DS5 (version B) /177

Exercice /50

- Si k est un entier naturel non nul, alors pour tout endomorphisme f d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E :
  - on note $f^k = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (où l'endomorphisme f apparaît k fois dans cette composition),
  - on pose $f^0 = \mathrm{id}_E$, où id_E est l'endomorphisme identité de E.
- On dit que l'endomorphisme f est nilpotent d'indice k ($k \in \mathbb{N}^*$) si :

$$f^k = 0_{\mathscr{L}(E)} \qquad \text{et} \qquad f^{k-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$$

- Enfin, on note I_2 la matrice identité de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et on dit qu'une matrice A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est nilpotente d'indice k ($k \in \mathbb{N}^*$) si :

$$A^k = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \qquad \text{et} \qquad A^{k-1} \neq 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$$

(avec la convention $A^0 = I_2$).

Partie 1 /14

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice non nulle de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Calculer $A^2 - (a+d)\,A$ en fonction de I_2.

- 1 pt : $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $A^2 - (a+d)A = -(ad-bc)I_2$

2. On suppose dans cette question que A est nilpotente d'indice k.

a) Établir l'égalité : $ad - bc = 0$.

- 1 pt : $ad - bc = 0 \ \Leftrightarrow\ A$ **non inversible**

- 2 pts : A **non inversible par l'absurde**

b) Montrer que k est supérieur ou égal à 2.

- 1 pt : $A \neq 0$

c) En déduire alors : $a + d = 0$.

- 1 pt : $A^2 - (a+d)A = 0$

- 2 pts : $a + d = 0$

3. Conclure : A nilpotente $\Leftrightarrow A^2 = 0$.

- 2 pts : $(\Rightarrow)$

- 2 pts : $(\Leftarrow)$ **(dont** 1 **pour rappeler** $A \neq 0$**)**

Partie 2

Dans cette partie, f désigne un endomorphisme non nul d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 2.

4. ***a)*** Montrer que, si $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$, alors on a : $f^2 = 0$.

- **2 pts (1 pt pour fixer un $x \in E$ et calculer $f^2(x) = f(f(x))$)**

b) On suppose que $f^2 = 0$. Montrer : $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$. Établir alors que $\text{rg}(f) = 1$ puis conclure : $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$.

- **2 pts :** $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$
- **1 pt :** $\dim(\text{Im}(f)) \leqslant \dim(\text{Ker}(f))$
- **1 pt : théorème du rang**
- **1 pt :** $\dim(\text{Ker}(f)) \neq 2$ **par l'absurde**
- **1 pt :** $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$ **(inclusion et égalité des dimensions)**

c) En déduire, à l'aide de la **Partie 1**, l'équivalence : f est nilpotent $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$.

- **1 pt : f nilpotent $\Leftrightarrow f^2 = 0$ (Partie I)**
- **1 pt : d'après *4.a)*** $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f) \Rightarrow f^2 = 0$
- **1 pt : d'après *4.b)*** $f^2 = 0 \Rightarrow \text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$

On suppose dans toute la suite que f est nilpotent d'indice 2 et on en étudie quelques propriétés.

5. ***a)*** L'endomorphisme f est-il bijectif ?

- **2 pts : peu importe la méthode**
  - × **soit par l'absurde**
  - × **soit 1 pt pour :** $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$ **et** $\text{rg}(f) = 1$ **d'après 4.b) et 1 pt pour :** $\text{Ker}(f) \neq \{0_E\}$ **donc f non injectif donc f non bijectif**

b) Déterminer les valeurs propres possibles de f. En déduire $\text{Sp}(f)$.

- **1 pt :** $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ **donc $P(X) = X^2$ est un polynôme annulateur de f**
- **1 pt :** 0 **est l'unique valeur propre possible de f**
- **1 pt : f n'est pas bijectif donc 0 est une valeur propre de f :** $\text{Sp}(f) = \{0\}$**.**

c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

- **1 pt : démarrage raisonnement par l'absurde et écriture de la définition de f diagonalisable (ou A diagonalisable avec A une matrice représentative de f)**
- **1 pt : 0 est l'unique valeur propre possible de f donc la matrice D diagonale et semblable à A est nulle**
- **1 pt : f est l'endomorphisme nul. C'est absurde.**

6. Montrer qu'il existe une base (e'_1, e'_2) de E telle que : $\text{Mat}_{(e'_1,e'_2)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- **1 pt : il existe $u \in E$ tel que** $f(u) \neq 0$
- **2 pts :** $\mathscr{B} = (f(u), u)$ **libre**
- **1 pt :** $(f(u), u)$ **base de E**
- **1 pt :** $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

7. On souhaite montrer par l'absurde qu'il est impossible de trouver deux endomorphismes u et v de E, nilpotents et tels que $f = u \circ v$. On suppose donc que ces deux endomorphismes existent.

a) Montrer les inclusions : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

- **2 pts :** $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(u)$
- **2 pts :** $\mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(f)$

b) En déduire les égalités : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Ker}(f)$.

- **1 pt :** f**,** u **et** v **non nulles**
- **1 pt : de plus** f**,** u**,** v **nilpotentes donc** $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(v) = 1$ **d'après *4.b)***
- **1 pt :** $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(u)$ **(inclusion et égalité des dimensions)**
- **1 pt :** $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) = \dim(\mathrm{Ker}(v))$ **puis** $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Ker}(f)$ **(inclusion et égalité des dimensions)**

c) En déduire l'égalité : $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(v)$.

- **1 pt : rappeler** f **nilpotent** $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$
- **1 pt : rappeler** u **(resp.** v**) nilpotent** $\Leftrightarrow u^2 = 0$
- **1 pt : appliquer 4.b) à** u **(resp.** v**)**
- **1 pt : conclusion**

d) Conclure.

- **1 pt :** $f = 0$**, ce qui est absurde**

Problème /127

- Dans tout le problème, N désigne un entier supérieur ou égal à 1.
- On note $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ respectivement, l'espérance et la variance lorsqu'elles exsitent, de toute variable aléatoire réelle X définie sur un espace probabilisé.
- Soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes et de même loi uniforme discrète sur $[\![1, N]\!]$.
- On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $T_n = \max\big(U_1, U_2, \dots, U_n\big)$ et $Z_n = \min\big(U_1, U_2, \dots, U_n\big)$.
  On admet que T_n et Z_n sont deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Ainsi, pour tout $\omega \in \Omega$:
  $$T_n(\omega) = \max\Big(U_1(\omega), U_2(\omega), \dots, U_n(\omega)\Big) \quad \text{et} \quad Z_n(\omega) = \min\Big(U_1(\omega), U_2(\omega), \dots, U_n(\omega)\Big)$$
- On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $d_n(N) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n & \text{si } N \geqslant 2 \\ 0 & \text{si } N = 1 \end{cases}$

Préliminaires : fourre-tout (définitions et propriétés)

Soit Y une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $[\![1, N]\!]$.

1. Établir les deux relations suivantes :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}\big([Y > k]\big) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\big(Y^2\big) = \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1)\, \mathbb{P}\big([Y > k]\big)$$

- **1 pt :** Y **admet une espérance et un moment d'ordre** 2 **car v.a.r. finie**
- **1 pt :** $[Y > k-1] = [Y = k] \cup [Y > k]$ **(**Y **à valeurs entières)**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Y = k]) = \mathbb{P}([Y > k-1]) - \mathbb{P}([Y > k])$ **(par incompaatibilité)**

- **1 pt : télescopage**
- **1 pt :** $[Y > N] = \varnothing$
- **1 pt : reste calcul pour** $\mathbb{E}(Y)$
- **3 pts : calcul de** $\mathbb{E}(Y^2)$

2. Si $B \in \mathscr{A}$ est un événement de probabilité non nulle, on appelle espérance conditionnelle de Y sachant l'événement B, le réel défini par :

$$\mathbb{E}_B(Y) \ = \ \sum_{k=1}^{N} k \ \mathbb{P}_B\big(\,[Y = k]\,\big) \quad \textit{(c'est la formule de l'espérance dans laquelle } \mathbb{P} \textit{ a été remplacé par } \mathbb{P}_B\textit{)}$$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i\in[\![1,m]\!]}$ un système complet d'événements. Démontrer la **formule de l'espérance totale** :

$$\mathbb{E}(Y) \ = \ \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{E}_{A_i}(Y)$$

- **1 pt :** $\mathbb{E}(Y) = \sum\limits_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}\big(\,[Y = k]\,\big)$
- **1 pt : FPT sur le système complet d'événements** $(A_i)_{i\in[\![1,m]\!]}$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{N} \ \Big(\sum\limits_{i=1}^{m}\Big) = \sum\limits_{i=1}^{m} \ \Big(\sum\limits_{k=1}^{N}\Big)$
- **1 pt :** $\sum\limits_{i=1}^{m} k\,\mathbb{P}_{A_i}\big(\,[Y = k]\,\big)$

3. Pour tout $C \in \mathscr{A}$, on appelle variable aléatoire indicatrice de l'événement C et on note $\mathbb{1}_C$ la variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ par :

$$\mathbb{1}_C(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in C \\ 0 & \text{si } \omega \notin C \end{cases}$$

a) Soit $C \in \mathscr{A}$. Déterminer la loi de $\mathbb{1}_c$. En particulier, donner l'espérance de $\mathbb{1}_c$.

- **1 pt :** $\mathbb{1}_C \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\mathbb{P}(C)\right)$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(\mathbb{1}_C) = \mathbb{P}(C)$

b) Soit $(C, D) \in \mathscr{A} \times \mathscr{A}$. Démontrer :

(i) $\mathbb{1}_{C\,\cap\,D} \ = \ \mathbb{1}_C \times \mathbb{1}_D$.

- **2 pts**

(ii) $\mathbb{1}_C + \mathbb{1}_{\overline{C}} \ = \ 1$.

- **2 pts**

Partie I. Min et Max

4. Rappeler, sans démonstration, les valeurs respectives de $\mathbb{E}(U_1)$ et de $\mathbb{V}(U_1)$.

- **1 pt :** $\mathbb{E}(U_1) = \dfrac{N+1}{2}$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(U_1) = \dfrac{N^2-1}{12}$

5. ***a)*** Calculer, pour tout k de $[\![1,N]\!]$, $\mathbb{P}\big([T_n \leqslant k]\big)$.

- **1 pt :** $[T_n \leqslant k] = \bigcap\limits_{i=1}^{n} [U_i \leqslant k]$
- **1 pt : indépendance de U_1, …, U_n**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([T_n \leqslant k]) = \left(\dfrac{k}{N}\right)^n$

b) En déduire la loi de probabilité de T_n.

- **1 pt :** $T_n(\Omega) \subset [\![1,N]\!]$
- **1 pt :** $[T_n \leqslant k] = [T_n = k] \cup [T_n \leqslant k-1]$ **(car T_n à valeurs entières)**
- **1 pt : évéments incompatibles**
- **2 pts :** $\mathbb{P}([T_n = k]) = \left(\dfrac{k}{N}\right)^n - \left(\dfrac{k-1}{N}\right)^n$ **(distinction $k = 1$ et $k \geqslant 2$)**

6. ***a)*** Montrer que la suite $(d_n(N))_{n\geqslant 1}$ est convergente et calculer sa limite.

- **1 pt :** $\forall k \in [\![1,N-1]\!]$, $\left(\dfrac{k}{N}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n(N) = 0$

b) Exprimer $\mathbb{E}(T_n)$ en fonction de N et de $d_n(N)$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n)$.

- **1 pt : utilisation qst *1.***
- **1 pt :** $\mathbb{E}(T_n) = N - d_n(N)$
- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n) = N$

c) Établir la formule suivante : $\mathbb{V}(T_n) = (2N-1)\, d_n(N) - 2N\, d_{n+1}(N) - {d_n}^2(N)$.
En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{V}(T_n)$.

- **1 pt : utilisation qst *1.* pour $\mathbb{E}(T_n^2)$**
- **2 pts :** $\mathbb{E}(T_n^2) = N^2 - 2N\, d_{n+1}(N) - d_n(N)$
- **1 pt : formule de Koenig-Huygens**
- **1 pt :** $\mathbb{V}(T_n) = (2N-1)d_n(N) - 2N\, d_{n+1}(N) - d_n^2(N)$
- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{V}(T_n) = 0$

d) Montrer que si $N \geqslant 2$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} = 1 - \dfrac{1}{N}$.

En déduire que l'on a : $\mathbb{V}(T_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} d_n(N)$.

- **1 pt :** $d_n(N) = \left(\dfrac{N-1}{N}\right)^n \sum\limits_{k=1}^{N-1} \left(\dfrac{k}{N-1}\right)^n$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{N-1} \left(\dfrac{k}{N-1}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$
- **1 pt :** $d_n(N) \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{N-1}{N}\right)^n$
- **1 pt :** $\dfrac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 - \dfrac{1}{N}$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(T_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} d_n(N)$

7. Déterminer la loi de Z_n. Calculer $\mathbb{E}(Z_n)$ et $\mathbb{V}(Z_n)$.

- **1 pt :** $Z_n(\Omega) \subset [\![1, N]\!]$
- **1 pt :** $[Z_n > k] = \bigcap\limits_{i=1}^{n} [U_i > k]$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Z_n > k]) = \left(1 - \dfrac{k}{N}\right)^n$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Z_n = k]) = \mathbb{P}([Z_n > k-1]) - \mathbb{P}([Z_n > k])$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Z_n = k]) = \left(1 - \dfrac{k-1}{N}\right)^n - \left(1 - \dfrac{k}{N}\right)^n$
- **2 pts :** $\mathbb{E}(Z_n) = d_n(N) + 1$ **(utilisation de *1.* et changement d'indice** $j = N - k$**)**
- **2 pts :** $\mathbb{E}(Z_n^2) = (2N-1)d_n(N) - 1 - 2N d_{n+1}(N)$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(Z_n) = (2N+1)d_n(N) - 2N d_{n+1}(N) - d_n^2(N)$

8. On rappelle que la commande `grand(1, 1, 'uin', a, b)` permet de simuler une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$. Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function T = simulmax(n)` qui simule la variable aléatoire T_n.

- **5 pts**

```
function T = simulmax(n)
  U = zeros(1,n)
  for i = 1:n
    U(i) = grand(1,1,'uin',1,N)
  end
  T = max(U)
endfunction
```

Partie II. Couple (Min, Max)

9. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout couple (k, ℓ) de $\mathbb{N}^2$: $\phi_n(k, \ell) = \mathbb{P}\big([T_n \leqslant k] \cap [Z_n \leqslant \ell]\big)$.

a) Montrer, pour tout $(k, \ell) \in [\![1, N]\!]^2$, la relation suivante :

$$\phi_n(k, \ell) = \begin{cases} \left(\dfrac{k}{N}\right)^n & \text{si } k \leqslant \ell \\[2ex] \left(\dfrac{k}{N}\right)^n - \left(\dfrac{k-\ell}{N}\right)^n & \text{si } k > \ell \end{cases}$$

- **2 pts : cas** $k \leqslant \ell$ **(1 pt pour** $[T_n \leqslant k] \cap [Z_n \leqslant \ell] = [T_n \leqslant k]$**, 1 pt pour** $\Phi(k, \ell) = \left(\dfrac{k}{N}\right)^n$ **d'après** ***3.a)*****)**
- **1 pt :** $[T_n \leqslant k] \cap [Z_n \leqslant \ell] = [T_n \leqslant k] \setminus [Z_n \leqslant \ell]$
- **1 pt :** $\Phi(k, \ell) = \mathbb{P}([T_n \leqslant k]) - \mathbb{P}([T_n \leqslant k] \cap [Z_n > \ell])$
- **1 pt :** $[T_n \leqslant k] \cap [Z_n > \ell] = \bigcap\limits_{i=1}^{n} [\ell < U_i \leqslant k]$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([T_n \leqslant k] \cap [Z_n > \ell]) = \left(\dfrac{k-\ell}{N}\right)^n$
- **1 pt :** $\Phi(k, \ell) = \left(\dfrac{k}{N}\right)^n - \left(\dfrac{k-\ell}{N}\right)^n$

b) Établir, pour tout (k,ℓ) de $[\![1,N]\!]^2$, la formule suivante :

$$\mathbb{P}\big([T_n = k] \cap [Z_n = \ell]\big) \ = \ \phi_n(k,\ell) + \phi_n(k-1,\ell-1) - \phi_n(k-1,\ell) - \phi_n(k,\ell-1)$$

- **3 pts**

c) En déduire, en distinguant les cas $k < \ell$, $k = \ell$ et $k > \ell$, l'expression de $\mathbb{P}\big([T_n = k] \cap [Z_n = \ell]\big)$ en fonction de k et ℓ.

- **2 pts : si $k < \ell$, $\mathbb{P}([T_n = k] \cap [Z_n = \ell]) = 0$**
- **2 pts : si $k = \ell$, $\mathbb{P}([T_n = k] \cap [Z_n = \ell]) = \dfrac{1}{N^n}$**
- **2 pts : si $k > \ell$, $\mathbb{P}([T_n = k] \cap [Z_n = \ell]) = \left(\dfrac{k-\ell-1}{N}\right)^n + \left(\dfrac{k-\ell+1}{N}\right)^n - 2\left(\dfrac{k-\ell}{N}\right)^n$**

10. On donne, pour tout couple (m,n) de $(\mathbb{N}^*)^2$, les deux relations suivantes :

(i) $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \Big((j+1)^n - 2j^n + (j-1)^n\Big) = (m+1)^n - m^n - 1\,;$

(ii) $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} j\Big((j+1)^n - 2j^n + (j-1)^n\Big) = m\,(m+1)^n - (m+1)\,m^n.$

a) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la formule suivante : $\mathbb{E}(T_n Z_n) = N(1 + d_{n+1}(N))$.

- **1 pt : $T_n\, Z_n$ admet une espérance car elle est finie**
- **1 pt : $\mathbb{E}(T_n\, Z_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{\ell=1}^{N} k\,\ell\ \mathbb{P}([T_n = k] \cap [Z_n = \ell])\right)$**
- **1 pt : d'après *9.c)* $\mathbb{E}(T_n\, Z_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell<k}}^{N} k\,\ell\ \left(\left(\frac{k-\ell-1}{N}\right)^n + \left(\frac{k-\ell+1}{N}\right)^n - 2\left(\frac{k-\ell}{N}\right)^n\right) + \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell=k}}^{N} k\,\ell\ \frac{1}{N^n}\right) = \frac{1}{N^n} \sum_{k=1}^{N} \left(k \sum_{\ell=1}^{k-1} \ell\ \big((k-\ell-1)^n + (k-\ell+1)^n - 2\,(k-\ell)^n\big) + k^2\right)$**
- **1 pt : avec le changement d'indice $j = k - \ell$: $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{k-1} \ell\ \big((k-\ell-1)^n + (k-\ell+1)^n - 2\,(k-\ell)^n\big) = k \sum_{j=1}^{k-1} \big((j-1)^n + (j+1)^n - 2j^n\big) - \sum_{j=1}^{k-1} j\ \big((j-1)^n + (j+1)^n - 2j^n\big)$**
- **1 pt : en appliquant *10(i)* et *10(ii)* à $m = k-1$, on obtient : $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{k-1} \ell\ \big((k-\ell-1)^n + (k-\ell+1)^n - 2\,(k-\ell)^n\big) = k\ \big(k^n - (k-1)^n - 1\big) - \big((k-1)k^n - k(k-1)^n\big) = k^n - k$**
- **1 pt : fin du calcul**

b) On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, ρ_n le cœfficient de corrélation linéaire entre T_n et Z_n.
Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \rho_n$ lorsque $N \geqslant 2$.

- **1 pt : T_n et Z_n admettent une variance non nulle d'après *6.c)* et *7.*, donc ρ_n est bien défini**
- **1 pt : $\rho_n \ = \ \dfrac{\mathrm{Cov}(T_n, Z_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(T_n)\,\mathbb{V}(Z_n)}}$**
- **1 pt : d'après *10.a)*, *6.b)* et *7.* :** $\mathrm{Cov}(T_n, Z_n) = \mathbb{E}(T_n\, Z_n) - \mathbb{E}(T_n)\,\mathbb{E}(Z_n) = N\,(1 + d_{n+1}(N)) - (N - d_n(N))(d_n(N) + 1) = N\,d_{n+1}(N) - N\,d_n(N) + d_n(N)^2 + d_n(N)$

- **1 pt : d'après *6.d)* et *7.* :** $\sqrt{\mathbb{V}(T_n)\,\mathbb{V}(Z_n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} d_n(N)$
- **1 pt :** $\rho_n = \dfrac{\mathrm{Cov}(T_n, Z_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(T_n)\,\mathbb{V}(Z_n)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} N\,\dfrac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} - N + d_n(N) + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ **(d'après *6.d)* et *6.a)*)**

11. a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout couple (k, ℓ) de $[\![1, N]\!]^2$, calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[T_n=k]}\big([Z_n = \ell]\big)$.

- **2 pts : d'après *9.c)* et *5.b)* :** $\mathbb{P}_{[T_n=k]}\big([Z_n = \ell]\big) = \begin{cases} 0 & \textbf{si } k < \ell \\ \dfrac{1}{k^n - (k-1)^n} & \textbf{si } k = \ell \\ \dfrac{(k-\ell-1)^n + (k-\ell+1)^n - 2\,(k-\ell)^n}{k^n - (k-1)^n} & \textbf{si } k > \ell \end{cases}$

b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout k de $[\![1, N]\!]$, l'expression de l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}_{[T_n=k]}(Z_n)$.

- **1 pt : d'après *11.a)* :** $\mathbb{E}_{[T_n=k]}(Z_n) = \sum\limits_{\substack{\ell = 1 \\ \ell < k}}^{N} \ell\, \dfrac{(k-\ell-1)^n + (k-\ell+1)^n - 2\,(k-\ell)^n}{k^n - (k-1)^n} + \sum\limits_{\substack{\ell = 1 \\ \ell = k}}^{N} \ell\, \dfrac{1}{k^n - (k-1)^n}$
- **1 pt : avec les calcule déjà faits en *10.a)* :** $\mathbb{E}_{[T_n=k]}(Z_n) = \dfrac{k^n}{k^n - (k-1)^n}$

Partie III. Prévision

- Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on dispose d'un $(n+1)$-échantillon indépendant et identiquement distribué $(U_1, U_2, \ldots, U_{n+1})$ de la loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$.
- On pose : $T_n = \max(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ et $T_{n+1} = \max(U_1, U_2, \ldots, U_{n+1}) = \max(T_n, U_{n+1})$.
- Pour tout $t = (t_1, t_2, \ldots, t_N)$ de $\mathbb{R}^N$, on pose : $W_t(T_n) = \sum\limits_{k=1}^{N} t_k \times \mathbb{1}_{[T_n=k]}$.

Dans cette partie, on se propose de déterminer la valeur de t pour laquelle les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $\mathbb{E}\big(W_t(T_n)\big) = \mathbb{E}\big(T_{n+1}\big)$;

(ii) $\mathbb{E}\Big(\big(T_{n+1} - W_t(T_n)\big)^2\Big)$ est minimale.

12. Montrer, pour tout k de $[\![1, N]\!]$, la relation : $\mathbb{P}\big([W_t(T_n) = t_k]\big) = \mathbb{P}\big([T_n = k]\big)$.

- **1 pt : Soit $\omega \in \Omega$. Comme la famille $\big([T_n = j]\big)_{j\in[\![1,N]\!]}$ forme un système complet d'événements, alors il existe un unique $j_0 \in [\![1, N]\!]$ tel que : $\omega \in [T_n = j_0]$.**
- **1 pt :** $\big(W_t(T_n)\big)(\omega) = t_{j_0}$
- **1 pt : disjonction de cas pour conclure** $[T_n = k] = [W_t(T_n) = t_k]$

13. Établir, pour tout k de $[\![1, N]\!]$, la formule suivante : $\mathbb{E}\big(T_{n+1} \times \mathbb{1}_{[T_n=k]}\big) = \mathbb{P}\big([T_n = k]\big) \times \mathbb{E}_{[T_n=k]}(T_{n+1})$.

- **1 pt :** $T_{n+1} \times \mathbb{1}_{[T_n=k]}$ **admet une espérance car c'est une v.a.r. finie**
- **2 pts :** $\mathbb{E}\big(T_{n+1} \times \mathbb{1}_{[T_n=k]}\big) = \mathbb{P}\big([T_n = k]\big) \times \mathbb{E}_{[T_n=k]}(T_{n+1})$

× **1 pt :** $\mathbb{E}\big(T_{n+1} \times \mathbb{1}_{[T_n=k]}\big) = \sum\limits_{i=1}^{N} \left(\sum\limits_{j=0}^{1} i\, j\ \mathbb{P}\big([T_{n+1} = i] \cap \big[\mathbb{1}_{[T_n=k]} = j\big]\,\big) \right) = \sum\limits_{i=1}^{N} i\ \mathbb{P}\big([T_{n+1} = i] \cap [T_n = k]\,\big)$

× **1 pt : fin du calcul**

14. a) Calculer, pour tout couple (k, j) de $[\![1, N]\!]^2$, $\mathbb{P}\big([T_n = k] \cap [T_{n+1} = j]\,\big)$.

- **1 pt : L'événement** $[T_n = k] \cap [T_{n+1} = j]$ **est réalisé** $\Leftrightarrow$ **la plus grande valeur prise par** U_1**, ...,** U_n **est** k `ET` **la plus grande valeur prise par** U_1**, ...,** U_n**,** U_{n+1} **est** j
- **1 pt : cas** $k > j$ **:** $[T_n = k] \cap [T_{n+1} = j] = \varnothing$**, donc** $\mathbb{P}\big([T_n = k] \cap [T_{n+1} = j]\,\big) = 0$
- **3 pts : cas** $k = j$
  × **1 pt :** $[T_n = k] \cap [T_{n+1} = k] \ = \ [T_n = k] \cap [U_{n+1} \leqslant k]$
  × **1 pt :** T_n **et** U_{n+1} **sont indépendantes par lemme des coalitions**
  × **1 pt :** $\mathbb{P}\big([T_n = k] \cap [T_{n+1} = k]\,\big) = \left(\left(\dfrac{k}{N}\right)^n - \left(\dfrac{k-1}{N}\right)^n \right) \dfrac{k}{N}$ **(calculs effectués en *5.b)*)**
- **2 pts : cas** $k < j$
  × **1 pt :** $[T_n = k] \cap [T_{n+1} = j] \ = \ [T_n = k] \cap [U_{n+1} = j]$
  × **1 pt : en raisonnant comme dans le cas précédent :** $\mathbb{P}\big([T_n = k] \cap [T_{n+1} = j]\,\big) = \left(\left(\dfrac{k}{N}\right)^n - \left(\dfrac{k-1}{N}\right)^n \right) \times \dfrac{1}{N}$

b) En déduire, pour tout couple (k, j) de $[\![1, N]\!]^2$, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[T_n=k]}\big([T_{n+1} = j]\,\big)$.

- **1 pt : d'après la question précédente et *5.b)*,** $\mathbb{P}_{[T_n=k]}\big([T_{n+1} = j]\,\big) = \begin{cases} 0 & \textbf{si } k > j \\ \dfrac{k}{N} & \textbf{si } k = j \\ \dfrac{1}{N} & \textbf{si } k < j \end{cases}$

c) Déterminer, pour tout k de $[\![1, N]\!]$, l'expression de l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}_{[T_n=k]}(T_{n+1})$.

- **1 pt : d'après la question précédente :** $\mathbb{E}_{[T_n=k]}(T_{n+1}) = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j=k}}^{N} j\ \dfrac{k}{N} + \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j>k}}^{N} j\ \dfrac{1}{N} = \dfrac{k^2}{N} + \dfrac{1}{N} \sum\limits_{j=k+1}^{N} j$
- **1 pt :** $\sum\limits_{j=k+1}^{N} j = \dfrac{N\,(N+1) - k^2 - k}{2}$
- **1 pt :** $\mathbb{E}_{[T_n=k]}(T_{n+1}) \ = \ \dfrac{k^2}{2N} - \dfrac{k}{2N} + \dfrac{N+1}{2}$

d) En appliquant la formule de l'espérance totale, déduire de la question précédente la relation suivante :
$$\mathbb{E}(T_{n+1}) \ = \ \frac{N+1}{2} + \frac{1}{2N}\Big(\mathbb{E}(T_n^2) - \mathbb{E}(T_n)\Big)$$

- **1 pt : par formule de l'espérance totale :** $\mathbb{E}(T_{n+1}) = \sum\limits_{k=1}^{N} \mathbb{P}\big([T_n = k]\,\big)\ \mathbb{E}_{[T_n=k]}(T_{n+1})$
- **1 pt : d'après la question précédente :** $\mathbb{E}(T_{n+1}) = \dfrac{1}{2N}\ \mathbb{E}(T_n^2) - \dfrac{1}{2N}\ \mathbb{E}(T_n) + \dfrac{N+1}{2} \sum\limits_{k=1}^{N} \mathbb{P}\big([T_n = k]\,\big)$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(T_{n+1}) = \dfrac{1}{2N}\Big(\mathbb{E}(T_n^2) - \mathbb{E}(T_n)\Big) + \dfrac{N+1}{2}$ **(car** $\big([T_n = k]\,\big)_{k \in [\![1,N]\!]}$ **forme un système complet d'événements)**

15. Établir l'égalité suivante : $\Big(W_t(T_n)\Big)^2 = \sum\limits_{k=1}^{N} t_k^2 \times \mathbb{1}_{[T_n=k]}$.

- **1 pt :** $\Big(W_t(T_n)\Big)^2 = \sum\limits_{k=1}^{N} \big(t_k\ \mathbb{1}_{[T_n=k]}\big)^2 + \sum\limits_{\substack{1 \leqslant k, j \leqslant N \\ j \neq k}} t_k\, \mathbb{1}_{[T_n=k]} \times t_j\, \mathbb{1}_{[T_n=j]}$
- **1 pt : d'après *3.b)(i)* :** $\Big(W_t(T_n)\Big)^2 = \sum\limits_{k=1}^{N} \big(t_k\ \mathbb{1}_{[T_n=k]}\big)^2 + \sum\limits_{k=1}^{N} \Bigg(\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{N} t_k\, \mathbb{1}_{[T_n=k]} \times t_j\, \mathbb{1}_{[T_n=j]}\Bigg)$
- **1 pt :** $\Big(W_t(T_n)\Big)^2 = \sum\limits_{k=1}^{N} t_k^2\ \big(\mathbb{1}_{[T_n=k]}\big)^2$ **(car, comme $k \neq j$, $[T_n = k]$ et $[T_n = j]$ sont incompatibles)**
- **1 pt :** $\big(\mathbb{1}_{[T_n=k]}\big)^2 = \mathbb{1}_{[T_n=k]}$

16. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^N$ à valeurs réelles par :

$$g(t_1, t_2, \ldots, t_N) = \mathbb{E}\Big(\big(T_{n+1} - W_t(T_N)\big)^2\Big)$$

a) À l'aide des résultats des questions ***13***, ***14*** et ***15***, expliciter g en fonction des variables t_1, t_2, $\ldots$, t_N.

- **1 pt : par linéarité de l'espérance et d'après *13.* :**
  $\mathbb{E}\big(T_{n+1}\, W_t(T_n)\big) = \sum\limits_{k=1}^{N} t_k\, \mathbb{P}\big(\,[T_n = k]\,\big)\, \mathbb{E}_{[T_n=k]}(T_{n+1})$
- **1 pt : d'après *15.*, puis linéarité de l'espérance, puis *13.a)* :**
  $\mathbb{E}\Big(\big(W_t(T_n)\big)^2\Big) = \sum\limits_{k=1}^{N} t_k^2\, \mathbb{E}\,\big(\mathbb{1}_{[T_n=k]}\big) = \sum\limits_{k=1}^{N} t_k^2\, \mathbb{P}\big(\,[T_n = k]\,\big)$
- **1 pt : fin du calcul :** $g(t_1, \ldots, t_N) = \sum\limits_{k=1}^{N} \big(\mathbb{E}(T_{n+1}^2) - 2\ t_k\ \mathbb{E}_{[T_n=k]}(T_{n+1}) + t_k^2\big)\, \mathbb{P}\big(\,[T_n = k]\,\big)$

b) Montrer que g admet un minimum global sur $\mathbb{R}^N$ atteint en un point $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$ que l'on déterminera en fonction de $\mathbb{E}_{[T_n=1]}(T_{n+1})$, $\mathbb{E}_{[T_n=2]}(T_{n+1})$, $\ldots$, $\mathbb{E}_{[T_n=N]}(T_{n+1})$.

- **1 pt : si pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, θ_k minimise $\varphi_k : x \mapsto \mathbb{E}(T_{n+1}^2) - 2\ x\ \mathbb{E}_{[T_n=k]}(T_{n+1}) + x^2$, alors $(\theta_1, \ldots, \theta_N)$ est un minimum global de g**
- **2 pts : pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, la fonction φ_k atteint son minimum en $\theta_k = \mathbb{E}_{[T_n=k]}(T_{n+1})$**

17. Établir les deux relations suivantes : $\mathbb{E}\big(W_\theta(T_n)\big) = \mathbb{E}(T_{n+1})$ et $\mathbb{V}\big(W_\theta(T_n)\big) \leqslant \mathbb{V}(T_{n+1})$.

- **1 pt : $W_\theta(T_n)$ admet une variance (et donc une espérance) car c'est une v.a.r. finie**
- **2 pts :** $\mathbb{E}\big(W_\theta(T_n)\big) = \mathbb{E}(T_{n+1})$
  - **1 pt :** $\mathbb{E}\big(W_\theta(T_n)\big) = \sum\limits_{k=1}^{N} \theta_k\ \mathbb{E}\,\big(\mathbb{1}_{[T_n=k]}\big) = \sum\limits_{k=1}^{N} \theta_k\ \mathbb{P}\big(\,[T_n = k]\,\big)$ **(d'après *3.a)*)**
  - **1 pt :** $\mathbb{E}\big(W_\theta(T_n)\big) = \sum\limits_{k=1}^{N} \mathbb{E}_{[T_n=k]}(T_{n+1})\ \mathbb{P}\big(\,[T_n = k]\,\big) = \mathbb{E}(T_{n+1})$ **(par définition de θ_k en *16.b)* et formule de l'espérance totale)**

- **3 pts :** $\mathbb{V}\big(W_\theta(T_n)\big) \leqslant \mathbb{V}(T_{n+1})$
  × **1 pt :** $\mathbb{V}(T_{n+1}) - \mathbb{V}\big(W_\theta(T_n)\big) = \mathbb{E}(T_{n+1}^2) - \sum\limits_{k=1}^{N} \theta_k^2 \ \mathbb{P}\big(\,[T_n = k]\,\big)$
  × **1 pt :** $g(\theta) = \mathbb{E}(T_{n+1}^2) - \sum\limits_{k=1}^{N} \theta_k^2 \ \mathbb{P}\big(\,[T_n = k]\,\big)$
  × **1 pt :** $\mathbb{V}(T_{n+1}) - \mathbb{V}\big(W_\theta(T_n)\big) = g(\theta) = \mathbb{E}\Big(\big(T_{n+1} - W_\theta(T_n)\big)^2\Big) \geqslant 0$ **(par positivité de l'espérance)**

18. a) Établir, pour tout i de $\mathbb{N}^*$, l'égalité suivante : $\sum\limits_{k=1}^{N} k^i \times \mathbb{1}_{[T_n=k]} = (T_n)^i$.

- **2 pts**

b) En déduire la relation suivante : $W_\theta(T_n) = \dfrac{N+1}{2} + \dfrac{1}{2N}\big(T_n^2 - T_n\big)$.

- **1 pt : par définition de θ_k et d'après *14.c)* :**
  $W_\theta(T_n) = \sum\limits_{k=1}^{N} \theta_k \ \mathbb{1}_{[T_n=k]} = \sum\limits_{k=1}^{N} \mathbb{E}_{[T_n=k]}(T_{n+1}) \ \mathbb{1}_{[T_n=k]} = \sum\limits_{k=1}^{N} \left(\dfrac{k^2}{2N} - \dfrac{k}{2N} + \dfrac{N+1}{2}\right) \mathbb{1}_{[T_n=k]}$
- **1 pt :** $W_\theta(T_n) = \dfrac{1}{2N} \ T_n^2 - \dfrac{1}{2N} \ T_n + \dfrac{N+1}{2} \sum\limits_{k=1}^{N} \mathbb{1}_{[T_n=k]} = \dfrac{1}{2N}\big(T_n^2 - T_n\big) + \dfrac{N+1}{2}$
  (d'après la question précédente et car $\big(\,[T_n = k]\,\big)_{k \in [\![1,N]\!]}$ forme un système complet d'événements)