# DS4 (version A)

## Exercice I (HEC 2002)

Le but de cet exercice est la résolution de l'équation matricielle $AM = MB$, d'inconnue $M$, dans l'espace vectoriel $E$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.
On rappelle que si $U_1$, $U_2$, $U_3$, $U_4$ sont les matrices définies par :

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad U_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la famille $(U_1, U_2, U_3, U_4)$ est une base de $E$, qui est donc de dimension 4. Si $A$ et $B$ sont deux matrices de $E$, l'ensemble des matrices $M$ de $E$ vérifiant $AM = MB$ est noté $V_{A,B}$.

***1.*** Soient $A$ et $B$ deux matrices de $E$ et $\varphi_{A,B}$ l'application qui, à toute matrice $M$ de $E$, associe la matrice $AM - MB$.

***a)*** Montrer que $\varphi_{A,B}$ est un endomorphisme de $E$ et en déduire que $V_{A,B}$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

*Démonstration.*
D'après l'énoncé, $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $\varphi_{A,B} : M \mapsto AM - MB$.

- Démontrons tout d'abord que $\varphi_{A,B}$ est à valeurs dans $E$.
  Soit $M \in E$. Alors $\varphi_{A,B}(M) = AM - MB \in E$.
- Démontrons maintenant que $f$ est une application linéaire.
  Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(M, N) \in E^2$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} \varphi_{A,B}(\lambda \cdot M + \mu \cdot N) & = & A(\lambda \cdot M + \mu \cdot N) - (\lambda \cdot M + \mu \cdot N)B \\ & = & \lambda \cdot AM + \mu \cdot AN - \lambda \cdot MB - \mu \cdot NB \\ & = & \lambda \cdot (AM - MB) + \mu \cdot (AN - NB) \\ & = & \lambda \cdot \varphi_{A,B}(M) + \mu \cdot \varphi_{A,B}(N) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \varphi \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

- Enfin :

$$\begin{array}{rcl} V_{A,B} & = & \{M \in E \mid AM - MB = 0\} \\ & = & \{M \in E \mid \varphi_{A,B}(M) = 0\} \\ & = & \mathrm{Ker}(\varphi_{A,B}) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } V_{A,B} \text{ est un espace vectoriel car c'est le noyau d'un endomorphisme.}}$$

□

***b)*** Dans le cas particulier où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, construire la matrice carrée d'ordre 4 qui représente $\varphi_{A,B}$ dans la base $(U_1, U_2, U_3, U_4)$.
Montrer que cette matrice est inversible et en déduire l'ensemble $V_{A,B}$.

*Démonstration.*

- $$\begin{aligned} \varphi_{A,B}(U_1) &= AU_1 - U_1B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot U_1 + 0 \cdot U_2 - 1 \cdot U_3 + 0 \cdot U_4 \end{aligned}$$

  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{(U_1,U_2,U_3,U_4)}\Big(\varphi_{A,B}(U_1)\Big) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $$\begin{aligned} \varphi_{A,B}(U_2) &= AU_2 - U_2B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= -2 \cdot U_1 + 0 \cdot U_2 + 0 \cdot U_3 - 1 \cdot U_4 \end{aligned}$$

  Donc $\mathrm{Mat}_{(U_1,U_2,U_3,U_4)}\Big(\varphi_{A,B}(U_2)\Big) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- $$\begin{aligned} \varphi_{A,B}(U_3) &= AU_3 - U_3B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -1 \cdot U_1 + 0 \cdot U_2 + 2 \cdot U_3 + 0 \cdot U_4 \end{aligned}$$

  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{(U_1,U_2,U_3,U_4)}\Big(\varphi_{A,B}(U_3)\Big) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $$\begin{aligned} \varphi_{A,B}(U_4) &= AU_4 - U_4B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 0 \cdot U_1 - 1 \cdot U_2 - 2 \cdot U_3 + 0 \cdot U_4 \end{aligned}$$

  Donc $\mathrm{Mat}_{U_1,U_2,U_3,U_4}\Big(\varphi_{A,B}(U_4)\Big) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \mathrm{Mat}_{(U_1,U_2,U_3,U_4)}(\varphi_{A,B}) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

- Notons $C$ cette matrice et déterminons son rang.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(C) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_3 \leftarrow L_3 + 2\,L_1}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_2 \leftrightarrow L_4}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = 4
\end{aligned}$$

- En effet, la réduite obtenue est **triangulaire** supérieure et à cœfficients diagonaux non nuls. Elle est donc inversible et de rang 4.

$$\boxed{\text{La matrice } C \text{ est elle-même d'ordre 4 et de rang 4. Elle est donc inversible.}}$$

- On en déduit que l'endomorphisme $\varphi_{A,B}$ est un isomorphisme. En particulier $\varphi_{A,B}$ est injective. Or : $V_{A,B} = \mathrm{Ker}(\varphi_{A,B})$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } V_{A,B} = \{0_E\}.}$$

□

***2.*** Dans cette question, $r$ et $s$ désignent deux réels distincts et différents de 1, et on pose :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

***a)*** Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de $E$. Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur $x$, $y$, $z$, $t$ pour que $M$ appartienne à $V_{D,\Delta}$.

*Démonstration.*

$$\begin{array}{rcl} M \in V_{D,\Delta} & \Leftrightarrow & DM - M\Delta = 0 \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} x & y \\ rz & rt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & sy \\ z & st \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x \\ y & = & sy \\ rz & = & z \\ rt & = & st \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} (1-s)\, y & = & 0 \\ (r-1)\, z & = & 0 \\ (r-s)\, t & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{lcl} s = 1 & \texttt{OU} & y = 0 \\ r = 1 & \texttt{OU} & z = 0 \\ r = s & \texttt{OU} & t = 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{array} \right. \qquad \textit{(car on a supposé } s \neq 1, \ r \neq 1 \textit{ et } r \neq s\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{M \in V_{D,\Delta} \ \Leftrightarrow \ y = z = t = 0}$$

□

***b)*** En déduire une base de $V_{D,\Delta}$.

*Démonstration.*

- Remarquons tout d'abord que :

$$\begin{array}{rcl} V_{D,\Delta} & = & \{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid y = z = t = 0\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\} \ = \ \{x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\} \\ & = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \ = \ \mathrm{Vect}\,(U_1) \end{array}$$

- La famille $(U_1)$ est :
  - × est génératrice de $V_{D,\Delta}$.
  - × est libre car uniquement constituée d'un vecteur non nul.

$$\boxed{\text{Ainsi, } (U_1) \text{ est une base de } V_{D,\Delta}.}$$

□

***3.*** Soit $a, b, c, d$ des réels non nuls vérifiant $a - b \neq c - d$, $a - b \neq 1$, $c - d \neq 1$, $A$ et $B$ les matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} c & 1-c \\ d & 1-d \end{pmatrix}$$

On admet qu'il existe :

× une matrice inversible $P$ de $E$ telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$.

× une matrice inversible $Q$ de $E$ telle que $B = Q\Delta Q^{-1}$ où $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c-d \end{pmatrix}$.

Pour toute matrice $M$ de $E$, montrer qu'elle appartient à $V_{A,B}$ si et seulement si la matrice $P^{-1}MQ$ appartient à $V_{D,\Delta}$. En déduire une base de $V_{A,B}$.

*Démonstration.*
Soit $M \in E$.

$$\begin{array}{rcll}
M \in V_{A,B} & \Leftrightarrow & AM - MB = 0 & \\
& \Leftrightarrow & AM = MB & \\
& \Leftrightarrow & PDP^{-1}M = MQ\Delta Q^{-1} & \textit{(d'après les questions précédentes)} \\
& \Leftrightarrow & P^{-1}(PDP^{-1}M)Q = P^{-1}(MQ\Delta Q^{-1})Q & \\
& \Leftrightarrow & DP^{-1}MQ = P^{-1}MQ\Delta & \\
& \Leftrightarrow & D(P^{-1}MQ) - (P^{-1}MQ)\Delta = 0 & \\
& \Leftrightarrow & P^{-1}MQ \in V_{D,\Delta} & \\
& \Leftrightarrow & \exists \alpha \in \mathbb{R},\ P^{-1}MQ = \alpha \cdot U_1 & \textit{(car } V_{D,\Delta} = \text{Vect}\,(U_1)\textit{)} \\
& \Leftrightarrow & \exists \alpha \in \mathbb{R},\ M = \alpha \cdot PU_1Q^{-1} & \\
& \Leftrightarrow & M \in \text{Vect}\big(PU_1Q^{-1}\big) &
\end{array}$$

On en déduit que $V_{A,B} = \text{Vect}\big(PU_1Q^{-1}\big)$.
La famille $(PU_1Q^{-1})$ est :

× génératrice de $V_{A,B}$.

× libre car uniquement constituée d'un vecteur non nul. En effet, comme $U_1 \neq 0_E$ et que $P$ et $Q^{-1}$ sont inversibles, alors $PU_1Q^{-1} \neq 0_E$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } (PU_1Q^{-1}) \text{ est une base de } V_{A,B}.}$$

□

*4.* Dans cette question $r$, $s$ et $u$, $v$ désignent quatre réels vérifiant $r \neq s$, $r \neq v$, $u \neq s$, $u \neq v$, et on pose :

$$D = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

Par une méthode analogue à celle de la question **??**, déterminer $V_{D,\Delta}$.

*Démonstration.*
Soit $M \in E$.

$$\begin{aligned} M \in V_{D,\Delta} &\Leftrightarrow DM - M\Delta = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} ux & uy \\ rz & rt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xv & sy \\ zv & st \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} ux &=& vx \\ uy &=& sy \\ rz &=& vz \\ rt &=& st \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} (u-v)\ x &=& 0 \\ (u-s)\ y &=& 0 \\ (r-v)\ z &=& 0 \\ (r-s)\ t &=& 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = v \quad \texttt{OU} \quad x = 0 \\ u = s \quad \texttt{OU} \quad y = 0 \\ r = v \quad \texttt{OU} \quad z = 0 \\ r = s \quad \texttt{OU} \quad t = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{array}\right. \quad \textit{(car on a supposé } u \neq v, \\ &\hphantom{\Leftrightarrow} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{u} \neq s,\ r \neq v,\ r \neq s\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que : } V_{D,\Delta} = \{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid x = y = z = t = 0\} = \{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\} = \{0_E\}.}$$ □

**Commentaire**

- On a étudié dans cet exercice les solutions de l'équation matricielle $AM = MB$.
  La dimension de l'espace vectoriel des solutions peut être déterminée de manière exacte. Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Cecioni-Frobenius (pour des matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$).
- Lorsque $A = B$, l'exercice consiste à chercher l'ensemble des matrices telles que : $AM = MA$, autrement dit l'ensemble des matrices qui commutent avec $A$.
  Cet ensemble est appelé le commutant de la matrice $A$.
- L'étude du commutant peut donner lieu à des sujets de concours. Dans ce cas, il faut s'attendre à des questions proches de celles développées dans cet exercice : l'étude est réalisée pour des matrices carrées d'ordre 2 ou 3 ; on commence par remarquer que le commutant de $A$ est le noyau de l'endomorphisme $\varphi : M \mapsto AM - MA$ ; on étudie (éventuellement) le cas particulier des matrices diagonalisables ; on étudie (éventuellement) le cas particulier des matrices nilpotentes ...
- De manière plus générale, il est fréquent de tomber sur l'étude d'endomorphisme définie sur un espace de matrice. C'était par exemple le cas du sujet `EML 2014` où l'on étudiait l'endomorphisme $\varphi : M \mapsto TMT$.

# Exercice 2

Pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, on considère une urne contenant $n$ boules numérotées de 1 à $n$, dans laquelle on effectue une succession de $(n+1)$ tirages d'une boule avec remise et l'on note $X_n$ la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent.
Ainsi, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, la variable $X_n$ prend ses valeurs dans $[\![2, n+1]\!]$.
Par exemple, si $n = 5$ et si les tirages amènent successivement les numéros 5, 3, 2, 2, 6, 3, alors $X_5 = 4$.
Pour tout $k$ de $[\![1, n+1]\!]$, on note $N_k$ la variable aléatoire égale au numéro obtenu au $k^{\text{ème}}$ tirage.

## Partie I : Étude du cas $n = 3$

On suppose dans cette partie **uniquement** que $n = 3$.
L'urne contient donc les boules numérotées 1, 2, 3.

***1. a)*** Exprimer l'évenement $[X_3 = 4]$ à l'aide d'événements faisant intervenir les variables $N_1, N_2, N_3$.
En déduire $\mathbb{P}([X_3 = 4])$.

*Démonstration.*
Rappelons qu'on effectue $n + 1 = 4$ tirages successifs (et avec remise) dans l'urne.

- L'événement $[X_3 = 4]$ est réalisé si et seulement si c'est le $4^{\text{ème}}$ tirage qui a amené, pour la première fois, un numéro plus grand que le numéro tiré au tirage précédent.
  Cela signifie que :
  - × le numéro obtenu au $2^{\text{ème}}$ tirage est strictement plus petit que celui obtenu au $1^{\text{er}}$ tirage.
  - × le numéro obtenu au $3^{\text{ème}}$ tirage est strictement plus petit que celui obtenu au $2^{\text{ème}}$ tirage.
  - × le numéro obtenu au $4^{\text{ème}}$ tirage est supérieur ou égal à celui obtenu au $3^{\text{ème}}$ tirage.

  Les 3 premiers tirages constituent donc une séquence strictement décroissante d'entiers de l'ensemble $[\![1, 3]\!]$ (l'urne ne contenant que les boules 1, 2 et 3).
  On a donc forcément obtenu 3 au premier tirage, 2 au $2^{\text{ème}}$ et 1 au $3^{\text{ème}}$.
  *(le numéro obtenu au $4^{\text{ème}}$ tirage sera alors forcément supérieur ou égal à 1)*

  $$\boxed{\text{Ainsi : } [X_3 = 4] = [N_1 = 3] \cap [N_2 = 2] \cap [N_3 = 1].}$$

**Commentaire**

- Il est à noter que la décomposition de l'événément $[X_3 = 4]$ démontre la bonne compréhension et permet donc, à elle seule, d'obtenir la totalité des points alloués sur cette étape.
- Sur un exercice de probabilités discrètes, il faut prendre le temps en début d'énoncé de bien comprendre l'expérience aléatoire et les v.a.r. en présence. C'est aussi le but de la rédaction précédant la décomposition de l'événement : prendre le temps de caractériser la réalisation de l'événément permet de rentrer dans le sujet.

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([X_3 = 4]\big) &= \mathbb{P}\big([N_1 = 3] \cap [N_2 = 2] \cap [N_3 = 1]\big) \\
&= \mathbb{P}\big([N_1 = 3]\big) \times \mathbb{P}\big([N_2 = 2]\big) \times \mathbb{P}\big([N_3 = 1]\big) && \textit{(par indépendance des tirages)} \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27} && \textit{(car pour tout } i \in [\![1, 3]\!], N_i \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 3]\!])\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big([X_3 = 4]\big) = \frac{1}{27}}$$

□

***b)*** Montrer que $\mathbb{P}([X_3 = 2]) = \dfrac{2}{3}$, et en déduire $\mathbb{P}([X_3 = 3])$.

*Démonstration.*

- L'événement $[X_3 = 2]$ est réalisé si et seulement si c'est le $2^{\text{ème}}$ tirage qui a amené, pour la première fois, un numéro plus grand que le numéro tiré au tirage précédent.
  Cela signifie que le numéro obtenu au $2^{\text{ème}}$ tirage est supérieur ou égal à celui obtenu au $1^{\text{er}}$ tirage (les numéros obtenus aux $3^{\text{ème}}$ et $4^{\text{ème}}$ tirages ne sont pas contraints). Trois cas se présentent :
  × si on a obtenu 1 au premier tirage :
  alors on a pu tirer n'importe quel numéro au deuxième tirage.
  × si on a obtenu 2 au premier tirage :
  alors on a tiré les numéros 2 ou 3 au deuxième tirage.
  × si on a obtenu 3 au premier tirage :
  alors on a obligatoirement tiré le numéro 3 au deuxième tirage.

  Ainsi :
$$\begin{array}{rcl} [X_3 = 2] & = & [N_1 = 1] \cap \Big( [N_2 = 1] \cup [N_2 = 2] \cup [N_2 = 3] \Big) \\ & \cup & [N_1 = 2] \cap \Big( [N_2 = 2] \cup [N_2 = 3] \Big) \\ & \cup & [N_1 = 3] \cap \Big( [N_2 = 3] \Big) \\ & = & \Big( [N_1 = 1] \cap \Omega \Big) \cup \Big( [N_1 = 2] \cap [N_2 \geqslant 2] \Big) \cup \Big( [N_1 = 3] \cap [N_2 = 3] \Big) \end{array}$$

$$\boxed{[X_3 = 2] = [N_1 = 1] \cup \Big( [N_1 = 2] \cap [N_2 \geqslant 2] \Big) \cup \Big( [N_1 = 3] \cap [N_2 = 3] \Big)}$$

- On en déduit :
$$\begin{array}{rll} & \mathbb{P}\big( [X_3 = 2] \big) & \\ = & \mathbb{P}\big( [N_1 = 1] \big) + \mathbb{P}\big( [N_1 = 2] \cap [N_2 \geqslant 2] \big) + \mathbb{P}\big( [N_1 = 3] \cap [N_2 = 3] \big) & \\ = & \mathbb{P}\big( [N_1 = 1] \big) + \mathbb{P}\big( [N_1 = 2] \big) \times \mathbb{P}\big( [N_2 \geqslant 2] \big) + \mathbb{P}\big( [N_1 = 3] \big) \times \mathbb{P}\big( [N_2 = 3] \big) & \textit{(par indépendance des tirages)} \\ = & \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{3+2+1}{9} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3} & \textit{(pour tout } i \in [\![1,3]\!], N_i \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,3]\!])\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big( [X_3 = 2] \big) = \frac{2}{3}}$$

- La famille $\big( [X_3 = i] \big)_{i = [\![2,4]\!]}$ est un système complet d'événements. On en déduit :
$$\mathbb{P}\big( [X_3 = 2] \big) + \mathbb{P}\big( [X_3 = 3] \big) + \mathbb{P}\big( [X_3 = 4] \big) \ = \ 1$$
  Et ainsi :
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}\big( [X_3 = 3] \big) & = & 1 - \mathbb{P}\big( [X_3 = 2] \big) - \mathbb{P}\big( [X_3 = 4] \big) \\ & = & 1 - \dfrac{1}{27} - \dfrac{2}{3} \\ & = & \dfrac{27}{27} - \dfrac{1}{27} - \dfrac{18}{27} = \dfrac{8}{27} \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big( [X_3 = 3] \big) = \frac{8}{27}}$$

□

***2.*** Calculer l'espérance de $X_3$.

*Démonstration.*

- La v.a.r. $X_3$ admet une espérance car elle est finie.
- Par définition :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_3) &= 2 \times \mathbb{P}\big([X_3 = 2]\big) + 3 \times \mathbb{P}\big([X_3 = 3]\big) + 4 \times \mathbb{P}\big([X_3 = 4]\big) \\ &= 2 \times \frac{2}{3} + 3 \times \frac{8}{27} + 4 \times \frac{1}{27} \\ &= \frac{36 + 24 + 4}{27} = \frac{64}{27}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X_3) = \frac{64}{27}}$$

□

## Partie II : Cas général

Dans toute cette partie, $n$ est un entier fixé supérieur ou égal à 2.

***3.*** Pour tout $k$ de $[\![1, n+1]\!]$, reconnaître la loi de $N_k$ et rappeler son espérance et sa variance.

*Démonstration.*
Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$.

- À chaque instant $k$, l'expérience consiste au tirage d'une boule dans une urne contenant $n$ boules numérotées de 1 à $n$. Cette expérience possède donc $n$ issues équiprobables.
  La v.a.r. $N_k$ désigne le numéro obtenu lors de ce tirage.

$$\boxed{\text{On en déduit : } N_k \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!]).}$$

- La v.a.r. $N_k$ possède une espérance et une variance car suit une loi usuelle.

$$\boxed{\text{De plus : } \mathbb{E}(N_k) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(N_k) = \frac{n^2 - 1}{12}}$$

□

***4.*** Calculer $\mathbb{P}([X_n = n+1])$.

*Démonstration.*

- L'événement $[X_n = n+1]$ est réalisé si et seulement si c'est le $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage qui a amené, pour la première fois, un numéro plus grand que le numéro tiré au tirage précédent.
  Cela signifie que :
  × le numéro obtenu au $2^{\text{ème}}$ tirage est strictement plus petit que celui obtenu au $1^{\text{er}}$ tirage.
  × ...
  × le numéro obtenu au $n^{\text{ème}}$ tirage est strictement plus petit que celui obtenu au $(n-1)^{\text{ème}}$ tirage.
  × le numéro obtenu au $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage est supérieur ou égal à celui obtenu au $n^{\text{ème}}$ tirage.

  Ainsi, les numéros obtenus lors des $n$ premiers tirages forment une séquence strictement décroissante. On en déduit, comme en question ***1.a)*** :

$$[X_n = n+1] = [N_1 = n] \cap \ldots \cap [N_n = 1]$$

$$\boxed{\text{On en déduit, comme en question } \textit{\textbf{1.a)}} : [X_n = n+1] = \bigcap_{i=1}^{n} [N_i = n+1-i].}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big([X_n = n+1]\big) & = & \mathbb{P}\big(\bigcap\limits_{i=1}^{n} [N_i = n+1-i]\big) & \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big([N_i = n+1-i]\big) & \textit{(par indépendance des tirages)} \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{n} \;=\; \left(\dfrac{1}{n}\right)^n & \textit{(car pour tout } i \in [\![1,n]\!], \\ & & & N_i \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big([X_n = n+1]\big) = \left(\frac{1}{n}\right)^n}$$

□

***5.*** Montrer, pour tout $i$ de $[\![1,n]\!]$ : $\mathbb{P}_{[N_1=i]}([X_n = 2]) = \dfrac{n-i+1}{n}$.

*Démonstration.*
Soit $i \in [\![1,n]\!]$.
Si l'événement $[N_1 = i]$ est réalisé, c'est que l'on a obtenu la boule numérotée $i$ lors du 1er tirage.
L'événement $[X_n = 2]$ est alors réalisé si on a obtenu une boule portant un numéro supérieur ou égal à $i$ lors du 2ème tirage, c'est-à-dire portant un numéro dans l'ensemble $[\![i,n]\!]$.
Il y a $n-i+1$ boules vérifiant cette condition.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on en déduit :}\\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}_{[N_1=i]}([X_n = 2]) = \dfrac{n-i+1}{n}\end{array}}$$

**Commentaire**

- On pouvait aussi effectuer cette démonstration en revenant à la définition de probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}_{[N_1=i]}\big([X_n = 2]\big) = \frac{\mathbb{P}\big([N_1 = i] \cap [X_n = 2]\big)}{\mathbb{P}\big([N_1 = i]\big)}$$

L'événement $[N_1 = i] \cap [X_n = 2]$ est réalisé si et seulement si on a obtenu la boule numérotée $i$ au 1er tirage et une boule portant un numéro supérieur ou égal lors du 2ème tirage. Ainsi :

$$[N_1 = i] \cap [X_n = 2] = [N_1 = i] \cap [i \leqslant N_2 \leqslant n]$$

D'où :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big([N_1 = i] \cap [X_n = 2]\big) & = & \mathbb{P}\left([N_1 = i] \cap [i \leqslant N_2 \leqslant n]\right) & \\ & = & \mathbb{P}\big([N_1 = i]\big) \times \mathbb{P}\big([i \leqslant N_2 \leqslant n]\big) & \textit{(par indépendance des tirages)} \\ & = & \mathbb{P}\big([N_1 = i]\big) \times \mathbb{P}\big(\bigcup\limits_{k=i}^{n} [N_2 = k]\big) & \end{array}$$

Enfin, les événements de la réunion étant 2 à 2 incompatibles, on en déduit :

$$\mathbb{P}\big(\bigcup_{k=i}^{n} [N_2 = k]\big) = \sum_{k=i}^{n} \mathbb{P}\big([N_2 = k]\big) = \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{n} = \frac{n-i+1}{n}$$

□

***6.*** En déduire une expression simple de $\mathbb{P}\big( [X_n = 2] \big)$.

*Démonstration.*
La famille $\big( [N_1 = i] \big)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\big( [X_n = 2] \big) & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big( [N_1 = i] \cap [X_n = 2] \big) & \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big( [N_1 = i] \big) \times \mathbb{P}_{[N_1 = i]}\big( [X_n = 2] \big) & \textit{(car pour tout } i \in [\![1,n]\!], \\
& & & \mathbb{P}\big( [N_1 = i] \big) \neq 0\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{n} \; \dfrac{n-i+1}{n} & \textit{(d'après la question précédente)} \\
& = & \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{j}{n^2} & \textit{(en posant } j = n-i+1\textit{)} \\
& = & \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{j=1}^{n} j \; = \; \dfrac{1}{n^2} \; \dfrac{n(n+1)}{2} \; = \; \dfrac{n+1}{2n} &
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big( [X_n = 2] \big) = \dfrac{n+1}{2}}$$

□

***7.*** Soit $k \in [\![2,n]\!]$. Justifier l'égalité d'événements suivante : $[X_n > k] = [N_1 > N_2 > \ldots > N_k]$.
En déduire que $\mathbb{P}([X_n > k]) = \dfrac{1}{n^k} \dbinom{n}{k}$.
Vérifier que cette dernière égalité reste valable pour $k = 0$ et pour $k = 1$.

*Démonstration.*

- L'événement $[X_n > k]$ est réalisé si et seulement si la boule portant un numéro supérieur ou égal au celle du tirage précédent est tirée au mieux lors du $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage.
  Cela signifie que :
  - × le numéro obtenu au $2^{\text{ème}}$ tirage est strictement plus petit que celui obtenu au $1^{\text{er}}$ tirage.
  - × …
  - × le numéro obtenu au $k^{\text{ème}}$ tirage est strictement plus petit que celui obtenu au $(k-1)^{\text{ème}}$ tirage.

  Ainsi, les numéros obtenus lors des $k$ premiers tirages forment une séquence strictement décroissante.

  $$\boxed{\text{On en déduit : } [X_n > k] = [N_1 > N_2] \cap [N_2 > N_3] \cap \ldots \cap [N_{k-1} > N_k].}$$

**Commentaire**

L'énoncé présente l'écriture $[N_1 > N_2 > \ldots > N_k]$.

- Rappelons tout d'abord que le symbole $>$ est utilisé pour représenter la relation binaire liant 2 réels $a$ et $b$ : on note $a > b$ si $a$ est strictement plus petit que $b$. Du fait du caractère transitif de cette relation, on se permet l'abus de notation : $a > b > c$ où $c$ est un réel.
  Rappelons : $a > b > c \Leftrightarrow (a > b \ \texttt{ET} \ b > c)$.
- Ces rappels étant faits, revenons à l'événement considéré :

$$\begin{array}{cl} & [N_1 > N_2 > \ldots > N_k] \\ = & \{\ \omega \in \Omega \mid N_1(\omega) > N_2(\omega) > \ldots > N_k(\omega)\ \} \\ = & \{\ \omega \in \Omega \mid N_1(\omega) > N_2(\omega) \ \texttt{ET} \ N_2(\omega) > N_3(\omega) \ \texttt{ET} \ \ldots \ \texttt{ET} \ N_{k-1}(\omega) > N_k(\omega)\} \\ = & \{\ \omega \in \Omega \mid N_1(\omega) > N_2(\omega)\ \} \ \cap \ \ldots \ \cap \ \{\ \omega \in \Omega \mid N_{k-1}(\omega) > N_k(\omega)\} \\ = & [N_1 > N_2] \cap [N_2 > N_3] \cap \ldots \cap [N_{k-1} > N_k] \end{array}$$

- L'événement $[X_n > k]$ est réalisé par tous les $(n+1)$-tirages commençant par une séquence strictement décroissante de $k$ entiers.
  Un tel $(n+1)$-tirage est entièrement déterminé par :
  × les $k$ premiers entiers formant une séquence strictement décroissante : $\binom{n}{k}$ possibilités.
    En effet, une $k$-séquence strictement décroissante d'entiers de $[\![1, n]\!]$ est entièrement déterminée par le choix des $k$ entiers différents de $[\![1, n]\!]$ constituant cette séquence. Une fois ces $k$ entiers choisis, ils sont rangés dans l'ordre décroissant, ce qui ne forme qu'une seule $k$-séquence.
    Autrement dit, une partie à $k$ éléments de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ fournit une et une seule $k$-séquence strictement décroissante d'entiers de $[\![1, n]\!]$. Il y a donc une bijection entre l'ensemble des $k$-séquence strictement décroissante et l'ensemble des parties à $k$ éléments de $[\![1, n]\!]$.
  × le $(k+1)^{\text{ème}}$ élément : $n$ possibilités.
  × ...
  × le $(n+1)^{\text{ème}}$ élément : $n$ possibilités.
  Il y a donc en tout $\binom{n}{k}\ n^{(n+1)-(k+1)+1} = \binom{n}{k}\ n^{n+1-k}$ tels $(n+1)$-tirages.
  L'univers $\Omega$, formé de tous les $(n+1)$-tirages est de cardinal : $\text{Card}(\Omega) = n^{n+1}$.
  On en déduit :
  $$\mathbb{P}\big(\,[X_n > k]\,\big) \ = \ \frac{\text{Card}\big(\,[X_n > k]\,\big)}{\text{Card}(\Omega)} \ = \ \frac{\binom{n}{k}\ n^{n+1-k}}{n^{n+1}} \ = \ \frac{1}{n^k}\binom{n}{k}$$
  $$\boxed{\mathbb{P}\big(\,[X_n > k]\,\big) = \frac{1}{n^k}\binom{n}{k}}$$
- Vérifions maintenant que cette formule est aussi vérifiée en $k = 0$ et $k = 1$.
  × Si $k = 0$ :
    - D'une part : $\dfrac{1}{n^0}\dbinom{n}{0} = 1$.
    - D'autre part : $[X_n > 0] = \Omega$ car $X_n$ est à valeurs dans $[\![2, n+1]\!]$.
      Ainsi, $\mathbb{P}\big(\,[X_n > 0]\,\big) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.
  × Si $k = 1$ :
    - D'une part : $\dfrac{1}{n^1}\dbinom{n}{1} = \dfrac{1}{n}\ n = 1$.
    - D'autre part : $[X_n > 1] = \Omega$ car $X_n$ est à valeurs dans $[\![2, n+1]\!]$.
      Ainsi, $\mathbb{P}\big(\,[X_n > 0]\,\big) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.

  $$\boxed{\text{La relation est vérifiée pour } k = 0 \text{ et } k = 1.}$$ □

***8.*** Exprimer, pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, $\mathbb{P}([X_n = k])$ à l'aide de $\mathbb{P}([X_n > k-1])$ et de $\mathbb{P}([X_n > k])$.

*Démonstration.*
Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$.
Remarquons tout d'abord que, comme $X_n$ **est à valeurs entières** :
$$[X_n > k-1] = [X_n = k] \cup [X_n > k]$$
Les événements $[X_n = k]$ et $[X_n > k]$ sont incompatibles. On en déduit :
$$\mathbb{P}([X_n > k-1]) = \mathbb{P}([X_n = k]) + \mathbb{P}([X_n > k])$$
$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}([X_n = k]) = \mathbb{P}([X_n > k-1]) - \mathbb{P}([X_n > k]).}$$ □

***9.*** En déduire : $\mathbb{E}(X_n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n > k])$. Calculer ensuite $\mathbb{E}(X_n)$.

*Démonstration.*

- La v.a.r. $X_n$ admet une espérance car elle est finie.
- De plus :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}(X_n) \\
= \ & \sum_{k \in X_n(\Omega)} k \ \mathbb{P}([X_n = k]) \\
= \ & \sum_{k=2}^{n+1} k \, \mathbb{P}([X_n = k]) \\
= \ & \sum_{k=2}^{n+1} k \left( \ \mathbb{P}([X_n > k-1]) - \ \mathbb{P}([X_n > k]) \right) && \textit{(d'après la question précédente)} \\
= \ & \sum_{k=2}^{n+1} k \, \mathbb{P}([X_n > k-1]) - \sum_{k=2}^{n+1} k \, \mathbb{P}([X_n > k]) && \textit{(par linéarité)} \\
= \ & \sum_{k=1}^{n} (k+1) \ \mathbb{P}([X_n > k]) - \sum_{k=2}^{n+1} k \, \mathbb{P}([X_n > k]) && \textit{(par décalage d'indice)} \\
= \ & \sum_{k=1}^{n} k \ \mathbb{P}([X_n > k]) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_n > k]) - \sum_{k=2}^{n+1} k \ \mathbb{P}([X_n > k]) && \textit{(par linéarité)} \\
= \ & 1 \times \mathbb{P}([X_n > 1]) + \cancel{\sum_{k=2}^{n} k \ \mathbb{P}([X_n > k])} + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_n > k]) - \left( \cancel{\sum_{k=2}^{n} k \ \mathbb{P}([X_n > k]} + (n+1) \ \mathbb{P}([X_n > n+1]) \right) \\
= \ & \mathbb{P}([X_n > 0]) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_n > k]) - (n+1) \ \mathbb{P}([X_n > n+1]) && \textit{(car } [X_n > 1] = \Omega = [X_n > 0] \textit{)} \\
= \ & \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n > k]) - (n+1) \ \cancel{\mathbb{P}([X_n > n+1])} && \textit{(car } [X_n > n+1] = \varnothing \textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big( [X_n > k] \big)}$$

**Commentaire**

La démonstration consiste à démontrer un résultat de type somme télescopique.
On pouvait faire apparaître directement une telle somme en remarquant :

$$k \ \mathbb{P}([X = k]) = (k-1) \ \mathbb{P}([X > k-1]) - k \ \mathbb{P}([X > k]) + \mathbb{P}([X > k-1])$$

Ainsi, par sommation et linéarité :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n+1} k \ \mathbb{P}([X_n = k]) \ &= \ \sum_{k=2}^{n+1} \Big( (k-1) \ \mathbb{P}([X_n > k-1]) - k \ \mathbb{P}([X_n > k]) \Big) + \sum_{k=2}^{n+1} \mathbb{P}([X_n > k-1]) \\
&= \ (2-1) \ \mathbb{P}([X_n > 2-1]) - (n+1) \ \mathbb{P}([X_n > n+1]) + \sum_{k=2}^{n+1} \mathbb{P}([X_n > k-1]) \\
&= \ -(n+1) \ \mathbb{P}([X_n > n+1]) + \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n > k]) && \textit{(par décalage d'indice)}
\end{aligned}$$

- Il reste à effectuer ce calcul de somme.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(X_n) & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n > k]) & \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{n^k}\dbinom{n}{k} & \textit{(d'après la question 7)} \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} 1^{n-k} \times \left(\dfrac{1}{n}\right)^k & \\ & = & \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n & \textit{(d'après la formule du binôme de Newton)} \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n) = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n}$$

□

***10.*** Montrer : $\forall k \in [\![2, n+1]\!]$, $\mathbb{P}([X_n = k]) = \dfrac{k-1}{n^k}\dbinom{n+1}{k}$.

*Démonstration.*
Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$. Notons tout d'abord que, d'après la question ***8.*** :

$$\mathbb{P}([X_n = k]) \ = \ \mathbb{P}([X_n > k-1]) - \mathbb{P}([X_n > k])$$

Deux cas se présentent.
× Si $k \in [\![2, n]\!]$ : on raisonne par équivalence.

$$\begin{array}{rrcll} & \dfrac{k-1}{n^k}\dbinom{n+1}{k} & = & \mathbb{P}([X_n = k]) & \\ \Leftrightarrow & \dfrac{k-1}{n^k}\dbinom{n+1}{k} & = & \mathbb{P}([X_n > k-1]) - \mathbb{P}([X_n > k]) & \\ \Leftrightarrow & \dfrac{k-1}{n^k}\dbinom{n+1}{k} & = & \dfrac{1}{n^{k-1}}\dbinom{n}{k-1} - \dfrac{1}{n^k}\dbinom{n}{k} & \textit{(d'après la question 7. avec } k-1 \in [\![1, n-1]\!] \textit{ et } k \in [\![2, n]\!]\textit{)} \\ \Leftrightarrow & (k-1)\dbinom{n+1}{k} & = & n\dbinom{n}{k-1} - \dbinom{n}{k} & \textit{(en multipliant par } n^k > 0\textit{)} \\ \Leftrightarrow & k\dbinom{n+1}{k} - \dbinom{n+1}{k} & = & n\dbinom{n}{k-1} - \dbinom{n}{k} & \\ \Leftrightarrow & (n+1)\dbinom{n}{k-1} - \dbinom{n+1}{k} & = & n\dbinom{n}{k-1} - \dbinom{n}{k} & \textit{(en appliquant l'égalité } k\dbinom{m}{k} = m\dbinom{m-1}{k-1} \textit{ en } m = n+1\textit{)} \\ \Leftrightarrow & \cancel{n\dbinom{n}{k-1}} + \dbinom{n}{k-1} - \dbinom{n+1}{k} & = & \cancel{n\dbinom{n}{k-1}} - \dbinom{n}{k} & \\ \Leftrightarrow & \dbinom{n}{k-1} + \dbinom{n}{k} & = & \dbinom{n+1}{k} & \textit{(en réordonnant)} \end{array}$$

La dernière égalité n'est autre qu'une instance de la formule du triangle de Pascal.
La dernière égalité étant vérifiée, il en est de même de la première.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } k \in [\![2, n]\!] : \mathbb{P}([X_n = k]) \ = \ \dfrac{k-1}{n^k}\dbinom{n+1}{k}.}$$

× Si $k = n+1$ :

- D'une part :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X_n = n+1]) & = & \mathbb{P}([X_n > n]) - \cancel{\mathbb{P}([X_n > n+1])} & \textit{(car } X_n \textit{ est à valeurs dans } [\![2, n+1]\!]\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{n^n} \dbinom{n+1}{n} & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{7.}}\textit{)} \end{array}$$

- D'autre part :

$$\frac{k-1}{n^k} \binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)-1}{n^{n+1}} \binom{n+1}{n+1} = \frac{n}{n^{n+1}}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la propriété est aussi vérifiée en } k = n+1.}$$

□

## Partie III : Une convergence en loi

On s'intéresse dans cette partie à la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geqslant 2}$.

***11.*** Soit $k$ un entier fixé supérieur ou égal à 2. Montrer : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}([X_n = k]) = \dfrac{k-1}{k!}$.

*Démonstration.*
Soit $k \geqslant 2$ et soit $n \geqslant k$.
*(on peut prendre $n$ aussi grand que souhaité car on s'intéresse à la limite lorsque $n$ tend vers $+\infty$ d'une quantité dépendant de $n$)*

D'après la question précédente, comme $k \in [\![2, n+1]\!]$ :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([X_n = k]) & = & \dfrac{k-1}{n^k} \dbinom{n+1}{k} \\ & = & \dfrac{k-1}{n^k} \, \dfrac{(n+1)!}{k!\,((n+1)-k)!} \\ & = & \dfrac{k-1}{k!} \, \dfrac{\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!}}{n^k} \\ & = & \dfrac{k-1}{k!} \, \dfrac{(n+1)\, n\, (n-1)\ \ldots\ ((n+1)-(k-1))}{n^k} \\ & \underset{n \to +\infty}{\sim} & \dfrac{k-1}{k!} \, \dfrac{n^k}{n^k} = \dfrac{k-1}{k!} \end{array}$$

En effet, le numérateur apparaît comme produit de $k$ termes tous équivalents, lorsque $n$ est dans un voisinage de $+\infty$, à $n$.

$$\boxed{\text{Comme } \lim_{n \to +\infty} \frac{k-1}{k!} = \frac{k-1}{k!}, \text{ on a bien : } \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) = \frac{k-1}{k!}.}$$

□

***12.*** Montrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant 2} \dfrac{k-1}{k!}$ converge et calculer sa somme.
On admet qu'il existe une variable aléatoire $Z$ à valeurs dans $[\![2,+\infty[\![$ telle que :

$$\forall k \in [\![2,+\infty[\![,\ \mathbb{P}([Z=k]) = \frac{k-1}{k!}$$

*Démonstration.*
Soit $N \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{N} \frac{k-1}{k!} &= \sum_{k=2}^{N} \frac{k}{k!} - \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k!} \\
&= \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k!} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} - \cancel{\frac{1}{0!}}\right) - \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} - \cancel{\frac{1}{0!}} - \frac{1}{1!}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} + 1 \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^1 + 1 = 1
\end{aligned}$$

Cette limite est obtenue en reconnaissant les sommes partielles d'ordre $N-1$ et $N$ de la série exponentielle de paramètre 1 qui est une série convergente.

$$\boxed{\text{On en déduit que la série } \sum_{k\geqslant 2} \frac{k-1}{k!} \text{ est convergente, de somme } \sum_{k\geqslant 2}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} = 1.}$$

**Commentaire**

- On prêtera toujours attention à la formulation des questions de l'énoncé. Une question du type « cette série est-elle convergente ? » suggère que la série en question ne l'est sans doute pas. On orientera donc ses recherches en ce sens dans un premier temps.
- Pour une question du type « montrer que cette série est convergente » sans que le calcul de somme soit demandé, on pensera en priorité à un théorème de comparaison des séries à termes positifs.
- Ici, on est confonté à la question « montrer que cette série est convergente et calculer sa somme ». Le calcul de la somme (comme limite de le somme partielle) démontre la convergence et fournit le résultat du calcul demandé. C'est cette méthode qu'il faut regarder en priorité pour ce type de questions.
- La deuxième partie de la question aurait pu être formulée sous la forme « démontrer que la suite $\left(\frac{k-1}{k!}\right)_{k\geqslant 2}$ fournit une loi de probabilité ». Il s'agit alors de démontrer :

$$\forall k \geqslant 2,\ \frac{k-1}{k!} \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} \ = \ 1$$

C'est bien le cas ici. On considère alors une v.a.r. $Z$ discrète qui suit cette loi.

□

***13.*** Montrer que $Z$ admet une espérance et la calculer. Comparer $\mathbb{E}(Z)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

*Démonstration.*

- La v.a.r. $Z$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{k\geqslant 2} k\mathbb{P}\big([Z=k]\big)$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Soit $N \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{N} k\ \mathbb{P}\big([Z=k]\big) &= \sum_{k=2}^{N} k\ \frac{k-1}{k!} \\ &= \sum_{k=2}^{N} \frac{k-1}{(k-1)!} \\ &= \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{(k-2)!} \\ &= \sum_{k=0}^{N-2} \frac{1}{k!} \qquad \textit{(par décalage d'indice)}\end{aligned}$$

  Or : $\sum\limits_{k=0}^{N-2} \dfrac{1}{k!} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^1$ en reconnaissant la somme partielle d'ordre $N-2$ de la série exponentielle de paramètre 1.

  $$\boxed{\text{Ainsi, la v.a.r. admet une espérance et } \mathbb{E}(Z) = \mathrm{e}^1.}$$

- Par ailleurs, on a vu en question ***9.*** :

$$\mathbb{E}(X_n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

  Or : $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ \dfrac{1}{n} = 1$.

  On en déduit, par composition de limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = \lim_{n\to+\infty} \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \mathrm{e}^1$$

  $$\boxed{\text{Ainsi, } \mathbb{E}(Z) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n).}$$

**Commentaire**

On a démontré :
*1)* $X_n$ converge en loi vers $Z$ (question ***11.***),
*2)* $\mathbb{E}(X_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(Z)$ (dans cette question).
Cela pourrait laisser penser que **1)** implique **2)**... Il n'en est rien :

$$X_n \text{ converge en loi vers } Z \quad \not\Rightarrow \quad \mathbb{E}(X_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(Z)$$

De manière générale, on retiendra que la convergence en loi **n'implique pas** la convergence des moments (et vice versa évidemment).

□

# Exercice 3 (EDHEC 2015 voie S)

## Partie 1

Dans cette partie, la lettre $r$ désigne un entier naturel et $x$ est un réel fixé de $]0,1[$.

*1.* Montrer que lorsque $n$ est au voisinage de $+\infty$, on a : $\dbinom{n}{r} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^r}{r!}$ .

*Démonstration.*
Soit $n$ dans un voisinage de $+\infty$.

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n\times(n-1)\times\ldots\times(n-(r-1))}{r!}$$

Or, pour tout $i \in [\![0, r-1]\!]$ : $n - i \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

On en déduit : $n \times (n-1) \times \ldots \times (n-(r-1)) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^r$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \binom{n}{r} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^r}{r!}.}$$

**Commentaire**

Il est important de bien comprendre que la variable $r$ est un entier indépendant de $n$ fixé en début d'énoncé. Cela permet notamment d'obtenir :

$$\frac{n-(r-1)}{n} = 1 - \frac{r-1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

ce qui démontre : $n-(r-1) \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

□

*2.* ***a)*** Donner la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{r+2}\, x^n$.

*Démonstration.*
Comme $x \in ]0,1[$, alors : $\dfrac{1}{x} > 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit, par croissances comparées : } n^{r+2}\, x^n = \frac{n^{r+2}}{\left(\frac{1}{x}\right)^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

□

***b)*** En déduire que la série $\sum \dbinom{n}{r} x^n$ est convergente.

*Démonstration.*
On a :

× $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dbinom{n}{r} x^n \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$.

× $\dbinom{n}{r} x^n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. En effet : $\dfrac{\binom{n}{r} x^n}{\frac{1}{n^2}} = \binom{n}{r} n^2\, x^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^r}{r!} n^2\, x^n = \dfrac{1}{r!} n^{r+2}\, x^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

× La série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente car c'est une série de Riemann d'exposant 2 ($2 > 1$).

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit, par critère d'équivalence des séries à termes positifs,}\\ \text{que la série } \sum \binom{n}{r} x^n \text{ est convergente.}\end{array}}$$

□

***3. a)*** Pour tout entier naturel $r$, on pose : $S_r = \sum\limits_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n$. Donner la valeur de $S_0$.

*Démonstration.*

- Soit $r \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente la série $\sum \binom{n}{r} x^n$ est convergente.
  Ainsi, la somme $S_r$ est bien définie.
- De plus :
  $$S_0 \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{0} x^n \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \ = \ \frac{1}{1-x}$$
  On reconnaît en effet la somme d'une série géométrique de raison $x \in \,]0,1[$.

$$\boxed{S_0 = \frac{1}{1-x}}$$

□

***b)*** Établir, en utilisant la formule du triangle de Pascal : $(1-x)\, S_{r+1} = x\, S_r$.

*Démonstration.*

$$\begin{array}{rcll}
(1-x)\, S_{r+1} & = & (1-x) \displaystyle\sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n}{r+1} x^n & \\[2ex]
& = & \displaystyle\sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n}{r+1} x^n - \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n}{r+1} x^{n+1} & \\[2ex]
& = & \displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n+1}{r+1} x^{n+1} - \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n}{r+1} x^{n+1} & \textit{(par décalage d'indice)} \\[2ex]
& = & \displaystyle\left( \binom{r+1}{r+1} x^{r+1} + \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n+1}{r+1} x^{n+1} \right) - \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n}{r+1} x^{n+1} & \\[2ex]
& = & \displaystyle\binom{r+1}{r+1} x^{r+1} + \sum_{n=r+1}^{+\infty} \left( \binom{n+1}{r+1} - \binom{n}{r+1} \right) \ x^{n+1} & \\[2ex]
& = & \displaystyle\binom{r+1}{r+1} x^{r+1} + \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n+1} & \textit{(car } \displaystyle\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r+1} + \binom{n}{r} \textit{)} \\[2ex]
& = & \displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n+1} & \textit{(en reconnaissant le premier terme de la somme)} \\[2ex]
& = & x \displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } (1-x)\, S_{r+1} = x\, S_r.}$$

□

***c)*** En déduire : $\forall x \in \, ]0,1[, \, \forall r \in \mathbb{N}, \, \sum\limits_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n = \dfrac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$.

*Démonstration.*
Soit $x \in \, ]0,1[$.
Démontrons par récurrence : $\forall r \in \mathbb{N}, \, \mathcal{P}(r)$ où $\mathcal{P}(r) : S_r = \dfrac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$.

- **Initialisation** :
  - D'une part : $S_0 = \dfrac{1}{1-x}$.
  - D'autre part : $\dfrac{x^0}{(1-x)^{0+1}} = \dfrac{1}{1-x}$.

  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $r \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(r)$ et démontrons $\mathcal{P}(r+1)$ (*i.e.* $S_{r+1} = \dfrac{x^{r+1}}{(1-x)^{r+2}}$).
  On a :
  $$\begin{array}{rcll} S_{r+1} & = & \dfrac{x}{1-x} \, S_r & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{3.b)}}\textit{)} \\ & = & \dfrac{x}{1-x} \, \dfrac{x^r}{(1-x)^{r+1}} & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & \dfrac{x^{r+1}}{(1-x)^{r+2}} & \end{array}$$
  D'où $\mathcal{P}(r+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall r \in \mathbb{N}, \, \mathcal{P}(r).}$$

□

***d)*** Donner enfin la valeur de $\sum\limits_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r}$.

*Démonstration.*
D'après la question précédente :
$$\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r} = x^{-r} \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n = x^{-r} \, \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$$

$$\boxed{\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}}$$

□

## Partie 2

On désigne par $\alpha$ et $p$ deux réels de $]0,1[$.
Un joueur participe à un jeu constitué d'une suite de manches.
Avant chaque manche y compris la première, le joueur a une probabilité $\alpha$ de ne pas être autorisé à jouer la manche en question, (on dit qu'il est disqualifié, et c'est définitif), et une probabilité $1-\alpha$ d'y être autorisé, et ceci indépendamment du fait qu'il ait gagné ou perdu la manche précédente s'il y en a eu une. À chaque manche jouée, le joueur gagne un euro avec la probabilité $p$ et perd un euro avec la probabilité $1-p$.
Si le jeu a commencé, le joueur joue jusqu'à ce qu'il soit disqualifié, et on suppose que les manches sont jouées de façon indépendantes. On note :

× $X$ le nombre de manches jouées par le joueur avant d'être disqualifié.

× $Y$ le nombre de manches gagnées par le joueur.

× $G$ le gain du joueur à la fin du jeu.

On admet que $X$, $Y$ et $G$ sont des variables aléatoires définies toutes les trois sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

*4.* ***a)*** Donner la loi de $X$.
*(on pourra noter $D_k$ l'événement « Le joueur ne joue pas la $k^{\text{ème}}$ manche »)*

*Démonstration.*

- Tout d'abord : $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
En effet, le joueur peut être disqualifié avant même de jouer la première manche (dans ce cas, il n'a joué aucune manche) ou peut être disqualifié à l'issue de n'importe quelle manche suivante. Il peut donc jouer un nombre quelconque de manches.

$$\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}}$$

- Soit $k \in \mathbb{N}$.
L'événement $[X = k]$ est réalisé si et seulement si le joueur a joué $k$ manches. Autrement dit, s'il a joué les $k$ premières manches et a été disqualifié à l'issue de la $k^{\text{ème}}$ manche. Ainsi :

$$[X = k] \;=\; \overline{D_1} \,\cap\, \ldots \,\cap\, \overline{D_k} \,\cap\, D_{k+1}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X = k]) &= \mathbb{P}\Big(\overline{D_1} \,\cap\, \ldots \,\cap\, \overline{D_{k-1}} \,\cap\, D_k\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(\overline{D_1}\Big) \times \ldots \times \mathbb{P}\Big(\overline{D_k}\Big) \times \mathbb{P}(D_{k+1}) && \textit{(car les manches sont jouées de façon indépendante)} \\
&= (1-\alpha) \times \ldots \times (1-\alpha) \times \alpha \\
&= (1-\alpha)^k \, \alpha
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X = k]) = (1-\alpha)^k \, \alpha}$$

**Commentaire**

Une bonne connaissance du cours est une condition *sine qua non* de réussite au concours. En effet, on trouve dans toutes les épreuves de maths (même pour les écoles les plus prestigieuses), des questions d'application directe du cours.
C'est particulièrement le cas dans cet énoncé :

× on reconnaît ici la démonstration de cours, à un décalage d'indice près (*cf* question suivante) permettant d'illustrer la loi géométrique.

× on demande dans la question qui suit les propriétés caractéristiques de la loi géométrique. □

***b)*** On pose $T = X + 1$. Démontrer que $T$ suit la loi géométrique de paramètre $\alpha$.

*Démonstration.*

- Tout d'abord : $T(\Omega) = (X+1)(\Omega) = \{x+1 \mid x \in X(\Omega)\} = \mathbb{N}^*$.

$$\boxed{T(\Omega) = \mathbb{N}^*}$$

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([T = k]) &= \mathbb{P}([X + 1 = k]) \\
&= \mathbb{P}([X = k - 1]) \\
&= (1 - \alpha)^{k-1}\ \alpha && \textit{(d'après la question précédente et car } k - 1 \in \mathbb{N}\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } T \hookrightarrow \mathcal{G}(\alpha).}$$

□

***c)*** En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

*Démonstration.*

- Comme $T \hookrightarrow \mathcal{G}(\alpha)$, $T$ admet une espérance et une variance.

$$\boxed{\text{De plus : } \mathbb{E}(T) \ = \ \frac{1}{\alpha} \ \text{ et } \ \mathbb{V}(T) \ = \ \frac{1-\alpha}{\alpha^2}.}$$

- Or, par définition : $X = T - 1$.
La v.a.r. $X$ admet une espérance et une variance comme transformée affine d'une v.a.r. qui admet une espérance et une variance. De plus :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(T - 1) \\
&= \mathbb{E}(T) - 1 && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
&= \frac{1}{\alpha} - 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{E}(X) \ = \ \frac{1-\alpha}{\alpha}.}$$

Et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{V}(T - 1) \\
&= \mathbb{V}(T) && \textit{(par propriété de la variance)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{V}(X) \ = \ \frac{1-\alpha}{\alpha^2}.}$$

□

**5.** ***a)*** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$.
Déterminer, en distinguant les cas $k \leqslant n$ et $k > n$ la probabilité $\mathbb{P}_{[X=n]}\big([Y = k]\big)$.

*Démonstration.*

- Si l'événement $[X = n]$ est réalisé, c'est que le joueur a joué $n$ manches avant d'être disqualifié.
  - × Ces $n$ manches correspondent à une expérience consistant en la succession de $n$ épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre de succès $p$ (correspondant à la probabilité de gagner un euro au cours de la manche).
  - × La v.a.r. $Y$ compte le nombre de succès au cours de cette expérience.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit : } \forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}_{[X=n]}\big([Y = k]\big) = \dbinom{n}{k} p^k\ (1-p)^{n-k}. \\ \text{Et : } \forall k > n,\ \mathbb{P}_{[X=n]}\big([Y = k]\big) = 0.\end{array}}$$

**Commentaire**

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans cette question, on s'intéresse à l'application $\mathbb{P}_{[X=n]}([Y = \cdot])$ définie par :

$$\begin{array}{rcrcl} \mathbb{P}_{[X=n]}([Y=\cdot]) & : & Y(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ & & k & \mapsto & \mathbb{P}_{[X=n]}([Y=k]) = \dfrac{\mathbb{P}([X=n] \cap [Y=k])}{\mathbb{P}([X=n])} \end{array}$$

Cette application est appelée loi conditionnelle de $Y$ relativement à l'événement $[X = n]$.
On parle aussi de loi conditionnelle de $Y$ sachant que l'événement $[X = n]$ est réalisé.
Cette définition sera vue dans le chapitre « Couples de v.a.r. discrètes ».

- On démontre dans cette question que la loi conditionnelle de la v.a.r. $Y$ relativement à l'événement $[X = n]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

***b)*** En déduire à l'aide de la **Partie 1** la loi de $Y$.

*Démonstration.*

- Notons tout d'abord : $\mathbb{P}_{[X=0]}([Y = 0]) = 1$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ : $\mathbb{P}_{[X=0]}([Y = k]) = 0$.
En effet, si $[X = 0]$ est réalisé, c'est que le joueur est disqualifié avant d'avoir pu jouer la première manche. Dans ce cas, il ne gagne aucune manche et $Y$ prend donc la valeur 0.

$$\boxed{\text{Ainsi, la formule de la question précédente est valable dans le cas } n = 0.}$$

- La famille $\big([X = n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.
Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([Y=k]\big) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X=n] \cap [Y=k]\big) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X=n]\big)\, \mathbb{P}_{[X=n]}\big([Y=k]\big) && \textit{(car pour tout } n \in \mathbb{N}, \ \mathbb{P}\big([X=n]\big) \neq 0\textit{)} \\
&= \sum_{n=0}^{k-1} \mathbb{P}\big([X=n]\big)\, \cancel{\mathbb{P}_{[X=n]}\big([Y=k]\big)} + \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X=n]\big)\, \mathbb{P}_{[X=n]}\big([Y=k]\big) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} (1-\alpha)^n\, \alpha \binom{n}{k} p^k\, (1-p)^{n-k} && \textit{(d'après les questions } \textbf{4.a)} \textit{ et } \textbf{5.a)}\textit{)} \\
&= \alpha\, p^k \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (1-\alpha)^n\, (1-p)^{n-k} \\
&= \alpha\, (1-\alpha)^k\, p^k \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \big((1-\alpha)\,(1-p)\big)^{n-k} \\
&= \alpha\, (1-\alpha)^k\, p^k\, \frac{1}{\big(1-(1-\alpha)\,(1-p)\big)^{k+1}} && \textit{(d'après } \textbf{3.d)} \textit{ avec } r = k \textit{ et } x = (1-\alpha)\,(1-p)\textit{)} \\
&= \alpha\, (1-\alpha)^k\, p^k\, \frac{1}{\big(\cancel{1} - (\cancel{1} - p - \alpha + \alpha\, p)\big)^{k+1}} \\
&= \frac{\alpha}{p+\alpha-\alpha\, p}\, \frac{(1-\alpha)^k\, p^k}{(p+\alpha-\alpha\, p)^k} = \frac{\alpha}{p+\alpha-\alpha\, p} \left(\frac{(1-\alpha)\, p}{p+\alpha-\alpha\, p}\right)^k
\end{aligned}$$

- Enfin, on remarque :

$$\frac{(1-\alpha)\,p}{p+\alpha-\alpha\,p} \;=\; \frac{p-\alpha\,p}{p+\alpha-\alpha\,p} \;=\; \frac{(p+\alpha-\alpha\,p)-\alpha}{p+\alpha-\alpha\,p} \;=\; 1-\frac{\alpha}{p+\alpha-\alpha\,p}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall k\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([Y=k]\big)=\frac{\alpha}{p+\alpha-\alpha\,p}\left(1-\frac{\alpha}{p+\alpha-\alpha\,p}\right)^k.}$$

**Commentaire**

- La démonstration est une illustration d'une méthode classique : connaissant la loi conditionnelle de $Y$ relativement à $[X=n]$ (*i.e.* l'application $\mathbb{P}_{[X=n]}\big([Y=\cdot]\big)$), on obtient la loi de $Y$ (*i.e.* l'application $\mathbb{P}\big([Y=\cdot]\big)$) par l'utilisation de la formule des probabilités totales. Cette méthode sera vue dans le chapitre « Couples de v.a.r. discrètes ».
- Cette méthode ne présente pas de difficulté conceptuelle : il s'agit simplement d'appliquer la formule des probabilités totales.
  En revanche, cette question soulève quelques difficultés techniques :
  - × le résultat des quesitons ***4.a)*** et ***5.a)*** doivent être connus pour traiter cette question.
  - × la valeur de $\mathbb{P}_{[X=n]}\big([Y=k]\big)$ dépend de la situation de $k$ par rapport à $n$. Plus précisément, il faut vérifier que la condition $k\leqslant n$ est respectée si l'on souhaite écrire : $\mathbb{P}_{[X=n]}\big([Y=k]\big)=\binom{n}{k}p^k\,(1-p)^{n-k}$.
  - × on manipule plusieurs variables. La variable $n$ est muette (variable d'itération), la variable $k$ a elle été introduite en début de démonstration et est donc fixée une bonne fois pour toute. Il reste alors à manipuler correctement les variables $\alpha$ et $p$ qui sont des variables globales de l'énoncé.

  Il faut donc être particulièrement vigilant et faire preuve de rigueur pour éviter toute erreur de manipulation. Si de telles erreurs peuvent se produire, il est par contre interdit de ne pas connaître la manière de traiter une telle question : il suffit d'appliquer la méthode vue en cours.

□

***6.*** Calculer l'espérance de $Y$, puis montrer que $\mathbb{V}(Y)=\dfrac{p\,(1-\alpha)\,(p+\alpha-p\alpha)}{\alpha^2}$.

*Démonstration.*

- Par analogie avec la question ***4.b)***, on introduit la v.a.r. $Z=Y+1$. On a alors :
  - × $Z(\Omega)=\mathbb{N}^*$
  - × $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big([Y=k]\big)=\dfrac{\alpha}{p+\alpha-\alpha\,p}\left(1-\dfrac{\alpha}{p+\alpha-\alpha\,p}\right)^{k-1}$

$$\boxed{\text{On en déduit : } Z\hookrightarrow\mathcal{G}\left(\frac{\alpha}{p+\alpha-\alpha\,p}\right).}$$

- La v.a.r. $Z$ admet une espérance et une variance car elle suit une loi usuelle.
  Comme $Y=Z-1$, la v.a.r. $Y$ admet une espérance et une variance comme transformée affine d'une v.a.r. qui admet une espérance et une variance. De plus :

$$\mathbb{E}(Y) \;=\; \mathbb{E}(Z-1) \;=\; \mathbb{E}(Z)-1 \;=\; \frac{1}{\frac{\alpha}{p+\alpha-\alpha\,p}}-1 \;=\; \frac{p+\alpha-\alpha\,p}{\alpha}-1$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y)=\frac{p-\alpha\,p}{\alpha}=\frac{1-\alpha}{\alpha}\,p}$$

Et :

$$\mathbb{V}(Y) \;=\; \mathbb{V}(Z-1) \;=\; \mathbb{V}(Z) \;=\; \dfrac{1-\frac{\alpha}{p+\alpha-\alpha\,p}}{\left(\frac{\alpha}{p+\alpha-\alpha\,p}\right)^2} \;=\; \left(\dfrac{p+\alpha-\alpha\,p}{\alpha}\right)^2 \dfrac{p-\alpha\,p}{p+\alpha-\alpha\,p}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{V}(Y) = \dfrac{p\,(1-\alpha)\,(p+\alpha-p\alpha)}{\alpha^2}.}$$

$\square$

***7. a)*** Exprimer $G$ en fonction de $X$ et $Y$.

*Démonstration.*
D'après l'énoncé, le joueur :

× gagne un euro à chaque manche gagnée.

× perd un euro à chaque manche perdue.

Or le nombre de manches gagnées est donné par la v.a.r. $Y$.
Le nombre de manches jouées étant donné par la v.a.r. $X$, le nombre de manches perdues est donné par : $Y - X$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } G = 1\cdot Y - 1\cdot(X-Y) = 2Y - X.}$$

$\square$

***b)*** En déduire l'espérance de $G$.

*Démonstration.*

- La v.a.r. $G$ admet une espérance car est la combinaison linéaire de v.a.r. qui admettent une espérance.
- De plus :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(G) & = & \mathbb{E}(2Y-X) & \\ & = & 2\,\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ & = & 2\,\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\,p - \dfrac{1-\alpha}{\alpha} & \\ & = & \dfrac{1-\alpha}{\alpha}\,(2p-1) & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(G) \;=\; \dfrac{1-\alpha}{\alpha}\,(2p-1)}$$

$\square$

***8. a)*** On rappelle que :

× l'appel `grand(m,N,'geom',p)` permet de simuler $m$ échantillons de $N$ v.a.r. indépendantes suivant toutes la même loi géométrique de paramètre $p$.

× l'appel `grand(m,N,'bin',n,p)` permet de simuler $m$ échantillons de $N$ v.a.r. indépendantes suivant toutes la même loi binomiale de paramètre $(n, p)$.

Compléter les commandes **Scilab** suivantes pour qu'elles simulent l'expérience aléatoire étudiée et affichent les valeurs prises par $X$ et $Y$.

```
alpha = input('entrer la valeur de alpha : ')
p = input('entrer la valeur de p : ')
X = ----
Y = ----
disp(X)
disp(Y)
```

*Démonstration.*

- Rappelons tout d'abord : $X = T - 1$ avec $T \hookrightarrow \mathcal{G}(\alpha)$.
  Ainsi, la v.a.r. $X$ est simulée à l'aide de l'appel suivant :

```
X = grand(1, 1, 'geom', alpha) - 1
```

- On a démontré dans la question ***5.a)*** que la loi conditionnelle de $Y$ relativement à l'événement $[X = n]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
  Ainsi, la v.a.r. $Y$ est simulée à l'aide de l'appel suivant :

```
Y = grand(1, 1, 'bin', X, p)
```

□

***b)*** Quelles commandes faut-il ajouter aux précédentes pour calculer et afficher la valeur prise par $G$ ?

*Démonstration.*
Par définition : $G = 2Y - X$.
Ainsi, pour simuler la v.a.r. $G$ et afficher son contenu, il suffit d'ajouter :

```
G = 2 * Y - X
disp(G)
```

□

# Exercice 4

On appelle *durée de vie* d'un composant électronique la durée de fonctionnement de ce composant jusqu'à sa première panne éventuelle. On considère un composant électronique dont la durée de vie est modélisée par une variable aléatoire $T$ définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Si $F$ est la fonction de répartition de cette variable aléatoire, on appelle *loi de survie* du composant la fonction $D$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ D(t) = 1 - F(t) = 1 - \mathbb{P}([T \leqslant t]) = \mathbb{P}([T > t])$$

Le problème se compose de deux parties pouvant être traitées indépendamment.

## Partie 1 : Cas discret

On suppose dans cette partie que $T$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ qui vérifie, pour tout entier naturel $n$, $D(n) \neq 0$.

***1.*** **Coefficient d'avarie.**

Le composant est mis en service à l'instant 0. Pour tout entier naturel $n$ non nul, on appelle coefficient d'avarie à l'instant $n$ du composant, la probabilité qu'il tombe en panne à l'instant $n$, sachant qu'il fonctionne encore à l'instant $n-1$, c'est-à-dire le nombre $\pi_n$ défini par l'égalité :

$$\pi_n = \mathbb{P}_{[T>n-1]}([T = n])$$

***a)*** Exprimer, pour tout entier naturel non nul $n$, la probabilité $\mathbb{P}([T = n])$ à l'aide de la fonction $D$. En déduire l'égalité :

$$\pi_n = \frac{D(n-1) - D(n)}{D(n-1)}$$

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Remarquons tout d'abord que, comme $T$ est à valeurs entières :

$$[T > n-1] = [T = n] \cup [T > n]$$

Les événements $[T = n]$ et $[T > n]$ sont incompatibles. On en déduit :

$$\mathbb{P}([T > n-1]) = \mathbb{P}([T = n]) + \mathbb{P}([T > n])$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}([T = n]) = \mathbb{P}([T > n-1]) - \mathbb{P}([T > n]) = D(n-1) - D(n).}$$

- De plus :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{[T>n-1]}\big([T = n]\big) &= \frac{\mathbb{P}\big([T > n-1] \cap [T = n]\big)}{\mathbb{P}\big([T > n-1]\big)} \\ &= \frac{\mathbb{P}\big([T = n]\big)}{\mathbb{P}\big([T > n-1]\big)} \qquad \textit{(car } [T = n] \subset [T > n-1]\textit{)} \\ &= \frac{D(n-1) - D(n)}{D(n-1)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\pi_n = \frac{D(n-1) - D(n)}{D(n-1)}}$$

□

***b)*** On suppose que $p$ est un réel de l'intervalle $]0,1[$ et que $T$ suit la loi géométrique de paramètre $p$.

***(i)*** Quelle est l'espérance de la variable aléatoire $T$ ?

*Démonstration.*

| |
|---|
| Comme $T$ sui la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, la v.a.r. $T$ admet une espérance. De plus : $\mathbb{E}(T) = \dfrac{1}{p}$. |

□

***(ii)*** Calculer, pour tout entier naturel $n$, $D(n)$ en fonction de $n$.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- On remarque tout d'abord :

$$\mathbb{P}([T > n]) \ = \ 1 - \mathbb{P}\Big(\overline{[T > n]}\Big) \ = \ 1 - \mathbb{P}([T \leqslant n])$$

- Par ailleurs, comme $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$ :

$$[T \leqslant n] \ = \ \bigcup_{i=1}^{n} \ [T = i]$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([T \leqslant n]) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \ [T = i]\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([T = i]) && \textit{(car } ([T = i])_{i \in [\![1,n]\!]} \textit{ est une famille d'événements 2 à 2 incompatibles)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} p\ (1-p)^{i-1} && \textit{(car } T \hookrightarrow \mathcal{G}(p)\textit{)} \\
&= p \sum_{i=0}^{n-1} (1-p)^{i} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= p\ \frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} && \textit{(en reconnaissant une somme géométrique de raison } 1-p \neq 1\textit{)} \\
&= \cancel{p}\ \frac{1-(1-p)^n}{\cancel{p}} \\
&= 1-(1-p)^n
\end{aligned}$$

Enfin : $\mathbb{P}([T > n]) \ = \ 1 - \mathbb{P}([T \leqslant n]) \ = \ \cancel{1} - (\cancel{1} - (1-p)^n) \ = \ (1-p)^n$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N},\ D(n) = \mathbb{P}([T > n]) \ = \ (1-p)^n.}$$

□

**Commentaire**

- Cette démonstration est un très grand classique des concours.
  Il est primordial de connaître et de savoir démontrer ce résultat :

$$\boxed{T \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \ \Rightarrow \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \mathbb{P}\big([T > n]\big) = (1-p)^n}$$

- On peut rédiger légèrement différemment. On commence par écrire, comme $T$ est à valeurs entières :

$$[T > n] \ = \ \bigcup_{i=n+1}^{+\infty} [T = i]$$

  On en déduit :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([T > n]) & = & \mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcup_{i=n+1}^{+\infty} [T = i]\right) & \\
& = & \displaystyle\sum_{i=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}([T = i]) & \textit{(car } ([T = i])_{i \in [\![1,n]\!]} \textit{ est une famille d'événements 2 à 2 incompatibles)} \\
& = & \displaystyle\sum_{i=n+1}^{+\infty} p\,(1-p)^{i-1} & \textit{(car } T \hookrightarrow \mathcal{G}(p)\textit{)} \\
& = & p \displaystyle\sum_{i=n}^{+\infty} (1-p)^i & \textit{(par décalage d'indice)} \\
& = & p \left(\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} (1-p)^i - \sum_{i=0}^{n-1} (1-p)^i\right) & \\
& = & p \left(\dfrac{1}{1-(1-p)} - \dfrac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)}\right) & \textit{(en reconnaissant des sommes géométriques de raison } 1-p \neq 1\textit{)} \\
& = & p\, \dfrac{(1-p)^n}{1-(1-p)} & \\
& = & \cancel{p}\, \dfrac{(1-p)^n}{\cancel{p}} \ = \ (1-p)^n &
\end{array}$$

- Il existe une démonstration encore plus simple. Pour ce faire, on considère une expérience aléatoire consistant à effectuer des lancers successifs d'une pièce donnant Pile avec probabilité $p \in \,]0,1[$.
  On considère $T$ la v.a.r. qui donne le rang d'apparition du premier Pile. Alors $T \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
  Enfin, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note $P_i$ : « obtenir Pile au $i^{\text{ème}}$ lancer ».
  On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$[T > n] \ = \ \overline{P_1} \ \cap \ \dots \ \cap \ \overline{P_n}$$

  Et ainsi :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\big([T > n]\big) & = & \mathbb{P}\big(\overline{P_1} \ \cap \ \dots \ \cap \ \overline{P_n}\big) & \\
& = & \mathbb{P}\Big(\overline{P_1}\Big) \ \times \ \dots \ \times \ \mathbb{P}\Big(\overline{P_n}\Big) & \textit{(par indépendance des lancers)} \\
& = & (1-p) \times \dots \times (1-p) = (1-p)^n &
\end{array}$$

***(iii)*** En déduire, pour tout entier naturel $n$ non nul, l'égalité : $\pi_n = p$.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll} \pi_n & = & \dfrac{D(n-1) - D(n)}{D(n-1)} & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{1.a)}}\textit{)} \\ & = & \dfrac{(1-p)^{n-1} - (1-p)^n}{(1-p)^{n-1}} & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{1.b)(ii)}}\textit{)} \\ & = & \cancel{(1-p)^{n-1}} \dfrac{1-(1-p)}{\cancel{(1-p)^{n-1}}} & \\ & = & p & \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \pi_n = p.}$$

□

**Commentaire**

Dans cet exercice, on considère $T$ une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

- Dans la question ***1.***, on a démontré :

$$\boxed{T \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \ \Rightarrow\ \forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}_{[T>n-1]}\big([T = n]\big) = p}$$

  On aurait pu établir de la même façon :

$$\boxed{T \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \ \Rightarrow\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}_{[T>n-1]}\big([T > m+n]\big) = p^m = \mathbb{P}\big([T > m]\big)}$$

  Cette propriété signifie que la durée de vie restante du composant est indépendante de sa durée de vie écoulée jusqu'alors (période durant laquelle il a fonctionné sans tomber en panne). Autrement dit, il n'y a pas de vieillissement ou encore d'usure du composant électronique considéré. On dit alors que la loi géométrique est **sans mémoire**. Cette propriété est adaptée à la simulation de phénomène sans vieillissement. Cette hypothèse peut paraître surprenante. C'est un cas assez fréquent en réalité : on peut considérer que les diodes, transistors, résistances, condensateurs sont sans usure puisque leur usure ne débute que bien après la fin de vie de l'objet dans lequel ils sont installés.

- Finalement, on a démontré en ***1.b)*** que la loi géométrique est sans mémoire. Le but de la question ***1.c)*** est de démontrer que la seule loi discrète sans mémoire est la loi géométrique. Autrement dit, d'établir la réciproque de la question précédente :

$$\boxed{T \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \ \Leftarrow\ \forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}_{[T>n-1]}\big([T > n]\big) = p}$$

***c)*** Réciproquement, on suppose dans cette question qu'il existe un réel strictement positif $\alpha$ tel que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \pi_n = \alpha$.

***(i)*** Établir, pour tout entier naturel non nul $n$, l'égalité : $D(n) = (1-\alpha)\ D(n-1)$.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question ***1.a)*** :

$$\pi_n \ = \ \frac{D(n-1) - D(n)}{D(n-1)}$$

Comme $\pi_n = \alpha$, on en déduit : $\alpha D(n-1) = D(n-1) - D(n)$.

$$\boxed{\text{Et en réordonnant, on a bien : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (1-\alpha)\ D(n-1) = D(n).}$$

**Commentaire**

On peut aussi démontrer cette égalité sans avoir le résultat de la question ***1.a)***.
On propose ci-dessous la démonstration qui peut être utile si l'exercice est présenté dans un ordre différent.

$$\begin{array}{rcll}
1-\alpha & = & 1 - \pi_n & \textit{(d'après l'hypothèse de l'énoncé)} \\[2mm]
& = & 1 - \mathbb{P}_{[T>n-1]}\big([T=n]\big) & \\[2mm]
& = & \mathbb{P}_{[T>n-1]}\Big(\overline{[T=n]}\Big) & \\[2mm]
& = & \mathbb{P}_{[T>n-1]}\big([T<n] \cup [T>n]\big) & \textit{(car } T \textit{ est à valeurs entières)} \\[2mm]
& = & \mathbb{P}_{[T>n-1]}\big([T<n]\big) + \mathbb{P}_{[T>n-1]}\big([T>n]\big) & \textit{(car } [T<n] \textit{ et } [T>n] \textit{ sont incompatibles)} \\[2mm]
& = & \mathbb{P}_{[T>n-1]}\big([T>n]\big) & \textit{(car si } [T>n-1] \textit{ est réalisé, alors } [T<n] \textit{ ne l'est pas)} \\[2mm]
& = & \dfrac{\mathbb{P}\big([T>n-1] \cap [T>n]\big)}{\mathbb{P}([T>n-1])} & \textit{(avec } \mathbb{P}([T>n-1]) \neq 0 \textit{ d'après l'énoncé)} \\[2mm]
& = & \dfrac{\mathbb{P}\big([T>n]\big)}{\mathbb{P}([T>n-1])} & \textit{(car } [T>n] \subset [T>n-1]\textit{)} \\[2mm]
& = & \dfrac{D(n)}{D(n-1)} &
\end{array}$$

□

***(ii)*** En déduire que $T$ suit une loi géométrique et préciser son paramètre.

*Démonstration.*
Démontrons tout d'abord par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : D(n) = (1-\alpha)^n$.

- **Initialisation** :
  - D'une part : $D(0) = \mathbb{P}([T>0]) = 1$ car $T$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
  - D'autre part : $(1-\alpha)^0 = 1$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $D(n+1) = (1-\alpha)^{n+1}$).

$$\begin{array}{rcll} D(n+1) & = & (1-\alpha)\ D(n) & \textit{(d'après la question précédente avec } n+1 \in \mathbb{N}^*\textit{)} \\ & = & (1-\alpha)\ (1-\alpha)^n & \\ & = & (1-\alpha)^{n+1} & \end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ D(n) = (1-\alpha)^n.}$$

Démontrons maintenant que $T$ suit une loi géométrique.

- Par hypothèse, $T$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

$$\boxed{\text{Autrement dit : } T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*.}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  On a démontré en question ***1.a)*** :

$$\mathbb{P}_{[T>n-1]}\big([T=n]\big) = \frac{\mathbb{P}\big([T=n]\big)}{\mathbb{P}\big([T>n-1]\big)}$$

  On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big([T=n]\big) & = & \mathbb{P}\big([T>n-1]\big)\ \mathbb{P}_{[T>n-1]}\big([T=n]\big) & \\ & = & D(n-1) \times \alpha & \\ & = & (1-\alpha)^{n-1}\ \alpha & \textit{(d'après le résultat précédent avec } n-1 \in \mathbb{N}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } T \hookrightarrow \mathcal{G}(\alpha).}$$

□

*2.* **Nombre de pannes successives dans le cas d'une loi géométrique.**

Un premier composant est mis en service à l'instant 0 et, quand il tombe en panne, est remplacé instantanément par un composant identique qui sera remplacé à son tour à l'instant de sa première panne dans les mêmes conditions, et ainsi de suite.

On suppose à nouveau, dans cette partie, que $p$ est un réel de l'intervalle $]0, 1[$ et que $T$ suit la loi géométrique de paramètre $p$ et que, pour tout entier strictement positif $i$, la durée de vie du $i^{\text{ème}}$ composant est une variable aléatoire $T_i$ définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, de même loi que $T$.

Les variables aléatoires $T_i$ sont supposées mutuellement indépendantes et, pour tout entier naturel $k$ non nul, on pose : $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} T_i$.

($S_k$ désigne donc l'instant où se produit la $k^{\text{ème}}$ panne et le $k^{\text{ème}}$ remplacement)

***a)*** Soit $m$ un entier naturel.
Démontrer par récurrence sur $n$, pour tout entier naturel $n$ vérifiant $n \geqslant m$, l'égalité :

$$\sum_{j=m}^{n} \binom{j}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

*Démonstration.*
Démontrons par récurrence : $\forall n \geqslant m$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$ : $\sum\limits_{j=m}^{n} \binom{j}{m} = \binom{n+1}{m+1}$.

▶ **Initialisation** :

- D'une part : $\sum\limits_{j=m}^{m} \binom{j}{m} = \binom{m}{m} = 1$.
- D'autre part : $\binom{m+1}{m+1} = 1$.

D'où $\mathcal{P}(m)$.

▶ **Hérédité** : soit $n \geqslant m$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\sum\limits_{j=m}^{n+1} \binom{j}{m} = \binom{n+2}{m+1}$).

$$\begin{aligned} \sum_{j=m}^{n+1} \binom{j}{m} &= \left(\sum_{j=m}^{n} \binom{j}{m}\right) + \binom{n+1}{m} \\ &= \binom{n+1}{m+1} + \binom{n+1}{m} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \binom{n+2}{m+1} && \textit{(d'après la formule du triangle de Pascal)} \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \geqslant m,\ \mathcal{P}(n).}$$

□

***b) (i)*** Déterminer la loi de la variable aléatoire $S_2$ égale à $T_1 + T_2$.

*Démonstration.*

- Rappelons tout d'abord : $T_1(\Omega) = T_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } (T_1 + T_2)(\Omega) \subset [\![2, +\infty[\![.}$$

- La famille $\big([T_1 = j]\big)_{j \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.
  Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}\big([T_1 + T_2 = n]\big) & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([T_1 = j] \ \cap \ [T_1 + T_2 = n]\big) \\
& = & \displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([T_1 = j] \ \cap \ [j + T_2 = n]\big) \\
& = & \displaystyle\sum_{\substack{j = 1 \\ n-j \in T_2(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}\big([T_1 = j] \cap [T_2 = n-j]\big) \\
& & + \cancel{\displaystyle\sum_{\substack{j = 1 \\ n-j \notin T_2(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}\big([T_1 = j] \cap [T_2 = n-j]\big)} \qquad \textit{(car } [T_2 = n-j] = \varnothing \textit{ si } n-j \notin T_2(\Omega)\textit{)} \\
& = & \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}\big([T_1 = j] \cap [T_2 = n-j]\big)
\end{array}$$

- La dernière ligne est obtenue en constatant :

$$\left\{\begin{array}{l} n - j \in T_2(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ j \in [\![1, +\infty[\![ \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 \leqslant n - j \\ 1 \leqslant j \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} j \leqslant n - 1 \\ 1 \leqslant j \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\ 1 \leqslant j \leqslant n - 1\right.$$

- Ainsi, en reprenant les égalités précédentes :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([T_1 + T_2 = n]) & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}\big([T_1 = j] \cap [T_2 = n-j]\big) & \\
& = & \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}\big([T_1 = j]\big) \times \mathbb{P}\big([T_2 = n-j]\big) & \textit{(car les v.a.r. } T_1 \textit{ et } T_2 \textit{ sont indépendantes)} \\
& = & \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} p\,(1-p)^{j-1} \times p\,(1-p)^{n-j-1} & \textit{(car } T_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \textit{ et } T_2 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)\textit{)} \\
& = & \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} p^2\,(1-p)^{n-2} \ = \ (n-1)\,p^2\,(1-p)^{n-2} &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \forall n \geqslant 2,\ \mathbb{P}\big([T_1 + T_2 = n]\big) = (n-1)\,p^2\,(1-p)^{n-2}.}$$

**Commentaire**

- Il est fréquent, lors de l'étape de restriction des indices de la somme de tomber sur une contrainte s'exprimant par deux inégalités :

$$a \leqslant i \leqslant b \ \texttt{ET} \ c \leqslant i \leqslant d \quad \text{où } (a,b,c,d) \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^4$$

où $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On pourra alors utiliser le résultat suivant :

$$\boxed{(a \leqslant i \leqslant b \ \texttt{ET} \ c \leqslant i \leqslant d) \quad \Leftrightarrow \quad \max(a,c) \leqslant i \leqslant \min(b,d)}$$

*(à gauche c'est le plus grand élément qui contraint le plus, à droite c'est le plus petit élément qui contraint le plus)*

- On peut illustrer ce propos par une présentation légèrement différente de la question précédente :

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{l} n-j \in T_2(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ j \in [\![1, +\infty[\![ \end{array}\right. \quad & \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 1 \leqslant n-j < +\infty \\ 1 \leqslant j < +\infty \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 1-n \leqslant -j < +\infty \\ 1 \leqslant j < +\infty \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} -\infty < j \leqslant n-1 \\ 1 \leqslant j < +\infty \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ 1 \leqslant j \leqslant n-1 \right.
\end{aligned}$$

□

***(ii)*** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul $k$, la loi de $S_k$ est donnée par :

$$\forall n \geqslant k, \ \mathbb{P}([S_k = n]) = \binom{n-1}{k-1} \, p^k (1-p)^{n-k}$$

*Démonstration.*
Démontrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(k)$
où $\mathcal{P}(k)$ : $\forall n \geqslant k, \ \mathbb{P}([S_k = n]) = \binom{n-1}{k-1} \, p^k (1-p)^{n-k}$.

▸ **Initialisation** :

Soit $n \geqslant 1$.

- D'une part : $\mathbb{P}([S_1 = n]) = \mathbb{P}([T_1 = n]) = (1-p)^{n-1} \, p$.
- D'autre part : $\binom{n-1}{1-1} \, p^1 \, (1-p)^{n-1} = \binom{n-1}{0} \, p \, (1-p)^{n-1} = p \, (1-p)^{n-1}$

D'où $\mathcal{P}(1)$.

**Commentaire**

- Dans la propriété $\mathcal{P}(k)$, la variable $n$ apparaît sous la portée d'un quantificateur universel (symbole $\forall$). Ainsi, la variable $n$ est une variable **muette** (on parle aussi de variable **liée**) dans cette propriété. Cela signifie qu'on peut renommer la variable $n$ sans que cela ne change le sens de la proposition mathématique. Ainsi, les propositions :
$$\forall n \geqslant k,\ \mathbb{P}([S_k = n]) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$
$$\text{et} \quad \forall m \geqslant k,\ \mathbb{P}([S_k = m]) = \binom{m-1}{k-1} p^k (1-p)^{m-k}$$
ont même sens et désignent toutes deux $\mathcal{P}(k)$ (qui ne dépend que de la variable $k$).
- Vérifier si la propriété est vérifiée au rang 1 c'est vérifier :
$$\mathcal{P}(1) : \ \forall n \geqslant 1,\ \mathbb{P}([S_1 = n]) = \binom{n-1}{0} p\,(1-p)^{n-1}$$
Cette propriété est quantifiée universellement.
Cela explique que la démonstration de l'hérédité commence par « Soit $n \geqslant 1$ ».
- Il est important de bien comprendre les différences entre ces deux niveaux de variables. La structure de démonstration de la récurrence doit aider à ne pas mélanger les variables liées (muettes) et libres.

▸ **Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Supposons $\mathcal{P}(k)$ et démontrons $\mathcal{P}(k+1)$

$\left(i.e.\ \forall n \geqslant k+1,\ \mathbb{P}([S_{k+1} = n]) = \binom{n-1}{k} p^{k+1}\,(1-p)^{n-(k+1)}\right)$.

Soit $n \geqslant k+1$.
La famille $\big([T_{k+1} = j]\big)_{j \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([S_{k+1} = n]\big) &= \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([T_{k+1} = j] \cap [S_{k+1} = n]\big) \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([T_{k+1} = j] \cap [S_k + T_{k+1} = n]\big) \qquad \left(S_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} T_i = S_k + T_{k+1}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([T_{k+1} = j] \cap [S_k + j = n]\big) \\
&= \sum_{\substack{j=1 \\ n-j \in S_k(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}\big([T_{k+1} = j] \cap [S_k = n-j]\big) \\
&\quad + \cancel{\sum_{\substack{j=1 \\ n-j \notin S_k(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}\big([T_{k+1} = j] \cap [S_k = n-j]\big)} \qquad \left(\text{car } [S_k = n-j] = \varnothing \text{ si } n-j \notin S_k(\Omega)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n-k} \mathbb{P}\big([T_{k+1} = j] \cap [S_k = n-j]\big)
\end{aligned}$$

La dernière ligne est obtenue en constatant :

$$\left\{\begin{array}{l} n-j \in S_k(\Omega) = [\![k,+\infty[\![ \\ j \in [\![1,+\infty[\![ \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} k \leqslant n-j \\ 1 \leqslant j \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} j \leqslant n-k \\ 1 \leqslant j \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\ 1 \leqslant j \leqslant n-k \right.$$

Ainsi, en reprenant les égalités précédentes :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([S_{k+1}=n]) & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{n-k} \mathbb{P}\big([T_{k+1}=j] \cap [S_k=n-j]\big) & \\
& = & \displaystyle\sum_{j=1}^{n-k} \mathbb{P}\big([T_{k+1}=j]\big) \times \mathbb{P}\big([S_k=n-j]\big) & \textit{(car les v.a.r. } T_{k+1} \textit{ et } S_k \textit{ sont indépendantes d'après le lemme des coalitions)} \\
& = & \displaystyle\sum_{j=1}^{n-k} p\,(1-p)^{j-1} \times \binom{n-j-1}{k-1} p^k\,(1-p)^{n-j-k} & \textit{(car } T_{k+1} \hookrightarrow \mathcal{G}\,(p) \textit{ et par hypothèse de récurrence)} \\
& = & \displaystyle\sum_{j=1}^{n-k} p^{k+1}\,(1-p)^{n-k-1} \times \binom{n-j-1}{k-1} & \\
& = & p^{k+1}\,(1-p)^{n-k-1} \displaystyle\sum_{j=1}^{n-k} \binom{n-j-1}{k-1} & \\
& = & p^{k+1}\,(1-p)^{n-k-1} \displaystyle\sum_{\ell=k-1}^{n-2} \binom{\ell}{k-1} & \textit{(avec le décalage d'indice } \ell = n-j-1\textit{)} \\
& = & p^{k+1}\,(1-p)^{n-k-1} \dbinom{(n-2)+1}{(k-1)+1} & \textit{(d'après la question \textbf{2.a)} avec } j \leftarrow \ell,\ m \leftarrow k-1 \textit{ et } n \leftarrow n-2\textit{)} \\
& = & p^{k+1}\,(1-p)^{n-k-1} \dbinom{n-1}{k} &
\end{array}$$

Il est à noter que le résultat de la question ***2.a)*** peut être utilisé car : $n-2 \geqslant k-1$, inégalité elle même vérifiée car $n-k \geqslant 1$.
D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(k).}$$

**Commentaire**

Détaillons ici l'utilisation de l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(k)$. Rappelons :

$$\mathcal{P}(k) : \forall m \geqslant k,\ \mathbb{P}([S_k=m]) = \binom{m-1}{k-1} p^k(1-p)^{m-k}$$

*(on a renommé ici $m$ la variable muette $n$)*
On cherche dans la démonstration la valeur de $\mathbb{P}\big([S_k=n-j]\big)$.
Pour ce faire, il faut appliquer la propriété précédente pour $m=n-j$.
Afin d'être dans le cadre d'application de cette propriété, il faut alors vérifier :

$$n-j \geqslant k$$

ce qui est bien le cas (*cf* discussion menant à la restriction des indices de la somme).