DS5 (version B)

Exercice

- Si k est un entier naturel non nul, alors pour tout endomorphisme f d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E :
  - on note $f^k = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (où l'endomorphisme f apparaît k fois dans cette composition),
  - on pose $f^0 = \mathrm{id}_E$, où id_E est l'endomorphisme identité de E.
- On dit que l'endomorphisme f est nilpotent d'indice k ($k \in \mathbb{N}^*$) si :

$$f^k = 0_{\mathscr{L}(E)} \qquad \text{et} \qquad f^{k-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$$

- Enfin, on note I_2 la matrice identité de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et on dit qu'une matrice A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est nilpotente d'indice k ($k \in \mathbb{N}^*$) si :

$$A^k = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \qquad \text{et} \qquad A^{k-1} \neq 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$$

  (avec la convention $A^0 = I_2$).

Partie 1

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice non nulle de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Calculer $A^2 - (a+d)\,A$ en fonction de I_2.

2. On suppose dans cette question que A est nilpotente d'indice k.

a) Établir l'égalité : $ad - bc = 0$.

b) Montrer que k est supérieur ou égal à 2.

c) En déduire alors : $a + d = 0$.

3. Conclure : A nilpotente $\Leftrightarrow A^2 = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$.

Partie 2

Dans cette partie, f désigne un endomorphisme non nul d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 2.

4. ***a)*** Montrer que, si $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$, alors on a : $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

b) On suppose : $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Montrer : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
Établir alors : $\mathrm{rg}(f) = 1$ puis conclure : $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.

c) En déduire, à l'aide de la **Partie 1**, l'équivalence : f est nilpotent $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.

On suppose dans toute la suite que f est nilpotent d'indice 2 et on en étudie quelques propriétés.

5. ***a)*** L'endomorphisme f est-il bijectif ?

b) Déterminer les valeurs propres possibles de f. En déduire $\mathrm{Sp}(f)$.

c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

6. Montrer qu'il existe une base (e'_1, e'_2) de E telle que : $\mathrm{Mat}_{(e'_1, e'_2)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7. On souhaite montrer par l'absurde qu'il est impossible de trouver deux endomorphismes u et v de E, nilpotents et tels que $f = u \circ v$. On suppose donc que ces deux endomorphismes existent.

a) Montrer les inclusions : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

b) En déduire les égalités : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Ker}(f)$.

c) En déduire l'égalité : $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(v)$.

d) Conclure.

Problème

- Dans tout le problème, N désigne un entier supérieur ou égal à 1.
- On note $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ respectivement, l'espérance et la variance lorsqu'elles exsitent, de toute variable aléatoire réelle X définie sur un espace probabilisé.
- Soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes et de même loi uniforme discrète sur $[\![1, N]\!]$.
- On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $T_n = \max\big(U_1, U_2, \dots, U_n\big)$ et $Z_n = \min\big(U_1, U_2, \dots, U_n\big)$.
  On admet que T_n et Z_n sont deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Ainsi, pour tout $\omega \in \Omega$:
  $$T_n(\omega) = \max\Big(U_1(\omega), U_2(\omega), \dots, U_n(\omega)\Big) \quad \text{et} \quad Z_n(\omega) = \min\Big(U_1(\omega), U_2(\omega), \dots, U_n(\omega)\Big)$$
- On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $d_n(N) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n & \text{si } N \geqslant 2 \\ 0 & \text{si } N = 1 \end{cases}$

Préliminaires : fourre-tout (définitions et propriétés)

Soit Y une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $[\![1, N]\!]$.

1. Établir les deux relations suivantes :
$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}\big([Y > k]\big) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\big(Y^2\big) = \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1)\, \mathbb{P}\big([Y > k]\big)$$

2. Si $B \in \mathscr{A}$ est un événement de probabilité non nulle, on appelle espérance conditionnelle de Y sachant l'événement B, le réel défini par :
$$\mathbb{E}_B(Y) \ = \ \sum_{k=1}^{N} k\, \mathbb{P}_B\big([Y = k]\big)$$
(c'est la formule de l'espérance dans laquelle $\mathbb{P}$ a été remplacé par $\mathbb{P}_B$)

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i\in[\![1,m]\!]}$ un système complet d'événements. Démontrer la **formule de l'espérance totale** :
$$\mathbb{E}(Y) \ = \ \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{E}_{A_i}(Y)$$

3. Pour tout $C \in \mathscr{A}$, on appelle variable aléatoire indicatrice de l'événement C et on note $\mathbb{1}_C$ la variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ par :
$$\mathbb{1}_C(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in C \\ 0 & \text{si } \omega \notin C \end{cases}$$

a) Soit $C \in \mathscr{A}$. Déterminer la loi de $\mathbb{1}_c$. En particulier, donner l'espérance de $\mathbb{1}_c$.

b) Soit $(C, D) \in \mathscr{A} \times \mathscr{A}$. Démontrer :

(i) $\mathbb{1}_{C\cap D} \ = \ \mathbb{1}_C \times \mathbb{1}_D$.

(ii) $\mathbb{1}_C + \mathbb{1}_{\overline{C}} \ = \ 1$.

Partie I. Min et Max

4. Rappeler, sans démonstration, les valeurs respectives de $\mathbb{E}(U_1)$ et de $\mathbb{V}(U_1)$.

5. ***a)*** Calculer, pour tout k de $[\![1, N]\!]$, $\mathbb{P}\big([T_n \leqslant k]\big)$.

b) En déduire la loi de probabilité de T_n.

6. ***a)*** Montrer que la suite $(d_n(N))_{n \geqslant 1}$ est convergente et calculer sa limite.

b) Exprimer $\mathbb{E}(T_n)$ en fonction de N et de $d_n(N)$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(T_n)$.

c) Établir la formule suivante : $\mathbb{V}(T_n) = (2N - 1)\, d_n(N) - 2N\, d_{n+1}(N) - {d_n}^2(N)$.
En déduire la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{V}(T_n)$.

d) Montrer que si $N \geqslant 2$, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} = 1 - \dfrac{1}{N}$.

En déduire que l'on a : $\mathbb{V}(T_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} d_n(N)$.

7. Déterminer la loi de Z_n. Calculer $\mathbb{E}(Z_n)$ et $\mathbb{V}(Z_n)$.

8. On rappelle que la commande `grand(1, 1, 'uin', a, b)` permet de simuler une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$. Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function T = simulmax(n)` qui simule la variable aléatoire T_n.

Partie II. Couple (Min, Max)

9. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout couple (k, ℓ) de $\mathbb{N}^2$: $\phi_n(k, \ell) = \mathbb{P}\big([T_n \leqslant k] \cap [Z_n \leqslant \ell]\big)$.

a) Montrer, pour tout $(k, \ell) \in [\![1, N]\!]^2$, la relation suivante :

$$\phi_n(k, \ell) = \begin{cases} \left(\dfrac{k}{N}\right)^n & \text{si } k \leqslant \ell \\ \left(\dfrac{k}{N}\right)^n - \left(\dfrac{k - \ell}{N}\right)^n & \text{si } k > \ell \end{cases}$$

b) Établir, pour tout (k, ℓ) de $[\![1, N]\!]^2$, la formule suivante :

$$\mathbb{P}\big([T_n = k] \cap [Z_n = \ell]\big) \;=\; \phi_n(k, \ell) + \phi_n(k - 1, \ell - 1) - \phi_n(k - 1, \ell) - \phi_n(k, \ell - 1)$$

c) En déduire, en distinguant les cas $k < \ell$, $k = \ell$ et $k > \ell$, l'expression de $\mathbb{P}\big([T_n = k] \cap [Z_n = \ell]\big)$ en fonction de k et ℓ.

10. On donne, pour tout couple (m, n) de $(\mathbb{N}^*)^2$, les deux relations suivantes :

(i) $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \Big((j + 1)^n - 2j^n + (j - 1)^n\Big) = (m + 1)^n - m^n - 1\,;$

(ii) $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} j\Big((j + 1)^n - 2j^n + (j - 1)^n\Big) = m\,(m + 1)^n - (m + 1)\, m^n.$

a) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la formule suivante : $\mathbb{E}(T_n Z_n) = N(1 + d_{n+1}(N))$.

b) On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, ρ_n le cœfficient de corrélation linéaire entre T_n et Z_n.
Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \rho_n$ lorsque $N \geqslant 2$.

11. a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout couple (k,ℓ) de $[\![1,N]\!]^2$, calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[T_n=k]}\big([Z_n=\ell]\big)$.

b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout k de $[\![1,N]\!]$, l'expression de l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}_{[T_n=k]}(Z_n)$.

Partie III. Prévision

- Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on dispose d'un $(n+1)$-échantillon indépendant et identiquement distribué $(U_1,U_2,\dots,U_{n+1})$ de la loi uniforme sur $[\![1,N]\!]$.
- On pose : $T_n=\max(U_1,U_2,\dots,U_n)$ et $T_{n+1}=\max(U_1,U_2,\dots,U_{n+1})=\max(T_n,U_{n+1})$.
- Pour tout $t=(t_1,t_2,\dots,t_N)$ de $\mathbb{R}^N$, on pose : $W_t(T_n)=\sum\limits_{k=1}^{N} t_k\times \mathbb{1}_{[T_n=k]}$.

Dans cette partie, on se propose de déterminer la valeur de t pour laquelle les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $\mathbb{E}\big(W_t(T_n)\big) \;=\; \mathbb{E}\big(T_{n+1}\big)$;

(ii) $\mathbb{E}\Big(\big(T_{n+1}-W_t(T_n)\big)^2\Big)$ est minimale.

12. Montrer, pour tout k de $[\![1,N]\!]$, la relation : $\mathbb{P}\big([W_t(T_n)=t_k]\big) \;=\; \mathbb{P}\big([T_n=k]\big)$.

13. Établir, pour tout k de $[\![1,N]\!]$, la formule suivante : $\mathbb{E}\big(T_{n+1}\times\mathbb{1}_{[T_n=k]}\big)=\mathbb{P}\big([T_n=k]\big)\times\mathbb{E}_{[T_n=k]}(T_{n+1})$.

14. a) Calculer, pour tout couple (k,j) de $[\![1,N]\!]^2$, $\mathbb{P}\big([T_n=k]\cap[T_{n+1}=j]\big)$.

b) En déduire, pour tout couple (k,j) de $[\![1,N]\!]^2$, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[T_n=k]}\big([T_{n+1}=j]\big)$.

c) Déterminer, pour tout k de $[\![1,N]\!]$, l'expression de l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}_{[T_n=k]}(T_{n+1})$.

d) En appliquant la formule de l'espérance totale, déduire de la question précédente la relation suivante :

$$\mathbb{E}(T_{n+1}) \;=\; \frac{N+1}{2}+\frac{1}{2N}\Big(\mathbb{E}(T_n^2)-\mathbb{E}(T_n)\Big)$$

15. Établir l'égalité suivante : $\Big(W_t(T_n)\Big)^2=\sum\limits_{k=1}^{N} t_k^2\times\mathbb{1}_{[T_n=k]}$.

16. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^N$ à valeurs réelles par :

$$g(t_1,t_2,\dots,t_N)=\mathbb{E}\Big(\big(T_{n+1}-W_t(T_N)\big)^2\Big)$$

a) À l'aide des résultats des questions ***13***, ***14*** et ***15***, expliciter g en fonction des variables t_1, t_2, $\dots$, t_N.

b) Montrer que g admet un minimum global sur $\mathbb{R}^N$ atteint en un point $\theta=(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_N)$ que l'on déterminera en fonction de $\mathbb{E}_{[T_n=1]}(T_{n+1})$, $\mathbb{E}_{[T_n=2]}(T_{n+1})$, $\dots$, $\mathbb{E}_{[T_n=N]}(T_{n+1})$.

17. Établir les deux relations suivantes : $\mathbb{E}\big(W_\theta(T_n)\big)=\mathbb{E}(T_{n+1})$ et $\mathbb{V}\big(W_\theta(T_n)\big)\leqslant\mathbb{V}(T_{n+1})$.

18. a) Établir, pour tout i de $\mathbb{N}^*$, l'égalité suivante : $\sum\limits_{k=1}^{N} k^i\times\mathbb{1}_{[T_n=k]}=(T_n)^i$.

b) En déduire la relation suivante : $W_\theta(T_n)=\dfrac{N+1}{2}+\dfrac{1}{2N}\big(T_n^2-T_n\big)$.