales en présence convergentes :** $\displaystyle 0 \leqslant K_n \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{n-1}}\ dt$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_1^B \frac{1}{t^{n-1}}\ dt = \frac{1}{-n+2}\left(\frac{1}{B^{n-2}} - 1\right) \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{n-2}$

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

- **1 pt : par théorème d'encadrement** $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n = 0$
- **1 pt : par relation de Chasles (car les intégrales en présence sont convergentes) :** $I_n \;=\; \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n}\,dt \;=\; \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n}\,dt \;=\; J_n + K_n$
- **1 pt : d'après les questions précédentes** $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = -1$

Partie C

L'objectif de cette partie est d'obtenir une valeur approchée de l'intégrale J_n à l'aide de **Scilab**.

5. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et y un réel de $]0,1]$.
À l'aide du changement de variable : $u = -\ln(t)$, démontrer :

$$\int_y^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}\,dt \;=\; \int_0^{-\ln(y)} \frac{-u}{1+\mathrm{e}^{-nu}}\,\mathrm{e}^{-u}\,du$$

- **1 pt : Ce changement de variable est valide car** $\varphi : u \mapsto \mathrm{e}^{-u}$ **est de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $[0,-\ln(y)]$
- **1 pt : calcul**

6. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

a) Donner une densité de X.

- **1 pt : Une densité** f_X **de** X **est :** $f_X : t \mapsto \begin{cases} 0 & \textbf{si } t < 0 \\ \mathrm{e}^{-t} & \textbf{si } t \geqslant 0 \end{cases}$

b) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose : $Y_n = \dfrac{-X}{1+\mathrm{e}^{-n\,X}}$.
Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, Y_n admet une espérance, et : $\mathbb{E}(Y_n) = J_n$.

- **1 pt : Par théorème de transfert, la v.a.r.** Y_n **admet une espérance si et seulement si l'intégrale** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-u}{1+\mathrm{e}^{-nu}}\,f_X(u)\,du$ **est absolument convergente.**
- **1 pt :** $\left|\dfrac{-u}{1+\mathrm{e}^{-nu}}\,f_X(u)\right| = \dfrac{u}{1+\mathrm{e}^{-nu}}\,\mathrm{e}^{-u}$
- **1 pt : d'après *1.c*, l'intégrale** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}\,dt$ **est convergente**
- **1 pt : d'après *5.*, comme** $\lim\limits_{y\to 0} -\ln(y) = +\infty$**, alors l'intégrale** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u}{1+\mathrm{e}^{-nu}}\,\mathrm{e}^{-u}\,du$ **est également convergente. Donc** Y_n **admet une espérance.**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Y_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-u}{1+\mathrm{e}^{-nu}}\,\mathrm{e}^{-u}\,du = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}\,dt = J_n$

7. On rappelle qu'en langage **Scilab**, l'instruction `grand(1, 1, 'exp', 1)` renvoie une réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.
Recopier et compléter la fonction ci-dessous qui prend en argument deux entiers n et m, et qui renvoie une matrice à une ligne et m colonnes dont chaque coefficient est une simulation de la réalisaion de Y_n.

```
function Y = simulY(n, m)
    Y = zeros(..., ...)
    for i = .......
        X = grand(1, 1, 'exp', 1)
        Y(i) = .......
    end
endfunction
```

- **3 pts : 1 pt par ligne**

```
    Y = zeros(1, m)
```

```
    for i = 1:m
```

```
        Y(i) = -X / (1 + exp(-n * X))
```

8. a) `(CUBES uniquement)` Énoncer la loi faible des grands nombres.

- **2 pts : tout ou rien**

b) `(CUBES uniquement)` On tape dans **Scilab** le script suivant :

```
n = input(' Entrer la valeur de n')
disp( mean( simulY(n, 1000) ) )
```

Expliquer ce que fait ce script dans le contexte de l'exercice.

- **4 pts :**
  × **1 pt : le script permet d'afficher une approximation de $\mathbb{E}(Y_n)$**
  × **1 pt : $\mathbb{E}(Y_n) = J_n$**
  × **1 pt : le terme LfGN apparaît**
  × **1 pt : une explication de son utilisation est faite**

Exercice 3 /42

Toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

1. a) Vérifier que la fonction f qui à tout réel x associe $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3}\ \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$ peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire Y.

- **1 pt : La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0**
- **1 pt : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$**
- **4 pts : l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx$ est convergente et vaut 1**
  - **1 pt : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = \int_{0}^{+\infty} f(x)\ dx$ car f est nulle en dehors de $]0, +\infty[$**
  - **1 pt : L'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)\ dx$ est convergente et vaut e^{-1}**
  - **1 pt : L'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f(x)\ dx$ est convergente et vaut $1 - \mathrm{e}^{-1}$**
  - **1 pt : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx$ converge et vaut $\mathrm{e}^{-1} + 1 - \mathrm{e}^{-1} = 1$**

b) On note F la fonction de répartition de Y. Déterminer $F(x)$ selon que $x > 0$ ou $x \leqslant 0$.

- **1 pt : On considère : $Y(\Omega) =]0, +\infty[$**
- **1 pt : si $x \leqslant 0$, alors $F(x) = \mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$**
- **1 pt : si $x > 0$, alors $F(x) = \displaystyle\int_{0}^{x} f(t)\ dt$ car f est nulle en dehors de $]0, +\infty[$**
- **1 pt : $\displaystyle\int_{A}^{x} f(t)\ dt \underset{A \to 0}{\longrightarrow} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$**
- **1 pt : si $x > 0$, alors $F(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$**

2. a) Vérifier que la fonction g qui à tout réel x associe $g(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire X.

- **1 pt : La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1**
- **1 pt : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) \geqslant 0$**
- **3 pts : l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\ dx$ est convergente et vaut 1**
  - **1 pt : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\ dx = \int_{1}^{+\infty} g(x)\ dx$ car g est nulle en dehors de $[1, +\infty[$**
  - **1 pt : la fonction g est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} g(x)\ dx$ est uniquement impropre en $+\infty$**
  - **1 pt : $\displaystyle\int_{1}^{B} g(x)\ dx \underset{B \to +\infty}{\longrightarrow} 1$**

b) On note G la fonction de répartition de X. Déterminer $G(x)$ selon que $x \geqslant 1$ ou $x < 1$.

- **1 pt : on considère :** $X(\Omega) = \ [1, +\infty[$
- **1 pt : si** $x < 1$**, alors** $G(x) \ = \ \mathbb{P}\big([X \leqslant x] \big) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$
- **1 pt : si** $x \geqslant 1$**, alors** $G(x) \ = \displaystyle\int_1^x \ g(t) \ dt$ **car** g **est nulle en dehors de** $[1, +\infty[$
- **1 pt : si** $x \geqslant 1$**, alors** $G(x) \ = 1 - \frac{1}{x^2}$

3. On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que X.
Pour tout entier naturel n non nul, on pose $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

a) On note G_n la fonction de répartition de M_n. Exprimer $G_n(x)$ à l'aide de la fonction G puis en déduire explicitement $G_n(x)$ en fonction de x.

- **1 pt :** $M_n(\Omega) \subset [1, +\infty[$
- **1 pt : si** $x < 1$**, alors** $G_n(x) \ = \ \mathbb{P}\big([M_n \leqslant x] \big) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$
- **4 pts : cas** $x \geqslant 1$
  - × **1 pt :** $[M_n \leqslant x] = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \ [X_i \leqslant x]$
  - × **1 pt :** $G_n(x) = \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big([X_i \leqslant x] \big)$ **(car** X_1**, …,** X_n **sont mutuellement indépendantes)**
  - × **1 pt :** $G_n(x) = (G(x))^n$ **(car** X_1**, …,** X_n **ont même loi que** X**)**
  - × **1 pt : comme** $x \geqslant 1$**, alors** $G_n(x) = \big(1 - \frac{1}{x^2}\big)^n$

b) On pose $Y_n = \dfrac{M_n}{\sqrt{n}}$. Justifier que la fonction de répartition F_n de Y_n est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n(x) \ = \ \begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n & \text{si } x \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}} \\[2ex] 0 & \text{si } x < \dfrac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

- **1 pt :** $Y_n(\Omega) \subset \left[\frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty \right[$
- **1 pt : si** $x < \frac{1}{\sqrt{n}}$**, alors** $F_n(x) \ = \ \mathbb{P}\big([Y_n \leqslant x] \big) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$
- **2 pts : cas** $x \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$
  - × **1 pt :** $F_n(x) = \mathbb{P}\big([M_n \leqslant x\sqrt{n}] \big) = G_n(x\sqrt{n})$ **(car** $\sqrt{n} > 0$**)**
  - × **1 pt :** $F_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{n\,x^2}\right)^n$ **(car, comme** $x \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$**, alors** $x\sqrt{n} \geqslant 1$**)**

4. Déterminer, pour tout réel x négatif ou nul, la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

- **1 pt : Comme** $x < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$**, alors d'après la question précédente** $F_n(x) = 0$
- **1 pt :** $\forall x \in \ ]-\infty, 0]$**,** $\lim\limits_{n \to +\infty} \ F_n(x) = 0$

5. a) Soit x un réel strictement positif. Vérifier que, dès que n est supérieur strictement à la partie entière de $\dfrac{1}{x^2}$, on a : $F_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n$.

- **2 pt : si $n > \lfloor \frac{1}{x^2} \rfloor$, alors $x \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$**
- **1 pt : comme $x \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, d'après la question *3.b)* : $F_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n$**

b) Donner un équivalent de $\ln(1+u)$ lorsque u est au voisinage de 0, puis en déduire, pour tout réel x strictement positif, la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

- **1 pt : $\ln(1+u) \underset{u \to 0}{\sim} u$**
- **1 pt : si $n > \left\lfloor \dfrac{1}{x^2} \right\rfloor$, alors $F_n(x) \ = \ \left(1 - \dfrac{1}{n\,x^2}\right)^n \ = \ \exp\left(n \ln\left(1 - \dfrac{1}{n\,x^2}\right)\right)$**
- **1 pt : Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \ -\dfrac{1}{n\,x^2} = 0$, alors $n \ln\left(1 - \dfrac{1}{n\,x^2}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\dfrac{1}{x^2}$**
- **1 pt : $\forall x > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ par continuité de la fonction $\exp$ en $-\dfrac{1}{x^2}$**

6. Conclure que la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont la loi est celle de Y.

- **1 pt : si $x \leqslant 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) \ = \ 0$ et $F(x) = 0$**
- **1 pt : si $x > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) \ = \ \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ et $F(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$**
- **1 pt : F est la fonction de répartition de Y et F_n est la fonction de répartition de Y_n**