DS4 (version B) /196

Exercice 1 /37

Le but de cet exercice est la résolution de l'équation matricielle $AM = MB$, d'inconnue M, dans l'espace vectoriel E des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.
On rappelle que si U_1, U_2, U_3, U_4 sont les matrices définies par :

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad U_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la famille (U_1, U_2, U_3, U_4) est une base de E, qui est donc de dimension 4. Si A et B sont deux matrices de E, l'ensemble des matrices M de E vérifiant $AM = MB$ est noté $V_{A,B}$.

1. Soit A et B deux matrices de E et $\varphi_{A,B}$ l'application qui, à toute matrice M de E, associe la matrice $AM - MB$.

a) Montrer que $\varphi_{A,B}$ est un endomorphisme de E et en déduire que $V_{A,B}$ est un sous-espace vectoriel de E.

- 1 pt : caractère endo

- 2 pts : $\varphi_{A,B}$ **linéaire**

- 2 pts : $V_{A,B} = \mathrm{Ker}(\varphi_{A,B})$
On donne 2 pts aussi pour la démonstration $V_{A,B}$ **est un sev de** E **(1 pt pour partie non vide, 1 pt pour stabilité par CL)**

b) Dans le cas particulier où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, construire la matrice carrée d'ordre 4 qui représente $\varphi_{A,B}$ dans la base (U_1, U_2, U_3, U_4).
Montrer que cette matrice est inversible et en déduire l'ensemble $V_{A,B}$.

- 1 pt : $\mathrm{Mat}_{(U_1,U_2,U_3,U_4)}\Big(\varphi_{A,B}(U_1)\Big) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- 1 pt $\mathrm{Mat}_{(U_1,U_2,U_3,U_4)}\Big(\varphi_{A,B}(U_2)\Big) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $\mathrm{Mat}_{(U_1,U_2,U_3,U_4)}\Big(\varphi_{A,B}(U_3)\Big) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $\mathrm{Mat}_{U_1,U_2,U_3,U_4}\Big(\varphi_{A,B}(U_4)\Big) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

- 2 pts : $\mathrm{rg}(C) = 4$

- 1 pt : C **inversible**

- 1 pt : $\varphi_{A,B}$ **isomorphisme, donc injective**

- 1 pt : $V_{A,B} = \mathrm{Ker}(\varphi_{A,B}) = \{0\}$

2. Dans cette question, r et s désignent deux réels distincts et différents de 1, et on pose :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

a) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de E.
Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur x, y, z, t pour que M appartienne à $V_{D,\Delta}$.

- 1 pt : écriture système $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x \\ y & = & sy \\ rz & = & z \\ rt & = & st \end{array} \right.$

- 2 pts : résolution $y = z = t = 0$ **(dont 1 pt pour** $r \neq 1$ **et** $s \neq 1$ **et** $r \neq s$**)**

b) En déduire une base de $V_{D,\Delta}$.

- 2 pts : $V_{D,\Delta} = \text{Vect}\,(U_1)$ **avec** $U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ **(0 si confusion d'objets)**

- 1 pt : la famille (U_1) **est génératrice de** $V_{D,\Delta}$

- 1 pt : la famille (U_1) **est libre car constituée uniquement d'un vecteur non libre**

3. Soit a, b, c, d des réels non nuls vérifiant $a - b \neq c - d$, $a - b \neq 1$, $c - d \neq 1$, A et B les matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} c & 1-c \\ d & 1-d \end{pmatrix}$$

a) `(CUBES uniquement - admis pour les autres)`
Montrer que les valeurs propres de A sont 1 et $a - b$.
En déduire qu'il existe une matrice inversible P de E, et une matrice D égale à celle de la question 2 pour une valeur convenable de r, telles que l'on ait : $D = P^{-1}AP$.

- 1 pt : $\det(A - I_2) = 0$

- 1 pt : $\det(A - (a-b)I_2) = 0$

- 1 pt : A **admet** 2 **VP distinctes, donc elle est diagonalisable**

- 1 pt : il existe P **inversible telle que :** $A = PDP^{-1}$ **où** $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$

b) `(CUBES uniquement - admis pour les autres)` Justifier de même l'existence d'une matrice inversible Q de E, et d'une matrice Δ égale à celle de la question 2 pour une valeur convenable de s, telles que l'on ait : $\Delta = Q^{-1}BQ$.

- 2 pts

c) Pour toute matrice M de E, démontrer :

$$M \in V_{A,B} \quad \Leftrightarrow \quad P^{-1}MQ \in V_{D,\Delta}$$

En déduire une base de $V_{A,B}$.

- 1 pt : $AM = MB \Leftrightarrow PDP^{-1}M = MQ\Delta Q^{-1} \Leftrightarrow \cancel{P^{-1}(P}DP^{-1}M)Q \;=\; P^{-1}(MQ\Delta \cancel{Q^{-1})Q}$

- 1 pt : $\ldots \Leftrightarrow D(P^{-1}MQ) - (P^{-1}MQ)\Delta = 0 \Leftrightarrow P^{-1}MQ \in V_{D,\Delta}$

- 1 pt : $\ldots \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R},\ P^{-1}MQ \;=\; \alpha \cdot U_1$

- 1 pt : $\ldots \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R},\ M \;=\; \alpha \cdot PU_1Q^{-1} \Leftrightarrow M \in \text{Vect}\left(PU_1Q^{-1}\right)$

- 1 pt : la famille (PU_1Q^{-1}) **génératrice de** $V_{A,B}$

- 1 pt : la famille (PU_1Q^{-1}) **est libre car** $PU_1Q^{-1} \neq 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$

4. Dans cette question r, s et u, v désignent quatre réels vérifiant $r \neq s$, $r \neq v$, $u \neq s$, $u \neq v$, et on pose :

$$D = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

Par une méthode analogue à celle de la question 2, déterminer $V_{D,\Delta}$.

- 1 pt : écriture système $\left\{ \begin{array}{lcl} ux & = & vx \\ uy & = & sy \\ rz & = & vz \\ rt & = & st \end{array} \right.$

- 2 pts : résolution système $x = y = z = t = 0$ **car** $r \neq s$**,** $r \neq v$**,** $u \neq s$ **et** $u \neq v$

- 1 pt : $V_{D,\Delta} = \{0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\}$ **(0 si confusion d'objets)**

Exercice 2 /100

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et $\mathscr{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de E.
On note, pour tout polynôme P de E :

$$\varphi(P) = \frac{1}{n} X(1-X)P' + XP$$

Partie I : Étude d'un endomorphisme de polynômes /22

1. ***a)*** Montrer que φ est une application linéaire.

- 2 pts (dont 1 pt pour la linéarité de la dérivation)

b) Calculer $\varphi\left(X^n\right)$.

- 1 pt : $\varphi(X^n) = X^n$

c) Montrer que φ est un endomorphisme de E.

- 1 pt : φ **linéaire d'après** ***1.***

- 1 pt : $\varphi(X^k) = \dfrac{1}{n}\ X^k - \dfrac{n+1}{n}\ X^{k+1}$

- 1 pt : $\deg(\varphi(X^k)) \leqslant k+1$ **pour** $k \in [\![0, n-1]\!]$

- 1 pt : $\deg(\varphi(X^n)) = n$ **d'après question précédente**

- 1 pt : conclure par linéarité de φ

2. On pose, pour tout k de $[\![0, n]\!]$: $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.

a) Pour tout k de $[\![0, n]\!]$, calculer $\varphi(P_k)$.

- 1 pt : $P_k'(X) = X^{k-1}(1-X)^{n-k-1}(k - nX)$

- 1 pt : $\big(\varphi(P_k)\big)(X) = \dfrac{k}{n}\ X^k(1-X)^{n-k}$

- 1 pt : $\varphi(P_k) = \dfrac{k}{n}\ P_k$

b) Montrer que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de E et expliciter la matrice de φ dans cette base.

- **1 pt : évaluation de** $\lambda_0(1-X)^n + \lambda_1\, X(1-X)^{n-1} + \dots + \lambda_n X^n \ = \ 0_E$ **en** 0
- **1 pt : évaluation de** $\lambda_0(1-X)^n + \lambda_1\, X(1-X)^{n-1} + \dots + \lambda_n X^n \ = \ 0_E$ **en** 1
- **1 pt : en déduire** $\lambda_1\,(1-X)^{n-2} + \dots + \lambda_{n-1}\, X^{n-2} \ = \ 0_E$
- **1 pt : en réitérant le processus d'évalulation en** 0 **et en** 1**, et de mise en facteur de** $X(1-X)$**, on obtient :** $\lambda_0 \ = \ \lambda_1 \ = \ \cdots \ = \ \lambda_n \ = \ 0$
- **2 pts :** $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\varphi) \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 0 & \frac{n-1}{n} & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) `(CUBES uniquement - admis pour les autres)` Déterminer les sous-espaces propres de φ.

- **1 pt :** $E_{\frac{k}{n}} \supset \mathrm{Vect}\,(P_k)$
- **1 pt :** $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\varphi)$ **diagonale donc diagonalisable**
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{n} \dim\left(E_{\frac{k}{n}}(\varphi)\right) \ = \ \dim\left(\mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})\right) \ = \ n+1$
- **1 pt :** $\forall k \in [\![0,n]\!]$**,** $\dim\left(E_{\frac{k}{n}}(\varphi)\right) = 1$
- **1 pt :** $\forall k \in [\![0,n]\!]$**,** $E_{\frac{k}{n}}(\varphi) = \mathrm{Vect}\,(P_k)$

Partie II : Étude d'une suite de variables aléatoires /78

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, indiscernables au toucher. On effectue dans cette urne une suite de tirages avec remise, et on suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
On note alors, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, Y_k la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de numéros distincts qui ont été tirés lors des k premiers tirages.
Par convention, on pose : $Y_0 = 0$.

3. On note, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, Z_k la variable aléatoire prenant la valeur 1 si le $k^{\text{ème}}$ tirage amène un numéro qui n'a pas été tiré lors des tirages précédents, et prenant la valeur 0 sinon.
On pourra remarquer que, en particulier, $Z_1 = 1$.

a) Déterminer la loi de Z_2.

- **1 pt :** $Z_2(\Omega) \ = \ \{0,1\}$
- **3 pts :** $\mathbb{P}([Z_2 = 0]) = \dfrac{1}{n}$ **(peu importe la méthode : dénombrement ou introduction de v.a.r.)**
- **1 pt :** $Z_2 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer, pour tout j de $[\![1,k]\!]$, la valeur de $\mathbb{P}_{[Y_k=j]}\big([Z_{k+1}=1]\big)$.
En déduire : $\mathbb{P}\big([Z_{k+1}=1]\big) = 1 - \dfrac{1}{n}\ \mathbb{E}(Y_k)$.

- 2 pts : si $k < n$, $\forall j \in [\![1,k]\!]$, $\mathbb{P}_{[Y_k=j]}([Z_{k+1}=1]) \ = \ 1 - \dfrac{j}{n}$

- 1 pt : si $k \geqslant n$, si $j \leqslant n$, $\mathbb{P}_{[Y_k=j]}([Z_{k+1}=1]) \ = \ 1 - \dfrac{j}{n}$

- 1 pt : si $k \geqslant n$, si $j > n$, $\mathbb{P}_{[Y_k=j]}([Z_{k+1}=1])$ n'est pas définie

- 2 pts : $Y_k(\Omega) = \left\{ \begin{array}{ll} [\![1,k]\!] & \textbf{si } k < n \\ [\![1,n]\!] & \textbf{si } k \geqslant n \end{array} \right. = [\![1,\min(k,n)]\!]$

- 5 pts : cas $k < n$ (1 pt pour $([Y_k=j])_{j\in[\![1,k]\!]}$ SCE, 1 pt pour FPT, 1 pt pour $\forall j \in [\![1,k]\!]$, $\mathbb{P}([Y_k=j]) \neq 0$, 1 pt pour $\sum\limits_{j=1}^{k} \mathbb{P}([Y_k=j]) = 1$, 1 pt pour $\sum\limits_{j=1}^{k} j\,\mathbb{P}([Y_k=j]) = \mathbb{E}(Y_k)$)

- 3 pts : cas $k \geqslant n$ (1 pt pour $([Y_k=j])_{j\in[\![1,n]\!]}$ SCE, 2 pts pour reste)

c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que $Y_k = \sum\limits_{j=1}^{k} Z_j$, montrer :

$$\mathbb{P}\big([Z_{k+1}=1]\big) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}\big([Z_j=1]\big)$$

- 1 pt : $1 - \dfrac{1}{n}\ \mathbb{E}\left(\sum\limits_{j=1}^{k} Z_j\right) = 1 - \dfrac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{k} \mathbb{E}(Z_j)$ par linéarité de l'espérance

- 1 pt : $\mathbb{E}(Z_j) = \mathbb{P}([Z_j=1])$

d) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}\big([Z_k=1]\big) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{k-1}$.

- 1 pt : initialisation

- 4 pts : hérédité (récurrence forte)

e) Déterminer alors, pour tout k de $\mathbb{N}$, l'espérance de Y_k.

- 1 pt : $-n\big(\mathbb{P}([Z_{k+1}=1]) - 1\big) \ = \ \mathbb{E}(Y_k)$ d'après *3.b)*

- 1 pt : $\mathbb{E}(Y_k) \ = \ -n\left(\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^k - 1\right) \ = \ n\left(1 - \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^k\right)$ d'après question précédente

- 1 pt : $\mathbb{E}(Y_0) = 0$

4. On note, pour tout k de $\mathbb{N}$, G_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$G_k = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}\big([Y_k=i]\big)\ X^i$$

a) Déterminer les polynômes G_0, G_1 et G_2.

- 1 pt : $G_0(X) \ = \ \sum\limits_{i=0}^{n} \mathbb{P}([Y_0=i])\ X^i$

- 1 pt : $\mathbb{P}([Y_0=0]) = 1$ et $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([Y_0=i]) = 0$ car $Y_0 = 0$

- 1 pt : $G_0(X) = 1$

- 1 pt : Y_1 est la v.a.r. constante égale à 1

- **2 pts :** $G_1(X) = X$
- **1 pt :** $Y_2(\Omega) \ = \ \{1,2\}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Y_2 = 1]) = \dfrac{1}{n}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Y_2 = 2]) = 1 - \dfrac{1}{n}$
- **1 pt :** $G_2(X) = \dfrac{1}{n}\ X + \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) X^2$

b) Montrer, pour tout k de $\mathbb{N}$ et tout i de $[\![0,n]\!]$:

$$\mathbb{P}([Y_{k+1} = i]) = \frac{i}{n}\ \mathbb{P}\big(\,[Y_k = i]\,\big) + \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)\ \mathbb{P}\big([Y_k = i-1]\big)$$

- **1 pt :** $([Y_k = j])_{j \in [\![1,n]\!]}$ **SCE + FPT**
- **1 pt : si** $j \neq i$ **et** $j \neq i-1$**,** $[Y_k = j] \cap [Y_{k+1} = i] \ = \ \varnothing$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Y_k = i-1] \cap [Y_{k+1} = i]) = \mathbb{P}([Y_k = i-1]) \left(1 - \dfrac{i-1}{n}\right)$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Y_k = i] \cap [Y_{k+1} = i]) = \mathbb{P}([Y_k = i])\ \dfrac{i}{n}$
- **3 pts : formule toujours vraie pour** $k \in \mathbb{N}^*$ **et** $i = 1$
- **1 pt : formule toujours vraie pour** $k \in \mathbb{N}^*$ **et** $i = 0$
- **2 pts : formule toujours vraie pour** $k = 0$

c) Montrer, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$G_{k+1} = \frac{1}{n}\ X(1-X)G_k' + XG_k$$

- **1 pt :** $G_k'(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} i\,\mathbb{P}([Y_k = i])\, X^{i-1}$
- **1 pt :** $G_{k+1}(X) \ = \ \sum\limits_{i=0}^{n} \left(1 - \dfrac{i-1}{n}\right)\ \mathbb{P}([Y_k = i-1])\ X^i + \sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{i}{n}\ \mathbb{P}([Y_k = i])\ X^i$ **(question précédente)**
- **1 pt :** $\sum\limits_{i=0}^{n} \left(1 - \dfrac{i-1}{n}\right)\ \mathbb{P}([Y_k = i-1])\ X^i \ = \ \sum\limits_{i=1}^{n} \left(1 - \dfrac{i-1}{n}\right)\ \mathbb{P}([Y_k = i-1])\ X^i$ **(car** $[Y_k = -1] = \varnothing$**)**
- **1 pt :** $= \sum\limits_{i=0}^{n-1} \left(1 - \dfrac{i}{n}\right)\ \mathbb{P}([Y_k = i])\ X^{i+1}$ **(par décalage d'indice)**
- **1 pt :** $= X\ \sum\limits_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}([Y_k = i])\ X^i - \dfrac{1}{n}\ \sum\limits_{i=1}^{n-1} i\ \mathbb{P}([Y_k = i])\ X^{i+1}$ **(car** $0\ \mathbb{P}([Y_k = 0])\, X^1 = 0$**)**
- **2 pts :** $= X\ G_k(X) - \dfrac{1}{n}\ X^2\ G_k'(X)$
- **2 pts :** $\sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{i}{n}\ \mathbb{P}([Y_k = i])\ X^i = \dfrac{1}{n}\ X\ G_k'(X)$
- **1 pt : conclusion** $G_{k+1}(X) = \dfrac{1}{n}\ X(1-X)G_k'(X) + XG_k(X)$

d) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:
$$G_k = \varphi^k(G_0)$$

- 1 pt : initialisation

- 3 pts : hérédité (1 pt pour $G_{k+1}(X) = \frac{1}{n}\ X(1-X)\ G_k'(X) + X\ G_k(X)$ (qst précédente), 1 pt pour $\frac{1}{n}\ X(1-X)\ G_k'(X) + X\ G_k(X) = \big(\varphi(G_k)\big)(X)$, 1 pt pour reste)

5. a) Pour tout k de $\mathbb{N}$, calculer $G_k(1)$ et $G_k'(1)$.

- 1 pt : $G_k(1) = 1$ car $([Y_k = i])_{i \in [\![0,n]\!]}$ SCE

- 1 pt : $G_k'(1) = \mathbb{E}(Y_k)$

b) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{E}(Y_{k+1}) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\ \mathbb{E}(Y_k) + 1$$

- 1 pt : $\mathbb{E}(Y_{k+1}) = G_{k+1}'(1)$ (qst précédente)

- 1 pt : $G_{k+1}(X) \ = \ \frac{1}{n}\ X(1-X)\ G_k'(X) + X\ G_k(X)$

- 1 pt : $G_{k+1}'(X) = \frac{1}{n}\ (1-2X)G_k'(X) + \frac{1}{n}\ (1-X)G_k''(X) + G_k(X) + X\ G_k'(X)$

- 2 pts : $\mathbb{E}(Y_{k+1}) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\mathbb{E}(Y_k) + 1$ (d'après *5.a)*)

c) Retrouver alors, pour tout k de $\mathbb{N}$, l'expression de $\mathbb{E}(Y_k)$ obtenue en question ***3.e)***.

- 1 pt : (u_n) arithmético-géométrique

- 1 pt : solution de l'équation de point fixe $\lambda = n$

- 1 pt : $(u_n - \lambda)$ géométrique de raison $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

- 1 pt : $v_k \ = \ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \times (u_0 - \lambda)$

- 1 pt : $u_0 \ = \ \mathbb{E}(Y_0) \ = \ 0$

- 1 pt : $\mathbb{E}(Y_k) = -n\ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k + n = n\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right)$

6. On rappelle que les polynômes $P_0, \ldots, P_n$ sont définis à la question ***2.*** par :

$$\text{pour tout } j \text{ de } [\![0,n]\!],\ \ P_j = X^j(1-X)^{n-j}$$

a) Calculer $\sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{j} P_j$.

- 2 pts : $\sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{j} P_j(X) = 1$

b) Montrer, pour tout j de $[\![0,n]\!]$:

$$P_j = \sum_{i=j}^{n} \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} X^i$$

- 2 pts : $\sum_{i=j}^{n} \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} X^i = P_j(X)$ **(1 pt pour changement d'indice $k = i-j$, 1 pt pour binôme de Newton)**

c) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$\varphi^k(G_0) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} \right) X^i$$

- 1 pt : $G_0(X) = 1 = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} P_j(X)$ **(qst *6.a)*)**

- 1 pt : $\varphi^k(G_0) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \varphi^k(P_j)$ **(φ linéaire)**

- 1 pt : $\varphi(P_j) = \frac{j}{n} P_j$

- 1 pt : $\varphi^k(P_j) = \left(\frac{j}{n}\right)^k P_j$ **(récurrence immédiate)**

- 1 pt : $\left(\varphi^k(G_0)\right)(X) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k \left(\sum_{i=j}^{n} \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} X^i \right)$ **(qst précédente)**

- 1 pt : $\left(\varphi^k(G_0)\right)(X) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} \right) X^i$

d) Montrer finalement, pour tout k de $\mathbb{N}$ et pour tout i de $[\![0,n]\!]$:

$$\mathbb{P}([Y_k = i]) = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k$$

- 2 pts : $\sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}([Y_k = i])\ X^i = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} \right) X^i$ **(qst précédente et *4.d)*)**

- 1 pt : décomposition du polynôme G_k sur la base $(1, X, \dots, X^n)$ est unique donc $\mathbb{P}([Y_k = i]) = \sum_{j=0}^{i} \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j}$

- 2 pts : $\binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} = \binom{n}{i} \binom{i}{j}$

- 1 pt : conclusion $\mathbb{P}([Y_k = i]) = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k$

Exercice 3 /59

Soient a et b deux entiers naturels non nuls et s leur somme.
Une urne contient initialement a boules noires et b boules blanches indiscernables au toucher.
On effectue dans cette urne une suite infinie de tirages au hasard d'une boule selon le protocole suivant :

- si la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne,
- si la boule tirée est noire, elle est remplacée dans l'urne par une boule blanche prise dans une réserve annexe.

Avant chaque tirage, l'urne contient donc toujours s boules.

On désigne par $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé qui modélise cette expérience et, pour tout entier naturel n non nul, on note :

- B_n l'événement « la $n^{\text{ème}}$ boule tirée est blanche » ;
- X_n la variable aléatoire désignant le nombre de boules blanches tirées au cours des n premiers tirages ;
- u_n l'espérance de la variable aléatoire X_n, c'est-à-dire $u_n = \mathbb{E}(X_n)$.

1. **Étude d'un ensemble de suites**

Soit A l'ensemble des suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de réels qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s\, x_{n+1} = (s-1)\, x_n + b + n$$

a) Soit α et β deux réels et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \alpha\, n + \beta$.
Déterminer en fonction de b et de s les valeurs de α et β pour que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ appartienne à A.

- 2 pts : $s\, v_{n+1} = (s-1)v_n + b + n \;\Leftrightarrow\; (s+n)\,\alpha + \beta = n + b$

- 1 pt : $\alpha = 1$ **et** $\beta = b - s$

- 2 pts : synthèse

b) Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite appartenant à A, $(v_n)_{n\geqslant 1}$ la suite déterminée à la question précédente et $(y_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = x_n - v_n$.
Montrer que la suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique et expliciter, pour tout entier naturel n non nul, y_n puis x_n en fonction de x_1, b, s et n.

- 1 pt : (y_n) **est donc géométrique de raison** $\dfrac{s-1}{s}$

- 1 pt : $\forall n \in \mathbb{N}^*$**,** $y_n = \left(\dfrac{s-1}{s}\right)^{n-1} (x_1 - 1 - b + s)$

- 1 pt : $\forall n \in \mathbb{N}^*$**,** $x_n = \left(\dfrac{s-1}{s}\right)^{n-1} (x_1 - 1 - b + s) + n + b - s$

2. **Expression de la probabilité $\mathbb{P}(B_{n+1})$ à l'aide de u_n**

a) Donner, en fonction de b et de s, les valeurs respectives de $\mathbb{P}(B_1)$ et du nombre u_1.

- 1 pt : $\mathbb{P}(B_1) = \dfrac{b}{s}$

- 2 pts : $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{b}{s}\right)$

- 1 pt : $u_1 = \dfrac{b}{s}$

b) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(B_2)$ et vérifier l'égalité : $\mathbb{P}(B_2) = \dfrac{b+1-u_1}{s}$.

- 1 pt : $(B_1, \overline{B_1})$ **SCE**

- 1 pt : FPT $\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) + \mathbb{P}\left(\overline{B_1} \cap B_2\right)$

- 1 pt : $\mathbb{P}(B_1) \neq 0$ **et** $\mathbb{P}\left(\overline{B_1}\right) \neq 0$

- 1 pt : $\mathbb{P}_{B_1}(B_2) \ = \ \dfrac{b}{s}$

- 1 pt : $\mathbb{P}_{\overline{B_1}}(B_2) \ = \ \dfrac{b+1}{s}$

- 1 pt : $\mathbb{P}(B_2) = \dfrac{b+1-u_1}{s}$

c) Soit n un entier naturel vérifiant $1 \leqslant n \leqslant a$.

Montrer : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}_{[X_n = k]}\left(B_{n+1}\right) = \dfrac{b+n-k}{s}$.

En déduire l'égalité : $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-u_n}{s}$.

- 2 pts : $\forall k \in [\![0, n]\!]$**,** $\mathbb{P}_{[X_n = k]}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-k}{s}$ **(dont 1 pt pour l'utilisation de** $n \leqslant a$**)**

- 1 pt : $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$

- 1 pt : $([X_n = k])_{k \in [\![0,n]\!]}$ **SCE + FPT**

- 1 pt : $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n = k]) = 1$

- 1 pt : $\sum\limits_{k=0}^{n} k\, \mathbb{P}([X_n = k]) = \mathbb{E}(X_n) = u_n$

- 1 pt : $\mathbb{P}(B_{n+1}) \ = \ \dfrac{b+n-u_n}{s}$

d) Soit n un entier naturel vérifiant $n > a$.
Si $k \in [\![0, n-a-1]\!]$, quel est l'événement $[X_n = k]$?

Si $k \in [\![n-a, n]\!]$, justifier l'égalité : $\mathbb{P}_{[X_n = k]}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-k}{s}$.

Montrer enfin que l'égalité : $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-u_n}{s}$ est encore vérifiée.

- 1 pt : $\forall k \in [\![0, n-a-1]\!]$**,** $[X_n = k] = \varnothing$ **(0 si non justifié)**

- 1 pt : $\forall k \in [\![n-a, n]\!]$**,** $\mathbb{P}_{[X_n = k]}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-k}{s}$ **(0 si non justifié)**

- 1 pt : $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \sum\limits_{k=n-a}^{n} \mathbb{P}([X_n = k] \cap B_{n+1})$ **(car** $\forall k \in [\![0, n-a-1]\!]$**,** $[X_n = k] = \varnothing$**)**

- 1 pt : $\forall k \in [\![n-a, n]\!]$**,** $\mathbb{P}([X_n = k]) \neq 0$

- 1 pt : $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \sum\limits_{k=n-a}^{n} \mathbb{P}([X_n = k]) \ \dfrac{b+n-k}{s}$

- 1 pt : $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n}{s} \ \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n = k]) - \dfrac{1}{s} \ \sum\limits_{k=0}^{n} k\, \mathbb{P}([X_n = k])$ **(car :** $\forall k \in [\![0, n-a-1]\!]$**,** $\mathbb{P}([X_n = k]) = 0$**)**

- 1 pt : $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-u_n}{s}$

3. **Calcul des nombres u_n et $\mathbb{P}(B_n)$**

a) Soit n un entier naturel non nul. établir, pour tout entier $k \in [\![n+1-a, n]\!]$ l'égalité :

$$\mathbb{P}\big([X_{n+1} = k]\big) = \frac{a-n+k}{s}\, \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) + \frac{b+n-k+1}{s}\, \mathbb{P}\big([X_n = k-1]\big)$$

Vérifier cette égalité pour $k = n+1$, $k = n-a$ et pour tout $k \in [\![1, n-a-1]\!]$.

- **6 pts : cas $k \in [\![n+1-a, n]\!]$ (1 pt pour $([X_n = i])_{i \in [\![0,n]\!]}$ SCE + FPT, 1 pt pour pour tout $i \in [\![0, k-2]\!]$, $[X_n = i] \cap [X_{n+1} = k] = \varnothing$, 1 pt pour $[X_n = k-1] \cap [X_{n+1} = k] = [X_n = k-1] \cap B_{n+1}$, 1 pt pour $[X_n = k] \cap [X_{n+1} = k] = [X_n = k] \cap \overline{B_{n+1}}$, 1 pt pout *2.b)*, 1 pt pour fin calcul)**
- **2 pts : cas $k = n+1$ (dont 1 pt pour $[X_{n+1} = n+1] = [X_n = n] \cap B_{n+1}$**
- **3 pts : cas $k = n-a$ (dont 1 pt pour $[X_{n+1} = n-a] = [X_n = n-a] \cap \overline{B_{n+1}}$)**
- **1 pt : cas $k = n-a$**

b) Calculer, pour tout entier naturel n non nul, u_{n+1} en fonction de u_n et de n.
En déduire que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ appartient à l'ensemble A étudié dans la question 1.

- **1 pt : $k\, \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = \dfrac{b+n+1}{s}\, k\, \mathbb{P}([X_n = k-1]) - \dfrac{1}{s}\, k^2\, \mathbb{P}([X_n = k-1])$**
- **1 pt : sommation pour k variant de 1 à $n+1$**
- **1 pt : décalage d'indice**
- **1 pt : $[X_n = n+1] = \varnothing$**
- **1 pt : $\sum\limits_{k=0}^{n} k\, \mathbb{P}([X_n = k]) = \mathbb{E}(X_n) = u_n$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n = k]) = 1$**
- **2 pts : reste du calcul pour $u_{n+1} = \dfrac{s-1}{s}\, u_n + \dfrac{b+n}{s}$**
- **1 pt : $s\, u_{n+1} = (s-1) u_n + b + n$ donc $(u_n) \in A$**

c) Donner, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, les valeurs de u_n et de $\mathbb{P}(B_{n+1})$ en fonction de b, s et n.

- **1 pt : $u_n = \left(\dfrac{s-1}{s}\right)^{n-1} (u_1 - 1 - b + s) + n + b - s$ (qst *1.b)*)**
- **1 pt : $u_n = \left(\dfrac{s-1}{s}\right)^{n-1} \left(\dfrac{b}{s} - 1 - b + s\right) + n + b - s$ (qst *2.a)*)**
- **2 pts : $\mathbb{P}(B_{n+1}) = 1 - \dfrac{1}{s} \left(\dfrac{s-1}{s}\right)^{n-1} \left(\dfrac{b}{s} - 1 - b + s\right)$ (qst *2.c)*, *2.d)* et précédente)**

d) Quelles sont les limites des suites $(u_n)_{n \geqslant 1}$ et $\big(\mathbb{P}(B_n)\big)_{n \geqslant 1}$?

- **1 pt : $\left(\left(\dfrac{s-1}{s}\right)^{n-1}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{s-1}{s}$ avec $\left|\dfrac{s-1}{s}\right| < 1$**
- **1 pt : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$**
- **1 pt : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(B_{n+1}) = 1$**