DS5 (version A)

Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

1. ***a)*** Démontrer : $(A - I_3)^2 \, (A - 3\, I_3) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

b) En déduire les valeurs propres possibles de f.

c) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
On précisera la dimension des sous-espaces propres.
En particulier, on écrira : $\mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\,(w)$ où w est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ de première coordonnée 1.

d) L'endomorphisme f est-il bijectif ?
L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2. Pour tout endomorphisme $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$, on rappelle que l'on note g^2 l'endomorphisme défini par :

$$g^2 = g \circ g$$

a) Démontrer : $\mathrm{Ker}\,\big(f - \mathrm{id}\big) \subset \mathrm{Ker}\,\big((f - \mathrm{id})^2\big)$.

b) Démontrer : $\mathrm{Ker}\,\big((f - \mathrm{id})^2\big) = \mathrm{Vect}\,(u, v)$ où $u = (0, 1, 1)$ et $v = (1, 0, 1)$.

3. ***a)*** Démontrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
Dans la suite, on notera $\mathscr{B}'$ cette base.

b) On note $T = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$. Déterminer T.

c) On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.
Déterminer l'inverse de P.

d) Rappeler la formule liant les matrices A, T et P.

4. ***a)*** On note : $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Exprimer T en fonction de J et N.

b) À l'aide de la formule du binôme, démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \; T^n = J^n - 4n\, N$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer A^n.

5. ***a)*** Démontrer que A est inversible et déterminer son inverse.

b) La formule démontrée en ***4.c)*** est-elle valable pour $n = -1$?

Exercice 2

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note p un réel de $]0,1[$ et on pose $q = 1-p$.
On dispose d'une pièce donnant Pile avec la probabilité p et Face avec la probabilité q.
On lance cette pièce et on arrête les lancers dans l'une des deux situations suivantes :

× soit si l'on a obtenu Pile,

× soit si l'on a obtenu n fois Face.

Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k (respectivement F_k l'événement « on obtient Pile (respectivement Face) au $k^{\text{ème}}$ lancer ».
On note T_n le nombre de lancers effectués, X_n le nombre de Pile obtenus et enfin Y_n le nombre de Face obtenus. On admet que T_n, X_n et Y_n sont des variables aléatoires toutes les trois définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à préciser.

1. Loi de T_n.

a) Pour tout k de $[\![1, n-1]\!]$, déterminer, en distinguant le cas $k = 1$, la probabilité $\mathbb{P}([T_n = k])$.

b) Déterminer $\mathbb{P}([T_n = n])$.

c) Vérifier : $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([T_n = k]) = 1$.

d) Établir que T_n possède une espérance et vérifier : $\mathbb{E}(T_n) = \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

2. Loi de X_n.

a) Donner la loi de X_n.

b) Vérifier : $\mathbb{E}(X_n) = 1 - q^n$.

3. Loi de Y_n.

a) Déterminer, pour tout k de $[\![0, n-1]\!]$, la probabilité $\mathbb{P}([Y_n = k])$.

b) Déterminer $\mathbb{P}([Y_n = n])$.

c) Écrire une égalité liant les variables aléatoires T_n, X_n et Y_n, puis en déduire $\mathbb{E}(Y_n)$.

4. `(CUBES uniquement - admis pour les autres)`
Montrer que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire T dont on donnera la loi.

5. Simulation informatique.
On rappelle que l'appel `grand(1,1,'bin',1,p)` renvoie une réalisation d'une v.a.r. suivant une loi de Bernoulli de paramètre `p`. Compléter les quatre instructions manquantes pour que le programme suivant simule l'expérience aléatoire décrite ci-dessus et pour qu'il affiche, dans cet ordre, les valeurs prises par les variables aléatoires T_n, X_n et Y_n, à l'exécution de l'instruction `disp([t, x, y])`.

```
p = input('Entrez un reel p :')
n = input('Entrez un entier n :')
t = 0 ; x = 0 ; y = 0 ;
while (x == 0) & (t < n)
  ----------
  if lancer == 0 then
    ----------
    ----------
  else
    ----------
  end
end
disp([t, x, y])
```

Exercice 3

- Si k est un entier naturel non nul, alors pour tout endomorphisme f d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E :
  - × on note $f^k = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (où l'endomorphisme f apparaît k fois dans cette composition),
  - × on pose $f^0 = \mathrm{id}_E$, où id_E est l'endomorphisme identité de E.
- On dit que l'endomorphisme f est nilpotent d'indice k ($k \in \mathbb{N}^*$) si :
$$f^k = 0_{\mathscr{L}(E)} \qquad \text{et} \qquad f^{k-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$$
- Enfin, on note I_2 la matrice identité de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et on dit qu'une matrice A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est nilpotente d'indice k ($k \in \mathbb{N}^*$) si :
$$A^k = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \qquad \text{et} \qquad A^{k-1} \neq 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$$
(avec la convention $A^0 = I_2$).

Partie 1

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice non nulle de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Calculer $A^2 - (a+d)\, A$ en fonction de I_2.

2. On suppose dans cette question que A est nilpotente d'indice k.

a) Établir l'égalité : $ad - bc = 0$.

b) Montrer que k est supérieur ou égal à 2.

c) En déduire alors : $a + d = 0$.

3. Conclure : A nilpotente $\Leftrightarrow A^2 = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$.

Partie 2

Dans cette partie, f désigne un endomorphisme non nul d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 2.

4. ***a)*** Montrer que, si $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$, alors on a : $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

b) On suppose : $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Montrer : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
Établir alors : $\mathrm{rg}(f) = 1$ puis conclure : $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.

c) En déduire, à l'aide de la **Partie 1**, l'équivalence : f est nilpotent $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.

On suppose dans toute la suite que f est nilpotent d'indice 2 et on en étudie quelques propriétés.

5. ***a)*** L'endomorphisme f est-il bijectif ?

b) Déterminer les valeurs propres possibles de f. En déduire $\mathrm{Sp}(f)$.

c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

6. Montrer qu'il existe une base (e'_1, e'_2) de E telle que : $\mathrm{Mat}_{(e'_1, e'_2)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7. On souhaite montrer par l'absurde qu'il est impossible de trouver deux endomorphismes u et v de E, nilpotents et tels que $f = u \circ v$. On suppose donc que ces deux endomorphismes existent.

a) Montrer les inclusions : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

b) En déduire les égalités : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Ker}(f)$.

c) En déduire l'égalité : $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(v)$.

d) Conclure.

Problème

On dispose de deux pièces identiques donnant pile avec la probabilité p, élément de $]0,1[$, et face avec la probabilité $q = 1 - p$.

Partie 1 : un jeu naïf

Deux joueurs A et B s'affrontent lors de lancers de ces pièces de la façon suivante, les lancers de chaque pièce étant supposés indépendants :
Pour la première manche, A et B lancent chacun leur pièce simultanément jusqu'à ce qu'ils obtiennent pile, le gagnant du jeu étant celui qui a obtenu pile le premier. En cas d'égalité et en cas d'égalité seulement, les joueurs participent à une deuxième manche dans les mêmes conditions et avec la même règle, et ainsi de suite jusqu'à la victoire de l'un d'entre eux.
Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note X_k (resp. Y_k) la variable aléatoire égale au rang d'obtention du 1^{er} pile par A (resp. par B) lors de la $k^{\text{ème}}$ manche.
On note, toujours pour k dans $\mathbb{N}^*$, E_k l'événement « Il y a égalité à la fin de la $k^{\text{ème}}$ manche ».
On note E l'événement « Il y a perpétuellement égalité ».
On note G (resp. H) l'événement « A (resp. B) gagne à ce jeu », et pour tout entier naturel n non nul, on note G_n (resp. H_n) l'événement « A (resp.B) gagne le jeu à la $n^{\text{ème}}$ manche ».

1. Étude de la première manche.

a) Donner la loi commune à X_1 et Y_1. En déduire qu'il est quasi-impossible que la première manche dure éternellement. On admet alors qu'il en est de même pour chaque manche jouée.

b) Écrire l'événement E_1 à l'aide des variables X_1 et Y_1.

c) Montrer que $\mathbb{P}(E_1) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = i])\,\mathbb{P}([Y_1 = i])$ et en déduire l'expression explicite de $\mathbb{P}(E_1)$ en fonction de p et q.

d) Justifier sans aucun calcul que les événements G_1 et H_1 sont équiprobables. En déduire la probabilité de G_1 en fonction de p et q.

2. Calcul de la probabilité de l'événement G.

a) Écrire, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, l'événement G_n à l'aide des événements E_k et de l'événement $[X_n \leqslant Y_n]$.

b) Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, calculer $\mathbb{P}_{E_1 \cap \cdots \cap E_{k-1}}(E_k)$ puis en déduire :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \mathbb{P}(G_n) \ = \ \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \ \frac{q}{1+q}$$

c) Vérifier que le résultat précédent reste valable pour $n = 1$.

d) Exprimer G en fonction des G_n puis conclure, après calcul : $\mathbb{P}(G) = \dfrac{1}{2}$.

e) Expliquer comment obtenir la probabilité de l'événement H : « B gagne à ce jeu » et en déduire que le ce jeu a presque sûrement une fin, c'est à dire que $\mathbb{P}(E) = 0$.

Partie 2 : un autre jeu

En parallèle du jeu précédent, A parie sur le fait que la manche gagnée par le vainqueur le sera par un lancer d'écart et B parie le contraire.

3. ***a)*** À l'aide du système complet d'événements $([X_1 = i])_{i \in \mathbb{N}^*}$, démontrer : $\mathbb{P}\left([Y_1 = X_1 + 1]\right) = \dfrac{pq}{1+q}$.

b) En déduire la probabilité u que l'un des deux joueurs gagne à la première manche par un lancer d'écart.

4. ***a)*** Utiliser les événements E_k pour écrire l'événement K_n « l'un des deux joueurs gagne à la $n^{\text{ème}}$ manche par un lancer d'écart », ceci pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de $\mathbb{P}(K_n)$.

5. Donner finalement la probabilité de l'événement K : « A gagne ce pari ».

Partie 3 : informatique

On rappelle que la commande `grand(1, 1, 'geom', p)` permet à **Scilab** de simuler une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.

6. Compléter le script **Scilab** suivant pour qu'il simule l'expérience décrite dans la partie 1 et affiche le nom du vainqueur du premier jeu ainsi que le numéro de la manche à laquelle il a gagné.

```
p = input('entrez une valeur pour p : ')
c = 1
X = grand(1, 1, 'geom', p)
Y = grand(1, 1, 'geom', p)
while X == Y
    X = ----
    Y = ----
    c = ----
end
if X < Y then ----
         else ----
end
disp(c)
```

7. Compléter la commande suivante afin qu'une fois ajoutée au script précédent elle permette de simuler le deuxième jeu et d'en donner le nom du vainqueur.

```
if ----- then disp('A gagne le deuxième jeu') else ----- end
```