DS4 (version A) /193

Exercice 1 /31

Le but de cet exercice est la résolution de l'équation matricielle $AM = MB$, d'inconnue M, dans l'espace vectoriel E des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.
On rappelle que si U_1, U_2, U_3, U_4 sont les matrices définies par :

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad U_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la famille (U_1, U_2, U_3, U_4) est une base de E, qui est donc de dimension 4. Si A et B sont deux matrices de E, l'ensemble des matrices M de E vérifiant $AM = MB$ est noté $V_{A,B}$.

1. Soit A et B deux matrices de E et $\varphi_{A,B}$ l'application qui, à toute matrice M de E, associe la matrice $AM - MB$.

a) Montrer que $\varphi_{A,B}$ est un endomorphisme de E et en déduire que $V_{A,B}$ est un sous-espace vectoriel de E.

- **1 pt : caractère endo**
- **2 pts :** $\varphi_{A,B}$ **linéaire**
- **2 pts :** $V_{A,B} = \mathrm{Ker}(\varphi_{A,B})$
  On donne 2 pts aussi pour la démonstration $V_{A,B}$ est un sev de E (1 pt pour partie non vide, 1 pt pour stabilité par CL)

b) Dans le cas particulier où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, construire la matrice carrée d'ordre 4 qui représente $\varphi_{A,B}$ dans la base (U_1, U_2, U_3, U_4).
Montrer que cette matrice est inversible et en déduire l'ensemble $V_{A,B}$.

- **1 pt :** $\mathrm{Mat}_{(U_1,U_2,U_3,U_4)}\Big(\varphi_{A,B}(U_1)\Big) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- **1 pt** $\mathrm{Mat}_{(U_1,U_2,U_3,U_4)}\Big(\varphi_{A,B}(U_2)\Big) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $\mathrm{Mat}_{(U_1,U_2,U_3,U_4)}\Big(\varphi_{A,B}(U_3)\Big) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $\mathrm{Mat}_{U_1,U_2,U_3,U_4}\Big(\varphi_{A,B}(U_4)\Big) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- **2 pts :** $\mathrm{rg}(C) = 4$
- **1 pt :** C **inversible**
- **1 pt :** $\varphi_{A,B}$ **isomorphisme, donc injective**
- **1 pt :** $V_{A,B} = \mathrm{Ker}(\varphi_{A,B}) = \{0\}$

2. Dans cette question, r et s désignent deux réels distincts et différents de 1, et on pose :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

a) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de E.
Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur x, y, z, t pour que M appartienne à $V_{D,\Delta}$.

- 1 pt : écriture système $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x \\ y & = & sy \\ rz & = & z \\ rt & = & st \end{array} \right.$

- 2 pts : résolution $y = z = t = 0$ **(dont 1 pt pour** $r \neq 1$ **et** $s \neq 1$ **et** $r \neq s$**)**

b) En déduire une base de $V_{D,\Delta}$.

- 2 pts : $V_{D,\Delta} = \text{Vect}\,(U_1)$ **avec** $U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ **(0 si confusion d'objets)**

- 1 pt : la famille (U_1) **est génératrice de** $V_{D,\Delta}$

- 1 pt : la famille (U_1) **est libre car constituée uniquement d'un vecteur non libre**

3. Soit a, b, c, d des réels non nuls vérifiant $a - b \neq c - d$, $a - b \neq 1$, $c - d \neq 1$, A et B les matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} c & 1-c \\ d & 1-d \end{pmatrix}$$

On admet qu'il existe :

× une matrice inversible P de E telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$.

× une matrice inversible Q de E telle que $B = Q\Delta Q^{-1}$ où $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c-d \end{pmatrix}$.

Pour toute matrice M de E, montrer qu'elle appartient à $V_{A,B}$ si et seulement si la matrice $P^{-1}MQ$ appartient à $V_{D,\Delta}$. En déduire une base de $V_{A,B}$.

- 1 pt : $AM = MB \Leftrightarrow PDP^{-1}M = MQ\Delta Q^{-1} \Leftrightarrow \cancel{P^{-1}}(\cancel{P}DP^{-1}M)Q \;=\; P^{-1}(MQ\Delta \cancel{Q^{-1}})\cancel{Q}$

- 1 pt : $\ldots \Leftrightarrow D(P^{-1}MQ) - (P^{-1}MQ)\Delta = 0 \Leftrightarrow P^{-1}MQ \in V_{D,\Delta}$

- 1 pt : $\ldots \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R},\ P^{-1}MQ \;=\; \alpha \cdot U_1$

- 1 pt : $\ldots \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R},\ M \;=\; \alpha \cdot PU_1Q^{-1} \Leftrightarrow M \in \text{Vect}\left(PU_1Q^{-1}\right)$

- 1 pt : la famille (PU_1Q^{-1}) **génératrice de** $V_{A,B}$

- 1 pt : la famille (PU_1Q^{-1}) **est libre car** $PU_1Q^{-1} \neq 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$

4. Dans cette question r, s et u, v désignent quatre réels vérifiant $r \neq s$, $r \neq v$, $u \neq s$, $u \neq v$, et on pose :

$$D = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

Par une méthode analogue à celle de la question **??**, déterminer $V_{D,\Delta}$.

- 1 pt : écriture système $\left\{ \begin{array}{rcl} ux & = & vx \\ uy & = & sy \\ rz & = & vz \\ rt & = & st \end{array} \right.$

- 2 pts : résolution système $x = y = z = t = 0$ **car** $r \neq s$**,** $r \neq v$**,** $u \neq s$ **et** $u \neq v$

- 1 pt : $V_{D,\Delta} = \{0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\}$ **(0 si confusion d'objets)**

Exercice 2 /70

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, dans laquelle on effectue une succession de $(n+1)$ tirages d'une boule avec remise et l'on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent.
Ainsi, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la variables X_n prend ses valeurs dans $[\![2, n+1]\!]$.
Par exemple, si $n = 5$ et si les tirages amènent successivement les numéros 5, 3, 2, 2, 6, 3, alors $X_5 = 4$.
Pour tout k de $[\![1, n+1]\!]$, on note N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au $k^{\text{ème}}$ tirage.

Partie I : Étude du cas $n = 3$ /14

On suppose dans cette partie **uniquement** que $n = 3$.
L'urne contient donc les boules numérotées 1, 2, 3.

1. *a)* Exprimer l'évenement $[X_3 = 4]$ à l'aide d'événements faisant intervenir les variables N_1, N_2, N_3. En déduire $\mathbb{P}([X_3 = 4])$.

- **2 pts :** $[X_3 = 4] = [N_1 = 3] \cap [N_2 = 2] \cap [N_3 = 1]$
- **3 pts :** $\mathbb{P}\big([X_3 = 4]\big) = \dfrac{1}{27}$
  (1 pt pour indépendance des tirages, 1 pt pour $N_i \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,3]\!])$, 1 pt pour résultat)

b) Montrer que $\mathbb{P}([X_3 = 2]) = \dfrac{2}{3}$, et en déduire $\mathbb{P}([X_3 = 3])$.

- **2 pts :** $[X_3 = 2] = [N_1 = 1] \cup \Big([N_1 = 2] \cap [N_2 \geqslant 2]\Big) \cup \Big([N_1 = 3] \cap [N_2 = 3]\Big)$
- **2 pts :** $\mathbb{P}\big([X_3 = 2]\big) = \dfrac{2}{3}$ **(« de même » 1 pt : incompatibilité, 1 pt : indépendance)**
- **1 pt :** $\big([X_3 = i]\big)_{i=[\![2,4]\!]}$ **est un système complet d'événements**
  donc $\mathbb{P}\big([X_3 = 3]\big) = 1 - \mathbb{P}\big([X_3 = 2]\big) - \mathbb{P}\big([X_3 = 4]\big)$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([X_3 = 3]\big) = \dfrac{8}{27}$

2. Calculer l'espérance de X_3.

- **1 pt :** X_3 **admet une espérance car finie**
- **2 pts :** $\mathbb{E}(X_3) = \dfrac{64}{27}$ **(1 pt pour la formule, 1 pt pour le résultat)**

Partie II : Cas général /39

Dans toute cette partie, n est un entier fixé supérieur ou égal à 2.

3. Pour tout k de $[\![1, n+1]\!]$, reconnaître la loi de N_k et rappeler son espérance et sa variance.

- **2 pts :** $N_k \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$ **(1 pt pour décrire l'expérience / 1 pt pour décrire la v.a.r.)**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(N_k) = \dfrac{n+1}{2}$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(N_k) = \dfrac{n^2-1}{12}$

4. Calculer $\mathbb{P}([X_n = n+1])$.

- **2 pts :** $[X_n = n+1] = \bigcap\limits_{i=1}^{n} [N_i = n+1-i]$ **(ou** $[X_n = n+1] = [N_1 = n] \cap \ldots \cap [N_n = 1]$**)**
- **2 pts :** $\mathbb{P}\big([X_n = n+1]\big) = \left(\dfrac{1}{n}\right)^n$ **(1 pt pour indépendance, 1 pt pour** $N_i \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$**)**

5. Montrer, pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$: $\mathbb{P}_{[N_1=i]}([X_n = 2]) = \dfrac{n-i+1}{n}$.

- **1 pt : si** $[N_1 = i]$ **est réalisé, c'est que ...**
- **1 pt : Dans ce cas,** $[X_n = 2]$ **est réalisé ssi ...**

6. En déduire une expression simple de $\mathbb{P}([X_n = 2])$.

- **1 pt :** $\big([N_1 = i]\big)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ **est un système complet d'événements**
- **1 pt : FPT** $\mathbb{P}\big([X_n = 2]\big) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big([N_1 = i] \cap [X_n = 2]\big)$
- **3 pts :** $\mathbb{P}\big([X_n = 2]\big) = \dfrac{n+1}{2}$
  - × **1 pt pour utilisation qst précédente**
  - × **1 pt pour changement d'indice** $j = n - i + 1$
  - × **1 pt pour fin calcul**

7. Soit $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Justifier l'égalité d'événements suivante : $[X_n > k] = [N_1 > N_2 > \ldots > N_k]$.
En déduire que $\mathbb{P}([X_n > k]) = \dfrac{1}{n^k} \dbinom{n}{k}$.
Vérifier que cette dernière égalité reste valable pour $k = 0$ et pour $k = 1$.

- **2 pts : justification** $[X_n > k] = [N_1 > N_2 > \ldots > N_k]$ **(suivant la rédaction)**
- **3 pts :** $\text{Card}([X_n > k]) = \dbinom{n}{k} n^{n+1-k}$ **et** $\text{Card}(\Omega) = n^{n+1}$
  - × **1 pt :** $\dbinom{n}{k}$ **est le nombre de parties à** k **éléments d'un ensemble à** n **éléments**
  - × **1 pt :** $\dbinom{n}{k}$ **est le nombre de séquence strictement croissante de** k **éléments**
  - × **1 pt :** $\mathbb{P}\big([X_n > k]\big) = \dfrac{\text{Card}\big([X_n > k]\big)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{\binom{n}{k}\ n^{n+1-k}}{n^{n+1}} = \dfrac{1}{n^k}\dbinom{n}{k}$
- **1 pt : formule vraie pour** $k = 0$
- **1 pt : formule vraie pour** $k = 1$

8. Exprimer, pour tout $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket, \mathbb{P}([X_n = k])$ à l'aide de $\mathbb{P}([X_n > k-1])$ et de $\mathbb{P}([X_n > k])$.

- **2 pts :** $[X_n > k-1] = [X_n = k] \cup [X_n > k]$ **(dont 1 pt pr** X_n **est à valeurs entières)**
- **1 pt :** $[X_n = k]$ **et** $[X_n > k]$ **incompatibles**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_n = k]) = \mathbb{P}([X_n > k-1]) - \mathbb{P}([X_n > k])$

9. En déduire : $\mathbb{E}(X_n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big(\,[X_n > k]\,\big)$. Calculer ensuite $\mathbb{E}(X_n)$.

- **1 pt : X_n admet une espérance car finie**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_n) = \sum\limits_{k=2}^{n+1} k\ \mathbb{P}([X_n = k])$
- **4 pts :** $\mathbb{E}(X_n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n > k])$
  - × **1 pt :** $\mathbb{E}(X_n) = \sum\limits_{k=2}^{n+1} k\Big(\mathbb{P}([X_n > k-1]) - \mathbb{P}([X_n > k])\Big) = \sum\limits_{k=2}^{n+1} k\,\mathbb{P}([X_n > k-1]) - \sum\limits_{k=2}^{n+1} k\,\mathbb{P}([X_n > k])$
  - × **1 pt :** $= \sum\limits_{k=1}^{n} (k+1)\ \mathbb{P}([X_n > k]) - \sum\limits_{k=2}^{n+1} k\,\mathbb{P}([X_n > k])$
    $= \sum\limits_{k=1}^{n} k\ \mathbb{P}([X_n > k]) + \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_n > k]) - \sum\limits_{k=2}^{n+1} k\ \mathbb{P}([X_n > k])$
  - × **1 pt :** $= 1 \times \mathbb{P}([X_n > 1]) + \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_n > k]) - (n+1)\ \mathbb{P}([X_n > n+1])$
  - × **1 pt :** $= 1 \times \mathbb{P}([X_n > 0]) + \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_n > k]) - \cancel{(n+1)\ \mathbb{P}([X_n > n+1])}$
- **2 pts :** $\mathbb{E}(X_n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n > k]) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{n^k}\dbinom{n}{k} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} 1^{n-k} \times \left(\dfrac{1}{n}\right)^k = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

10. Montrer : $\forall k \in [\![2, n+1]\!],\ \mathbb{P}([X_n = k]) = \dfrac{k-1}{n^k}\dbinom{n+1}{k}$.

- **1 pt : utilisation qst *8.*** $\mathbb{P}([X_n = k]) \ = \ \mathbb{P}([X_n > k-1]) - \mathbb{P}([X_n > k])$
- **1 pt : qst *7.*** $\mathbb{P}([X_n > k-1]) - \mathbb{P}([X_n > k]) = \dfrac{1}{n^{k-1}}\dbinom{n}{k-1} - \dfrac{1}{n^k}\dbinom{n}{k}$
- **1 pt : appliquer** $k\dbinom{m}{k} = m\dbinom{m-1}{k-1}$ **en** $m = n+1$
- **1 pt : triangle de Pascal** $\dbinom{n}{k-1} + \dbinom{n}{k} \ = \ \dbinom{n+1}{k}$
- **1 pt : cas** $k = n+1$

Partie III : Une convergence en loi /15

On s'intéresse dans cette partie à la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 2}$.

11. Soit k un entier fixé supérieur ou égal à 2. Montrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([X_n = k]) = \dfrac{k-1}{k!}$.

- **1 pt :** $(n+1)\,n\,(n-1)\ \ldots\ ((n+1)-(k-1)) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^k$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_n = k]) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{k-1}{k!}$
- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{k-1}{k!} = \dfrac{k-1}{k!}$

12. Montrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant 2} \dfrac{k-1}{k!}$ converge et calculer sa somme.

- **1 pt : travail sur la somme partielle d'ordre** N
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=2}^{N} \dfrac{k-1}{k!} = \sum\limits_{k=2}^{N} \dfrac{1}{(k-1)!} - \sum\limits_{k=2}^{N} \dfrac{1}{k!} = \sum\limits_{k=1}^{N-1} \dfrac{1}{k!} - \sum\limits_{k=2}^{N} \dfrac{1}{k!}$
- **1 pt :** $\ldots = \sum\limits_{k=0}^{N-1} \dfrac{1}{k!} - \sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{1}{k!} + 1$
- **1 pt : reconnaître les sommes partielles d'ordre $N-1$ et N de la série exponentielle de paramètre 1 qui est une série convergente**
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \dfrac{k-1}{k!} = \mathbf{e}^1 - \mathbf{e}^1 + 1$

On admet qu'il existe une variable aléatoire Z à valeurs dans $[\![2,+\infty[\![$ telle que :

$$\forall k \in [\![2,+\infty[\![,\ \mathbb{P}([Z=k]) = \frac{k-1}{k!}$$

13. Montrer que Z admet une espérance et la calculer. Comparer $\mathbb{E}(Z)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

- **1 pt :** Z **admet une espérance si et seulement si la série** $\sum\limits_{k\geqslant 2} k\mathbb{P}\big([Z=k]\big)$ **est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.**
- **2 pts :** $\sum\limits_{k=2}^{N} k\ \mathbb{P}\big([Z=k]\big) = \sum\limits_{k=0}^{N-2} \dfrac{1}{k!}$
  (1 pt pour somme partielle et 1 pt pour décalage d'indice)
- **1 pt :** $\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{k!} = \mathbf{e}^1$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_n) = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$
- **1 pt :** $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ \dfrac{1}{n} = 1$
- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbf{e}^1 = \mathbb{E}(Z)$ **(0 si suspicion de composition d'équivalents)**

Exercice 3 /54

Partie 1 /19

Dans cette partie, la lettre r désigne un entier naturel et x est un réel fixé de $]0,1[$.

1. Montrer que lorsque n est au voisinage de $+\infty$, on a : $\dbinom{n}{r} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^r}{r!}$.

- **1 pt :** $\dbinom{n}{r} = \dfrac{n\times(n-1)\times\ldots\times(n-(r-1))}{r!}$
- **1 pt : pour tout** $i\in[\![0,r-1]\!]$ **:** $n-i \underset{n\to+\infty}{\sim} n$
- **1 pt :** $n\times(n-1)\times\ldots\times(n-(r-1)) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^r$
- **1 pt :** $\dbinom{n}{r} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^r}{r!}$

2. *a)* Donner la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{r+2}\,x^n$.

- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{r+2}\,x^n = 0$ **(croissances comparées car** $\dfrac{1}{x}>1$**)**

b) En déduire que la série $\sum \dbinom{n}{r} x^n$ est convergente.

- **4 pts : critère de convergence (1 pt pour positivité, 1 pt pour négligeabilité, 1 pt pour série de Riemann, 1 pt pour citation critère)**

3. *a)* Pour tout entier naturel r, on pose : $S_r = \sum\limits_{n=r}^{+\infty} \dbinom{n}{r} x^n$. Donner la valeur de S_0.

- **1 pt :** S_r **bien définie d'après qst précédente**
- **1 pt :** $S_0 = \dfrac{1}{1-x}$

b) Établir, en utilisant la formule du triangle de Pascal : $(1-x)\,S_{r+1} = x\,S_r$.

- **1 pt :** $(1-x)S_{r+1} = \sum\limits_{n=r}^{+\infty} \dbinom{n+1}{r+1} x^{n+1} - \sum\limits_{n=r+1}^{+\infty} \dbinom{n}{r+1} x^{n+1}$ **(décalage d'indice)**
- **1 pt :** $\dbinom{n+1}{r+1} = \dbinom{n}{r+1} + \dbinom{n}{r}$
- **1 pt :** $\dbinom{r+1}{r+1} x^{r+1} + \sum\limits_{n=r+1}^{+\infty} \dbinom{n}{r} x^{n+1} = \sum\limits_{n=r}^{+\infty} \dbinom{n}{r} x^{n+1}$
- **1 pt :** $\sum\limits_{n=r}^{+\infty} \dbinom{n}{r} x^{n+1} = x\,S_r$

c) En déduire : $\forall x\in\,]0,1[\ ,\ \forall r\in\mathbb{N}\ ,\ \sum\limits_{n=r}^{+\infty} \dbinom{n}{r} x^n = \dfrac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

d) Donner enfin la valeur de $\sum\limits_{n=r}^{+\infty} \dbinom{n}{r} x^{n-r}$.

- **1 pt :** $\sum\limits_{n=r}^{+\infty} \dbinom{n}{r} x^{n-r} = x^{-r} \sum\limits_{n=r}^{+\infty} \dbinom{n}{r} x^n = x^{-r} \dfrac{x^r}{(1-x)^{r+1}} = \dfrac{1}{(1-x)^{r+1}}$

Partie 2 /35

On désigne par α et p deux réels de $]0,1[$.
Un joueur participe à un jeu constitué d'une suite de manches.
Avant chaque manche y compris la première, le joueur a une probabilité α de ne pas être autorisé à jouer la manche en question, (on dit qu'il est disqualifié, et c'est définitif), et une probabilité $1-\alpha$ d'y être autorisé, et ceci indépendamment du fait qu'il ait gagné ou perdu la manche précédente s'il y en a eu une. A chaque manche jouée, le joueur gagne un euro avec la probabilité p et perd un euro avec la probabilité $1-p$.
Si le jeu a commencé, le joueur joue jusqu'à ce qu'il soit disqualifié, et on suppose que les manches sont jouées de façon indépendantes. On note :

× X le nombre de manches jouées par le joueur avant d'être disqualifié.

× Y le nombre de manches gagnées par le joueur.

× G le gain du joueur à la fin du jeu.

On admet que X, Y et G sont des variables aléatoires définies toutes les trois sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

4. ***a)*** Donner la loi de X.
(on pourra noter D_k l'événement « Le joueur ne joue pas la $k^{\text{ème}}$ manche »)

- **1 pt :** $X(\Omega) = \mathbb{N}$
- **1 pt :** $[X=k] \ = \ \overline{D_1} \ \cap \ \ldots \ \cap \ \overline{D_k} \ \cap \ D_{k+1}$
- **2 pts :** $\mathbb{P}([X=k]) = (1-\alpha)^k \ \alpha$ **(1 pt pour indépendance des manches, 1 pt pour $\mathbb{P}(D_i) = \alpha$)**

b) On pose $T = X + 1$. Démontrer que T suit la loi géométrique de paramètre α.

- **1 pt :** $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$
- **2 pts :** $T \hookrightarrow \mathcal{G}(\alpha)$

c) En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

- **2 pts :** $\mathbb{E}(T) \ = \ \dfrac{1}{\alpha}$ **et** $\mathbb{V}(T) \ = \ \dfrac{1-\alpha}{\alpha^2}$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X) \ = \ \dfrac{1-\alpha}{\alpha}$ **(par linéarité de l'espérance)**
- **1 pt :** $\mathbb{V}(X) \ = \ \dfrac{1-\alpha}{\alpha^2}$

5. ***a)*** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$.
Déterminer, en distinguant les cas $k \leqslant n$ et $k > n$ la probabilité $\mathbb{P}_{[X=n]}\big([Y=k]\big)$.

- **1 pt : Si l'événement $[X=n]$ est réalisé c'est que .... Dans ce cas ...**
- **1 pt : description de l'exp comme succession de n épreuves de Bernoulli ...**
- **1 pt : conclusion $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\mathbb{P}_{[X=n]}\big([Y=k]\big) = \dbinom{n}{k} p^k \ (1-p)^{n-k}$**
- **1 pt : $\forall k > n$, $\mathbb{P}_{[X=n]}\big([Y=k]\big) = 0$**

b) En déduire à l'aide de la **Partie 1** la loi de Y.

-
- **1 pt : la formule de la question précédente est valable dans le cas $n=0$**
- **1 pt : $\big([X=n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements**

- **1 pt : FPT** $\mathbb{P}\big([Y=k]\big) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X=n]\cap[Y=k]\big)$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([X=n]\big) \neq 0$
- **1 pt :** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X=n]\big)\ \mathbb{P}_{[X=n]}\big([Y=k]\big) = \sum\limits_{n=k}^{+\infty} (1-\alpha)^n\,\alpha\,\dbinom{n}{k}\,p^k\,(1-p)^{n-k}$ **(*4.a)* et *5.a)*)**
- **1 pt :** $= \alpha\,(1-\alpha)^k\,p^k\ \dfrac{1}{\big(1-(1-\alpha)\,(1-p)\big)^{k+1}}$ **(d'après *3.d)* avec** $r=k$ **et** $x=(1-\alpha)\,(1-p)$**)**
- **1 pt :** $= \dfrac{\alpha}{p+\alpha-\alpha\,p}\ \left(\dfrac{(1-\alpha)\,p}{p+\alpha-\alpha\,p}\right)^k$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([Y=k]\big) = \dfrac{\alpha}{p+\alpha-\alpha\,p}\ \left(1-\dfrac{\alpha}{p+\alpha-\alpha\,p}\right)^k$

6. Calculer l'espérance de Y, puis montrer que $\mathbb{V}(Y) = \dfrac{p\,(1-\alpha)\,(p+\alpha-p\alpha)}{\alpha^2}$.

- **2 pts :** $Z = Y+1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{\alpha}{p+\alpha-\alpha\,p}\right)$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{p-\alpha\,p}{\alpha} = \dfrac{1-\alpha}{\alpha}\ p$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(Y) = \dfrac{p\,(1-\alpha)\,(p+\alpha-p\alpha)}{\alpha^2}$

7. a) Exprimer G en fonction de X et Y.

- **1 pt :** $G = 1\cdot Y - 1\cdot(X-Y) = 2Y-X$

b) En déduire l'espérance de G.

- **1 pt :** G **admet une espérance car est la combinaison linéaire de v.a.r. qui admettent une espérance**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(G)\ =\ \dfrac{1-\alpha}{\alpha}\ (2p-1)$

8. a) On rappelle que :

× l'appel `grand(m,N,'geom',p)` permet de simuler m échantillons de N v.a.r. indépendantes suivant toutes la même loi géométrique de paramètre p.

× l'appel `grand(m,N,'bin',n,p)` permet de simuler m échantillons de N v.a.r. indépendantes suivant toutes la même loi binomiale de paramètre (n,p).

Compléter les commandes **Scilab** suivantes pour qu'elles simulent l'expérience aléatoire étudiée et affichent les valeurs prises par X et Y.

```
alpha = input('entrer la valeur de alpha : ')
p = input('entrer la valeur de p : ')
X = ----
Y = ----
disp(X)
disp(Y)
```

- **2 pts :** `X = grand(1, 1, 'geom', alpha) - 1`
- **2 pts :** `Y = grand(1, 1, 'bin', X, p)`

b) Quelles commandes faut-il ajouter aux précédentes pour calculer et afficher la valeur prise par G ?

- **2 pts (1 pt par ligne)**

```
G = 2 ⋆ Y - X
disp(G)
```

Exercice 4 /41

On appelle *durée de vie* d'un composant électronique la durée de fonctionnement de ce composant jusqu'à sa première panne éventuelle. On considère un composant électronique dont la durée de vie est modélisée par une variable aléatoire T définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Si F est la fonction de répartition de cette variable aléatoire, on appelle *loi de survie* du composant la fonction D définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ D(t) = 1 - F(t) = 1 - \mathbb{P}([T \leqslant t]) = \mathbb{P}([T > t])$$

Le problème se compose de deux parties pouvant être traitées indépendamment.

Partie 1 : Cas discret

On suppose dans cette partie que T est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ qui vérifie, pour tout entier naturel n, $D(n) \neq 0$.

1. **Coefficient d'avarie.**

Le composant est mis en service à l'instant 0. Pour tout entier naturel n non nul, on appelle coefficient d'avarie à l'instant n du composant, la probabilité qu'il tombe en panne à l'instant n, sachant qu'il fonctionne encore à l'instant $n-1$, c'est-à-dire le nombre π_n défini par l'égalité :

$$\pi_n = \mathbb{P}_{[T>n-1]}([T = n])$$

a) Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}\big([T = n]\big) \ = \ \mathbb{P}\big([T > n-1]\big) - \mathbb{P}\big([T > n]\big)$$

En déduire l'égalité :

$$\pi_n = \frac{D(n-1) - D(n)}{D(n-1)}$$

- **2 pts :** $[T > n-1] \ = \ [T \geqslant n] \ = \ [T > n] \cup [T = n]$ **(dont 1 pt pour T est à valeurs entières)**
- **1 pt :** $[T = n]$ **et** $[T > n]$ **sont incompatibles**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([T = n]) = D(n-1) - D(n)$
- **1 pt :** $\mathbb{P}_{[T>n-1]}\big([T = n]\big) = \dfrac{\mathbb{P}\big([T > n-1] \cap [T = n]\big)}{\mathbb{P}\big([T > n-1]\big)}$
- **1 pt :** $[T = n] \subset [T > n-1]$

b) On suppose que $p \in \left]0, 1\right[$ et que T suit la loi géométrique de paramètre p.

(i) Quelle est l'espérance de la variable aléatoire T ?

- **1 pt :** $\mathbb{E}(T) = \dfrac{1}{p}$

(ii) Calculer, pour tout entier naturel n, $D(n)$ en fonction de n.

- **1 pt :** $[T \leqslant n] \ = \ \bigcup\limits_{i=1}^{n} [T = i]$
- **1 pt :** $([T = i])_{i \in [\![1,n]\!]}$ **est une famille d'événements 2 à 2 incompatibles**
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([T = i]\big) = p(1-p)^{i-1}$ **car** $T \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$
- **1 pt :** $\sum\limits_{i=1}^{n} p\ (1-p)^{i-1} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} (1-p)^i = \dfrac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)}$

(iii) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $\pi_n = p$.

- 1 pt : $\pi_n = \dfrac{D(n-1) - D(n)}{D(n-1)}$ **d'après *1.a)***

- 1 pt : $\ldots = \dfrac{(1-p)^{n-1} - (1-p)^n}{(1-p)^{n-1}}$ **d'après *1.b)***

c) Réciproquement, on suppose dans cette question qu'il existe un réel strictement positif α tel que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \pi_n = \alpha$.

(i) Établir, pour tout entier naturel non nul n, l'égalité : $D(n) = (1-\alpha) \ D(n-1)$.

- 1 pt : $\alpha = \pi_n = \dfrac{D(n-1) - D(n)}{D(n-1)}$ **d'après *1.a)***

- 1 pt : $D(n) = (1-\alpha) \ D(n-1)$ **en réorganisant**

(ii) En déduire que T suit une loi géométrique et préciser son paramètre.

- 3 pts : $D(n) = (1-\alpha)^n$ **(1 pt pour initialisation, 2 pts pour hérédité)**

- 1 pt : $T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$

- 2 pts : $T \hookrightarrow \mathcal{G}(\alpha)$

2. **Nombre de pannes successives dans le cas d'une loi géométrique.**

a) Soit m un entier naturel.
Démontrer par récurrence sur n, pour tout entier naturel n vérifiant $n \geqslant m$, l'égalité :

$$\sum_{j=m}^{n} \binom{j}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

- 1 pt : initialisation

- 2 pts : hérédité

b) (i) Déterminer la loi de la variable aléatoire S_2 égale à $T_1 + T_2$.

- 1 pt : $(T_1 + T_2)(\Omega) \subset [\![2, +\infty[\![$

- 1 pt : $\big([T_1 = j]\big)_{j \in \mathbb{N}^*}$ **est un système complet d'événements**

- 1 pt : FPT $\mathbb{P}\big([T_1 + T_2 = n]\big) = \sum\limits_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([T_1 = j] \ \cap \ [T_1 + T_2 = n]\big)$

- 1 pt : $\sum\limits_{j=1}^{+\infty} = \sum\limits_{j=1}^{n-1}$

- 1 pt : T_1 **et** T_2 **sont indépendantes**

- 1 pt : $T_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ **et** $T_2 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

- 1 pt : $\mathbb{P}\big([T_1 + T_2 = n]\big) = (n-1) \ p^2 \, (1-p)^{n-2}$

(ii) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul k, la loi de S_k est donnée par :

$$\forall n \geqslant k, \ \mathbb{P}([S_k = n]) = \binom{n-1}{k-1} \ p^k (1-p)^{n-k}$$

- 1 pt : initialisation

- 7 pts :

× **1 pt :** $\big([T_{k+1} = j]\big)_{j \in \mathbb{N}^*}$ **SCE et FPT**

- **1 pt :** $[T_{k+1} = j] \ \cap \ [S_{k+1} = n] = [T_{k+1} = j] \ \cap \ [S_k + j = n]$
- **1 pt :** $\sum\limits_{j=1}^{+\infty} = \sum\limits_{j=1}^{n-k}$
- **1 pt :** T_{k+1} **et** S_k **sont indépendantes**
- **1 pt :** $T_{k+1} \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ **et par hypothèse de récurrence**
- **1 pt : décalage d'indice** $\ell = n - j - 1$
- **1 pt pour question** ***2.a)*** **avec** $j \leftarrow \ell$**,** $m \leftarrow k-1$ **et** $n \leftarrow n-2$**)**