

---

## DS6 (version A)

---

### Exercice 1

Soit  $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

On note  $I_3$  la matrice identité de  $E$  et  $0_3$  la matrice nulle de  $E$ .

Soit  $\mathcal{A}$  l'ensemble des matrices  $M$  de  $E$  vérifiant l'égalité :

$$M(M + I_3)(M + 2I_3) = 0_3$$

#### Partie A : Exemple de matrices appartenant à $\mathcal{A}$

1. Déterminer l'ensemble des réels  $\alpha$  tels que :  $\alpha I_3 \in \mathcal{A}$ .

2. L'ensemble  $\mathcal{A}$  est-il un sous-espace vectoriel de  $E$  ?

3. On note  $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ .

a) On pose  $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Calculer  $B X_1$  et  $B X_2$ .

b) En déduire deux valeurs propres de  $B$ .

Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres associés.

c) Démontrer que  $B$  est diagonalisable, et expliciter une matrice  $D$  diagonale et une matrice  $P$  inversible telles que :  $B = PDP^{-1}$ .

d) Démontrer que  $D \in \mathcal{A}$ , puis que  $B \in \mathcal{A}$ .

4. Plus généralement, on suppose que  $M$  est une matrice de  $E$  diagonalisable, que le spectre de  $M$  soit inclus dans  $\{0, -1, -2\}$ .

Démontrer :  $M \in \mathcal{A}$ .

#### Partie B : Diagonalisabilité des matrices de $\mathcal{A}$

Soit  $M$  une matrice appartenant à  $\mathcal{A}$ . On note  $\text{Sp}(M)$  le spectre de  $M$ .

5. Déterminer un polynôme annulateur de  $M$ , et démontrer que le spectre de  $M$  est inclus dans  $\{0, -1, -2\}$ .

6. On suppose dans cette question que  $M$  admet  $0$ ,  $-1$  et  $-2$  comme valeurs propres.  
Justifier que  $M$  est diagonalisable.

7. a) On suppose dans cette question que  $-1$  est l'unique valeur propre de  $M$ .  
Justifier que  $M$  et  $M + 2I_3$  sont inversibles, puis démontrer :  $M = -I_3$ .

b) Que peut-on dire de  $M$  si  $\text{Sp}(M) = \{-2\}$  ? Si  $\text{Sp}(M) = \{0\}$  ?

8. On suppose dans cette question que  $M$  n'admet aucune valeur propre.

Justifier que les matrices  $M$ ,  $M + I_3$  et  $M + 2I_3$  sont inversibles. Aboutir à une contradiction.

9. Dans cette question, on suppose que  $M$  admet exactement deux valeurs propres distinctes.

On traite ici le cas où  $\text{Sp}(M) = \{-1, -2\}$  (et on admet que dans les autres situations, le résultat serait similaire).

On veut démontrer par l'absurde que la matrice  $M$  est diagonalisable, et on suppose donc que  $M$  ne l'est pas. On note  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est  $M$ . On note enfin  $\text{id}$  l'endomorphisme identité de  $\mathbb{R}^3$ .

a) Démontrer :

$$(f + \text{id}) \circ (f + 2\text{id}) = 0 \quad \text{et} \quad (f + 2\text{id}) \circ (f + \text{id}) = 0$$

b) Démontrer :  $\dim(\text{Ker}(f + \text{id})) \geq 1$  et  $\dim(\text{Ker}(f + 2\text{id})) \geq 1$ .

c) En utilisant que  $M$  n'est pas diagonalisable, démontrer :

$$\dim(\text{Ker}(f + \text{id})) = 1 \quad \text{et} \quad \dim(\text{Ker}(f + 2\text{id})) = 1$$

d) Soit  $u$  un vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre  $-1$ .

Soit  $v$  un vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre  $-2$ .

(i) Justifier que  $(u, v)$  forme une famille libre dans  $\mathbb{R}^3$ .

(ii) Soit  $w$  un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  n'appartenant pas à  $\text{Vect}(u, v)$ .

Montrer que la famille  $(u, v, w)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

(iii) En utilisant le fait que  $((f + \text{id}) \circ (f + 2\text{id}))(w) = 0$  et  $((f + 2\text{id}) \circ (f + \text{id}))(w) = 0$ , montrer qu'il existe deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :

$$f(w) + 2w = \alpha u \quad \text{et} \quad f(w) + w = \beta v$$

En déduire que  $w$  est une combinaison linéaire de  $u$  et  $v$ , et aboutir à une contradiction.

10. Montrer alors que pour toute matrice  $M$  de  $E$  :

$$M \in \mathcal{A} \Leftrightarrow M \text{ est diagonalisable et } \text{Sp}(M) \subset \{0, -1, -2\}$$

## Exercice 2

Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, on pose, si ces intégrales convergent :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt, \quad J_n = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt, \quad \text{et} \quad K_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt$$

### Partie A

Dans cette partie, on fixe un entier  $n$  supérieur ou égal à 2.

1. a) Démontrer :  $\frac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln(t)$ .

b) Démontrer :  $\forall y \in ]0, 1], \int_y^1 \ln(t) dt = -1 + y - y \ln(y)$ .

En déduire que l'intégrale  $\int_0^1 \ln(t) dt$  converge et déterminer sa valeur.

c) Démontrer que l'intégrale définissant  $J_n$  converge.

2. a) Calculer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left( t^{\frac{3}{2}} \frac{\ln(t)}{1+t^n} \right)$ .

b) En déduire la nature de l'intégrale définissant  $K_n$ .

3. Quelle est la nature de l'intégrale définissant  $I_n$  ?

### Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse à la limite de  $I_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

4. a) Démontrer que pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, on a :

$$\forall t \in ]0, 1], \quad 0 \leq \frac{\ln(t)}{1+t^n} - \ln(t) \leq -t^n \ln(t)$$

b) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, l'intégrale  $\int_0^1 -t^n \ln(t) dt$  converge et vaut  $\frac{1}{(n+1)^2}$ .

c) Déduire des questions précédentes :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = -1$ .

5. a) Démontrer que pour tout réel  $x$  supérieur ou égal à 1 :  $0 \leq \ln(x) \leq x$ .

En déduire que pour tout réel  $x$  supérieur ou égal à 1 et pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 3 :

$$0 \leq \frac{\ln(x)}{1+x^n} \leq \frac{1}{x^{n-1}}$$

b) En déduire que pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 3 :  $0 \leq K_n \leq \frac{1}{n-2}$ .

c) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n$ , puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .

**Partie C**

L'objectif de cette partie est d'obtenir une valeur approchée de l'intégrale  $J_n$  à l'aide de **Scilab**.

5. Soient  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2 et  $y$  un réel de  $]0, 1]$ .

À l'aide du changement de variable :  $u = -\ln(t)$ , démontrer :

$$\int_y^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt = \int_0^{-\ln(y)} \frac{-u}{1+e^{-nu}} e^{-u} du$$

6. Soit  $X$  une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

a) Donner une densité de  $X$ .

b) Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, on pose :  $Y_n = \frac{-X}{1+e^{-nX}}$ .

Démontrer que pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2,  $Y_n$  admet une espérance, et :  $\mathbb{E}(Y_n) = J_n$ .

7. On rappelle qu'en langage **Scilab**, l'instruction `grand(1, 1, 'exp', 1)` renvoie une réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

Recopier et compléter la fonction ci-dessous qui prend en argument deux entiers  $n$  et  $m$ , et qui renvoie une matrice à une ligne et  $m$  colonnes dont chaque coefficient est une simulation de la réalisation de  $Y_n$ .

```
1  function Y = simulY(n, m)
2      Y = zeros(..., ...)
3      for i = .....
4          X = grand(1, 1, 'exp', 1)
5          Y(i) = .....
6      end
7  endfunction
```

8. a) (CUBES uniquement) Énoncer la loi faible des grands nombres.

b) (CUBES uniquement) On tape dans **Scilab** le script suivant :

```
1  n = input(' Entrer la valeur de n')
2  disp( mean( simulY(n, 1000) ) )
```

Expliquer ce que fait ce script dans le contexte de l'exercice.

### Exercice 3

Toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice sont supposées définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  que l'on ne cherchera pas à déterminer.

1. a) Vérifier que la fonction  $f$  qui à tout réel  $x$  associe  $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$  peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire  $Y$ .

b) On note  $F$  la fonction de répartition de  $Y$ . Déterminer  $F(x)$  selon que  $x > 0$  ou  $x \leq 0$ .

2. a) Vérifier que la fonction  $g$  qui à tout réel  $x$  associe  $g(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$  peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire  $X$ .

b) On note  $G$  la fonction de répartition de  $X$ . Déterminer  $G(x)$  selon que  $x \geq 1$  ou  $x < 1$ .

3. On considère une suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de variables aléatoires mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que  $X$ .

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on pose  $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$  et on admet que  $M_n$  est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

a) On note  $G_n$  la fonction de répartition de  $M_n$ . Exprimer  $G_n(x)$  à l'aide de la fonction  $G$  puis en déduire explicitement  $G_n(x)$  en fonction de  $x$ .

b) On pose  $Y_n = \frac{M_n}{\sqrt{n}}$ . Justifier que la fonction de répartition  $F_n$  de  $Y_n$  est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n & \text{si } x \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \\ 0 & \text{si } x < \frac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

4. Déterminer, pour tout réel  $x$  négatif ou nul, la limite de  $F_n(x)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

5. a) Soit  $x$  un réel strictement positif. Vérifier que, dès que  $n$  est supérieur strictement à la partie entière de  $\frac{1}{x^2}$ , on a :  $F_n(x) = \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n$ .

b) Donner un équivalent de  $\ln(1 + u)$  lorsque  $u$  est au voisinage de 0, puis en déduire, pour tout réel  $x$  strictement positif, la limite de  $F_n(x)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

6. (CUBES uniquement) Conclure que la suite  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en loi vers une variable aléatoire dont la loi est celle de  $Y$ .