DS5 (version A) /192

Exercice 1 /56

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

1. a) Démontrer : $(A - I_3)^2 (A - 3\, I_3) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

- **1 pt :** $(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $(A - I_3)^2 (A - 3\, I_3) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$

b) En déduire les valeurs propres possibles de f.

- **1 pt :** $P(X) = (X-1)^2 (X-3)$ **est un polynôme annulateur de la matrice** A
- **1 pt :** $\mathrm{Sp}(A) \subset \{$**racines de** $P\} = \{1, 3\}$ **(ou racines propres possibles)**
- **1 pt :** $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A)$

c) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
On précisera la dimension des sous-espaces propres.
En particulier, on écrira : $\mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\,(w)$ où w est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ de première coordonnée 1.

- **1 pt :** 1 **est valeur propre**
- **3 pts : détermination de** $E_1(f) = \mathrm{Vect}\,((0,1,1))$
  - **1 pt : écriture du système**
  - **1 pt : résolution**
  - **1 pt : manipulation correcte des objets (pas accordé en cas de confusion entre** $E_1(f)$ **et** $E_1(A)$**)**
- **2 pts :** $\mathcal{F}_1 = \big((0,1,1)\big)$ **est une base de** $E_1(f)$ **(**1 **point pour libre,** 1 **point pour génératrice).**
- **1 pt :** $\dim(E_1(f)) = 1$
- **2 pts : détermination de** $E_3(f) = \mathrm{Vect}\,((1,1,0))$
  - **1 pt : écriture du système**
  - **1 pt : résolution et manipulation correcte des objets (pas accordé en cas de confusion entre** $E_3(f)$ **et** $E_3(A)$**)**
- **1 pt :** $\mathcal{F}_2 = \big((1,1,0)\big)$ **est une base de** $E_3(f)$ **(« comme précédemment » permet d'obtenir le point si la démo de** $\mathcal{F}_1$ **est une base est juste)**
- **1 pt :** $\dim(E_3(f)) = 1$

d) L'endomorphisme f est-il bijectif ?
L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

- 1 pt : 0 n'est pas valeur propre donc f est injectif

- 1 pt : mention de la dimension finie pour injectif $\Leftrightarrow$ bijectif

- 1 pt : non diagonalisable car $\dim\big(E_1(f)\big) + \dim\big(E_3(f)\big) = 2 \neq 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

2. Pour tout endomorphisme $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$, on rappelle que l'on note g^2 l'endomorphisme défini par :

$$g^2 = g \circ g$$

a) Démontrer : $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}) \subset \mathrm{Ker}\,\big((f - \mathrm{id})^2\big)$.

- 2 pts : on enlève 1 pt en cas de confusion ou de mauvaise introduction d'objets.

b) Démontrer : $\mathrm{Ker}\,\big((f - \mathrm{id})^2\big) = \mathrm{Vect}\,(u, v)$ où $u = (0, 1, 1)$ et $v = (1, 0, 1)$.

- 3 pts : détermination de $\mathrm{Ker}\,\big((f - \mathrm{id})^2\big) = \mathrm{Vect}\,((0, 1, 1), (1, 0, 1))$

- 1 pt : écriture du système

- 1 pt : résolution

- 1 pt : manipulation correcte des objets (pas accordé en cas de confusion entre $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$)

3. a) Démontrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
Dans la suite, on notera $\mathscr{B}'$ cette base.

- 2 pts : caractère libre. Dont 1 pt pour la qualité de la rédaction.

- 1 pt : conclusion (libre et de cardinal $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$)

b) On note $T = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$. Déterminer T.

- 1 pt : $f(u) = 1 \cdot u$ **car** $u \in E_1(f)$**, donc** $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(u)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- 2 pts : $f(v) = -4 \cdot u + 1 \cdot v + 0 \cdot w$**, donc** $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(v)) = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $f(w) = 3 \cdot w$ **car** $w \in E_3(f)$**, donc** $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(w)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $T = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

En cas d'erreur de calcul pour $f(v)$ on attribue 1 pt/2 si la méthodo est bonne et on attribue aussi le point pour T.

c) On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.
Déterminer l'inverse de P.

- 1 pt : $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- 3 pts : $P^{-1} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **(2 point calcul / 1 point rédaction)**

d) Rappeler la formule liant les matrices A, T et P.

- 1 pt : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f\big) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}\big(f\big) \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$ **donc** $A = P\ T\ P^{-1}$

4. a) On note : $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exprimer T en fonction de J et N.

- 1 pt : $T = J - 4\,N$

b) À l'aide de la formule du binôme, démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ T^n = J^n - 4n\,N$.

- 1 pt : $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$

- 1 pt : $JN = N = NJ$ **donc** J **et** N **commutent**

- 1 pt : $T^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ J^{n-k}\ (-4N)^k$

- 1 pt : $\sum\limits_{k=0}^{n}\ \ldots = \sum\limits_{k=0}^{1}\ \ldots + \sum\limits_{k=2}^{n}\ \ldots$ **car** $n \geqslant 1$

- 1 pt : $\sum\limits_{k=2}^{n}\ \ldots = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ **car :** $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0$

- 1 pt : $J^{n-1}N = N$

- 1 pt : propriété vraie au rang 0

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer A^n.

- 1 pt : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PT^nP^{-1}$

- 1 pt : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3^n \\ 1 & -4n & 3^n \\ 1 & 1-4n & 0 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3^n \\ 1 & -4n & 3^n \\ 1 & 1-4n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1 & -3^n+1 \\ 3^n-1-4n & 3^n+1+4n & -3^n-4n+1 \\ -4n & 4n & 2-4n \end{pmatrix}$

5. a) Démontrer que A est inversible et déterminer son inverse.

- 1 pt : $(A - I_3)^2\,(A - 3\,I_3) = A^3 - 5\,A^2 + 7\,A - 3\,I_3$

- 1 pt : $A\left(\dfrac{1}{3}\ \left(A^2 - 5\,A + 7\,I_2\right)\right) = I_3$

- 1 pt : A **est inversible d'inverse** $A^{-1} = \dfrac{1}{3}\ \left(A^2 - 5\,A + 7\,I_2\right)$

b) La formule démontrée en *4.c)* est-elle valable pour $n = -1$?

- 1 pt : $A^2 - 5\,A + 7\,I_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 7 \\ 6 & -6 & 9 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $\dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^{-1}+1 & 3^{-1}-1 & -3^{-1}+1 \\ 3^{-1}-1+4 & 3^{-1}+1-4 & -3^{-1}+4+1 \\ 4 & -4 & 2+4 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 7 \\ 6 & -6 & 9 \end{pmatrix}$

Exercice 2 /36

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note p un réel de $]0,1[$ et on pose $q = 1-p$.
On dispose d'une pièce donnant Pile avec la probabilité p et Face avec la probabilité q.
Onx lance cette pièce et on arrête les lancers dans l'une des deux situations suivantes :

× soit si l'on a obtenu Pile,

× soit si l'on a obtenu n fois Face.

Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k (respectivement F_k l'événement « on obtient Pile (respectivement Face) au $k^{\text{ème}}$ lancer ».
On note T_n le nombre de lancers effectués, X_n le nombre de Pile obtenus et enfin Y_n le nombre de Face obtenus. On admet que T_n, X_n et Y_n sont des variables aléatoires toutes les trois définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à préciser.

1. Loi de T_n.

a) Pour tout k de $[\![1, n-1]\!]$, déterminer, en distinguant le cas $k = 1$, la probabilité $\mathbb{P}([T_n = k])$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}([T_n = 1]) = p$
- **1 pt :** $[T_n = k] \ = \ F_1 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap P_k$
- **1 pt : lancers indépendants**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([T_n = k]) = q^{k-1}p$

b) Déterminer $\mathbb{P}([T_n = n])$.

- **1 pt :** $[T_n = n] \ = \ F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1}$
- **1 pt : lancers indépendants**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([T_n = n]) = q^{n-1}$

c) Vérifier : $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([T_n = k]) = 1$.

- **1 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([T_n = k]) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([T_n = k]) + \mathbb{P}([T_n = n])$
- **1 pt : somme des termes d'une suite géométrique de raison** q **avec** $q \neq 1$
- **1 pt : fin calcul**

d) Établir que T_n possède une espérance et vérifier : $\mathbb{E}(T_n) = \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

- **1 pt :** T_n **admet une espérance car c'est une v.a.r. finie**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(T_n) = p \sum\limits_{k=1}^{n-1} k\, q^{k-1} + nq^{n-1}$
- **2 pts :** $(1-q) \left(p \sum\limits_{k=1}^{n-1} k\, q^{k-1} + nq^{n-1} \right) = 1 - q^n$

2. Loi de X_n.

a) Donner la loi de X_n.

- **1 pt :** $X_n(\Omega) = \{0, 1\}$
- **1 pt :** $[X_n = 0] = F_1 \cap \cdots \cap F_n$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_n = 0]) = q^n$
- **1 pt :** $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(1 - q^n)$

b) Vérifier : $\mathbb{E}(X_n) = 1 - q^n$.

- 1 pt

3. Loi de Y_n.

a) Déterminer, pour tout k de $[\![0, n-1]\!]$, la probabilité $\mathbb{P}([Y_n = k])$.

- 1 pt : $\mathbb{P}([Y_n = 0]) = p$

- 1 pt : $[Y_n = k] \;=\; F_1 \cap \cdots F_k \cap P_{k+1}$

- 1 pt : $\mathbb{P}([Y_n = k]) = q^k p$

- 1 pt : lancers indépendants

b) Déterminer $\mathbb{P}([Y_n = n])$.

- 1 pt : $[Y_n = n] \;=\; F_1 \cap \cdots \cap F_n$

- 1 pt : $\mathbb{P}([Y_n = n]) = q^n$

- 1 pt : lancers indépendants

c) Écrire une égalité liant les variables aléatoires T_n, X_n et Y_n, puis en déduire $\mathbb{E}(Y_n)$.

- 1 pt : $T_n = X_n + Y_n$

- 1 pt : Y_n **admet une espérance en tant que différence de v.a.r. admettant une espérance**

- 1 pt : $\mathbb{E}(Y_n) = \dfrac{q}{p}\,(1 - q^n)$ **par linéarité de l'espérance**

4. `(CUBES uniquement - admis pour les autres)`
Montrer que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire T dont on donnera la loi.

- 2 pt : calcul de $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}([T_n = k]) = q^{k-1} p$ **pour tout** $k \in \mathbb{N}^*$

- 1 pt : reconnaissance d'une loi géométrique de paramètre p

5. Simulation informatique.
On rappelle que l'appel `grand(1,1,'bin',1,p)` renvoie une réalisation d'une v.a.r. suivant une loi de Bernoulli de paramètre `p`. Compléter les quatre instructions manquantes pour que le programme suivant simule l'expérience aléatoire décrite ci-dessus et pour qu'il affiche, dans cet ordre, les valeurs prises par les variables aléatoires T_n, X_n et Y_n, à l'exécution de l'instruction `disp([t, x, y])`.

```
p = input('Entrez un reel p :')
n = input('Entrez un entier n :')
t = 0 ; x = 0 ; y = 0 ;
while (x == 0) & (t < n)
  ----------
  if lancer == 0 then
    ----------
    ----------
  else
    ----------
  end
end
disp([t, x, y])
```

- 4 pts : 1 pt par commande

```
lancer = grand(1,1,'bin',1,p)
```

```
y = y + 1
t = t + 1
```

```
t = t + 1 ; x = 1
```

Exercice 3 /50

- Si k est un entier naturel non nul, alors pour tout endomorphisme f d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E :
  - $\times$ on note $f^k = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (où l'endomorphisme f apparaît k fois dans cette composition),
  - $\times$ on pose $f^0 = \text{id}_E$, où id_E est l'endomorphisme identité de E.
- On dit que l'endomorphisme f est nilpotent d'indice k ($k \in \mathbb{N}^*$) si :

$$f^k = 0_{\mathscr{L}(E)} \qquad \text{et} \qquad f^{k-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$$

- Enfin, on note I_2 la matrice identité de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et on dit qu'une matrice A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est nilpotente d'indice k ($k \in \mathbb{N}^*$) si :

$$A^k = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \qquad \text{et} \qquad A^{k-1} \neq 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$$

(avec la convention $A^0 = I_2$).

Partie 1 /14

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice non nulle de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Calculer $A^2 - (a+d)\,A$ en fonction de I_2.

- 1 pt : $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $A^2 - (a+d)A = -(ad-bc)I_2$

2. On suppose dans cette question que A est nilpotente d'indice k.

a) Établir l'égalité : $ad - bc = 0$.

- 1 pt : $ad - bc = 0 \;\Leftrightarrow\; A$ **non inversible**

- 2 pts : A **non inversible par l'absurde**

b) Montrer que k est supérieur ou égal à 2.

- 1 pt : $A \neq 0$

c) En déduire alors : $a + d = 0$.

- 1 pt : $A^2 - (a+d)A = 0$

- 2 pts : $a + d = 0$

3. Conclure : A nilpotente $\Leftrightarrow A^2 = 0$.

- 2 pts : $(\Rightarrow)$

- 2 pts : $(\Leftarrow)$ **(dont** 1 **pour rappeler** $A \neq 0$**)**

Partie 2

Dans cette partie, f désigne un endomorphisme non nul d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 2.

4. ***a)*** Montrer que, si $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$, alors on a : $f^2 = 0$.

- 2 pts (1 pt pour fixer un $x \in E$ **et calculer** $f^2(x) = f(f(x))$**)**

b) On suppose que $f^2 = 0$. Montrer : $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$. Établir alors que $\text{rg}(f) = 1$ puis conclure : $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$.

- **2 pts :** $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$
- **1 pt :** $\dim(\text{Im}(f)) \leqslant \dim(\text{Ker}(f))$
- **1 pt : théorème du rang**
- **1 pt :** $\dim(\text{Ker}(f)) \neq 2$ **par l'absurde**
- **1 pt :** $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$ **(inclusion et égalité des dimensions)**

c) En déduire, à l'aide de la **Partie 1**, l'équivalence : f est nilpotent $\Leftrightarrow$ $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$.

- **1 pt :** f **nilpotent** $\Leftrightarrow f^2 = 0$ **(Partie I)**
- **1 pt : d'après *4.a)*** $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f) \Rightarrow f^2 = 0$
- **1 pt : d'après *4.b)*** $f^2 = 0 \Rightarrow \text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$

On suppose dans toute la suite que f est nilpotent d'indice 2 et on en étudie quelques propriétés.

5. *a)* L'endomorphisme f est-il bijectif ?

- **2 pts : peu importe la méthode**
  - × **soit par l'absurde**
  - × **soit 1 pt pour :** $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$ **et** $\text{rg}(f) = 1$ **d'après 4.b) et 1 pt pour :** $\text{Ker}(f) \neq \{0_E\}$ **donc** f **non injectif donc** f **non bijectif**

b) Déterminer les valeurs propres possibles de f. En déduire $\text{Sp}(f)$.

- **1 pt :** $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ **donc** $P(X) = X^2$ **est un polynôme annulateur de** f
- **1 pt :** 0 **est l'unique valeur propre possible de** f
- **1 pt :** f **n'est pas bijectif donc** 0 **est une valeur propre de** f **:** $\text{Sp}(f) = \{0\}$.

c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

- **1 pt : démarrage raisonnement par l'absurde et écriture de la définition de** f **diagonalisable (ou** A **diagonalisable avec** A **une matrice représentative de** f**)**
- **1 pt :** 0 **est l'unique valeur propre possible de** f **donc la matrice** D **diagonale et semblable à** A **est nulle**
- **1 pt :** f **est l'endomorphisme nul. C'est absurde.**

6. Montrer qu'il existe une base (e'_1, e'_2) de E telle que : $\text{Mat}_{(e'_1,e'_2)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- **1 pt : il existe** $u \in E$ **tel que** $f(u) \neq 0$
- **2 pts :** $\mathscr{B} = (f(u), u)$ **libre**
- **1 pt :** $(f(u), u)$ **base de** E
- **1 pt :** $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

7. On souhaite montrer par l'absurde qu'il est impossible de trouver deux endomorphismes u et v de E, nilpotents et tels que $f = u \circ v$. On suppose donc que ces deux endomorphismes existent.

a) Montrer les inclusions : $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(f)$.

- **2 pts :** $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(u)$
- **2 pts :** $\text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(f)$

b) En déduire les égalités : $\text{Im}(f) = \text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(v) = \text{Ker}(f)$.

- **1 pt :** f**,** u **et** v **non nulles**
- **1 pt : de plus** f**,** u**,** v **nilpotentes donc** $\text{rg}(f) = \text{rg}(u) = \text{rg}(v) = 1$ **d'après *4.b)***

- **1 pt :** $\text{Im}(f) = \text{Im}(u)$ **(inclusion et égalité des dimensions)**
- **1 pt :** $\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\text{Ker}(u)) = \dim(\text{Ker}(v))$ **puis** $\text{Ker}(v) = \text{Ker}(f)$ **(inclusion et égalité des dimensions)**

c) En déduire l'égalité : $\text{Ker}(u) = \text{Im}(v)$.

- **1 pt : rappeler** f **nilpotent** $\Leftrightarrow$ $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$
- **1 pt : rappeler** u **(resp.** v**) nilpotent** $\Leftrightarrow$ $u^2 = 0$
- **1 pt : appliquer 4.b) à** u **(resp.** v**)**
- **1 pt : conclusion**

d) Conclure.

- **1 pt :** $f = 0$**, ce qui est absurde**

Problème /50

On dispose de deux pièces identiques donnant pile avec la probabilité p, élément de $]0,1[$, et face avec la probabilité $q = 1 - p$.

Partie 1 : un jeu naïf

Deux joueurs A et B s'affrontent lors de lancers de ces pièces de la façon suivante, les lancers de chaque pièce étant supposés indépendants :
Pour la première manche, A et B lancent chacun leur pièce simultanément jusqu'à ce qu'ils obtiennent pile, le gagnant du jeu étant celui qui a obtenu pile le premier. En cas d'égalité et en cas d'égalité seulement, les joueurs participent à une deuxième manche dans les mêmes conditions et avec la même règle, et ainsi de suite jusqu'à la victoire de l'un d'entre eux.
Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note X_k (resp. Y_k) la variable aléatoire égale au rang d'obtention du 1^{er} pile par A (resp. par B) lors de la $k^{\text{ème}}$ manche.
On note, toujours pour k dans $\mathbb{N}^*$, E_k l'événement « Il y a égalité à la fin de la $k^{\text{ème}}$ manche ».
On note E l'événement « Il y a perpétuellement égalité ».
On note G (resp. H) l'événement « A (resp. B) gagne à ce jeu », et pour tout entier naturel n non nul, on note G_n (resp. H_n) l'événement « A (resp.B) gagne le jeu à la $n^{\text{ème}}$ manche ».

1. Étude de la première manche.

a) Donner la loi commune à X_1 et Y_1. En déduire qu'il est quasi-impossible que la première manche dure éternellement. On admet alors qu'il en est de même pour chaque manche jouée.

- **1 pt : lors de la première manche, l'expérience pour le joueur A consiste en une succession infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes et identiques, de même paramètre p**
- **1 pt : X_1 est la v.a.r. égale au rang du premier succès (premier pile)**
- **1 pt :** $X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$
- **1 pt :** $Y_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ **par un raisonnement analogue**
- **1 pt :** $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = i]) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y_1 = i]) = 1$ **donc il est quasi-certain que le joueur A et le joueur B obtiennent Pile en un temps fini**

b) Écrire l'événement E_1 à l'aide des variables X_1 et Y_1.

- **1 pt :** $E_1 = [X_1 = Y_1]$

c) Montrer que $\mathbb{P}(E_1) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = i])\,\mathbb{P}([Y_1 = i])$ et en déduire l'expression explicite de $\mathbb{P}(E_1)$ en fonction de p et q.

- **1 pt :** $\big([X_1 = i]\big)_{i\in\mathbb{N}^*}$ **forme un SCE**
- **1 pt : par FPT :** $\mathbb{P}(E_1) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [Y_1 = i])$
- **1 pt : par indépendance des lancers :** $\mathbb{P}(E_1) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = i])\,\mathbb{P}([Y_1 = i])$
- **1 pt : reconnaissance somme géométrique de raison q^2 avec** $\left|q^2\right| < 1$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(E_1) = \frac{p^2}{1-q^2} = \cdots = \frac{p}{1+q}$

d) Justifier sans aucun calcul que les événements G_1 et H_1 sont équiprobables. En déduire la probabilité de G_1 en fonction de p et q.

- **1 pt :** G_1 **et** H_1 **sont équiprobables par symétrie des rôles des joueurs** A **et** B
- **1 pt :** $\overline{E_1} = G_1 \cup H_1$
- **1 pt : par incompatibilité de** G_1 **et** H_1**,** $1 - \mathbb{P}(E_1) = \mathbb{P}(G_1) + \mathbb{P}(H_1) = 2\mathbb{P}(G_1)$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(G_1) = \frac{q}{1+q}$

2. Calcul de la probabilité de l'événement G.

a) Écrire, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, l'événement G_n à l'aide des événements E_k et de l'événement $[X_n \leqslant Y_n]$.

- **2 pt :** $G_n = E_1 \cap \cdots \cap E_{n-1} \cap [X_n < Y_n]$ **(1 pt si** $[X_n \leqslant Y_n]$**)**

b) Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, calculer $\mathbb{P}_{E_1 \cap \cdots \cap E_{k-1}}(E_k)$ puis en déduire :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \mathbb{P}(G_n) \; = \; \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \; \frac{q}{1+q}$$

- **1 pt :** $\mathbb{P}_{E_1 \cap \cdots \cap E_{k-1}}(E_k) = \mathbb{P}(E_1) = \frac{p}{1+q}$ **(chaque manche suit les même règles et les manches sont indépendantes)**
- **1 pt : formule des probabilités composées bien écrite**
- **1 pt :** $\mathbb{P}_{E_1 \cap \cdots \cap E_{n-1}}([X_n < Y_n]) = \mathbb{P}(G_1) = \frac{q}{1+q}$ **(chaque manche suit les même règles et les manches sont indépendantes)**

c) Vérifier que le résultat précédent reste valable pour $n = 1$.

- **1 pt : d'une part** $\left(\dfrac{p}{1+q}\right)^{1-1} \; \dfrac{q}{1+q} = \dfrac{q}{1+q}$
- **1 pt : d'autre part** $\mathbb{P}_{E_1 \cap \cdots \cap E_{1-1}}([X_1 < Y_1]) = \mathbb{P}(G_1) = \dfrac{q}{1+q}$

d) Exprimer G en fonction des G_n puis conclure, après calcul : $\mathbb{P}(G) = \dfrac{1}{2}$.

- **1 pt :** $G = \bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n$
- **1 pt : par incompatibilité,** $\mathbb{P}(G) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(G_n)$
- **1 pt : reconnaissance d'une somme géométrique de raison** $\frac{p}{1+q}$ **avec** $\left|\frac{p}{1+q}\right| < 1$
- **1 pt : fin du calcul sans arnaque**

e) Expliquer comment obtenir la probabilité de l'événement H : « B gagne à ce jeu » et en déduire que ce jeu a presque sûrement une fin, c'est à dire que $\mathbb{P}(E) = 0$.

- **1 pt :** G **et** H **sont équiprobables par symétrie des rôles des joueurs** A **et** B
- **1 pt : par incompatibilité** $\mathbb{P}(G \cup H) = \mathbb{P}(G) + \mathbb{P}(H) = 1$
- **1 pt :** $E = \overline{G \cup H}$ **donc** $\mathbb{P}(E) = 1 - 1 = 0$

Partie 2 : un autre jeu

En parallèle du jeu précédent, A parie sur le fait que la manche gagnée par le vainqueur le sera par un lancer d'écart et B parie le contraire.

3. *a)* À l'aide du système complet d'événements $([X_1 = i])_{i \in \mathbb{N}^*}$, démontrer : $\mathbb{P}([Y_1 = X_1 + 1]) = \dfrac{pq}{1+q}$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}([Y_1 = X_1 + 1]) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y_1 = i + 1] \cap [X_1 = i])$

- **1 pt :** $\mathbb{P}([Y_1 = X_1 + 1]) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y_1 = i+1])\, \mathbb{P}([X_1 = i])$ **par indépendance de** X_1 **et** Y_1
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Y_1 = X_1 + 1]) = q \sum\limits_{i=1}^{+\infty} p^2 q^{2i-2} = q\frac{p}{1+q}$ **cf 1.c)**

b) En déduire la probabilité u que l'un des deux joueurs gagne à la première manche par un lancer d'écart.

- **1 pt : par symétrie des rôles des joueurs** A **et** B**, on a** $\mathbb{P}([Y_1 = X_1 + 1]) = \mathbb{P}([X_1 = Y_1 + 1])$
- **1 pt : par incompatibilité,** $u = \mathbb{P}([Y_1 = X_1 + 1]) + \mathbb{P}([Y_1 = X_1 - 1]) = \frac{2pq}{1+q}$

4. a) Utiliser les événements E_k pour écrire l'événement K_n « l'un des deux joueurs gagne à la $n^{\text{ème}}$ manche par un lancer d'écart », ceci pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

- **1 pt :** $K_n = E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_{n-1} \cap ([Y_n = X_n - 1] \cup [Y_n = X_n + 1])$

b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de $\mathbb{P}(K_n)$.

- **1 pt : formule des probabilités composées bien écrite**
- **1 pt :** $\mathbb{P}(K_n) = \left(\dfrac{p}{1+q}\right)^{n-1} \dfrac{2pq}{1+q} = 2q\left(\dfrac{p}{1+q}\right)^{n}$

5. Donner finalement la probabilité de l'événement K : « A gagne ce pari ».

- **1 pt :** $K = \bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n$
- **1 pt : par incompatibilité,** $\mathbb{P}(K) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(K_n)$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(K) = \dfrac{2pq}{1+q} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\dfrac{p}{1+q}\right)^{n}$ **par un changement d'indice**
- **1 pt : on reconnaît une somme géométrique de raison** $\dfrac{p}{1+q}$ **avec** $\left|\dfrac{p}{1+q}\right| < 1$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(K) = p$

Partie 3 : informatique

On rappelle que la commande `grand(1, 1, 'geom', p)` permet à **Scilab** de simuler une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.

6. Compléter le script **Scilab** suivant pour qu'il simule l'expérience décrite dans la partie 1 et affiche le nom du vainqueur du premier jeu ainsi que le numéro de la manche à laquelle il a gagné.

```
p = input('entrez une valeur pour p : ')
c = 1
X = grand(1, 1, 'geom', p)
Y = grand(1, 1, 'geom', p)
while X == Y
    X = ----
    Y = ----
    c = ----
end
if X < Y then ----
          else ----
end
disp(c)
```

- **5 pts : 1 pt par commande**

```
X = grand(1, 1, 'geom', p)
Y = grand(1, 1, 'geom', p)
c = c+1
```

```
if X < Y then disp(A)
         else disp(B)
```

7. Compléter la commande suivante afin qu'une fois ajoutée au script précédent elle permette de simuler le deuxième jeu et d'en donner le nom du vainqueur.

```
if ----- then disp('A gagne le deuxième jeu') else ----- end
```

- **2 pts**

```
if X = Y + 1 or Y = X + 1 then disp('A gagne le deuxième jeu')
else disp('B gagne le deuxième jeu') end
```