ESSEC II 2021

Une des situations les plus fréquentes dans l'entretien d'un site concerne la gestion des équipements et, notammemt, le fait de prévoir le remplacement d'éléments défaillants. Imaginons par exemple qu'un local soit éclairé par une ampoule. Celle-ci a une durée de vie aléatoire ; quand elle tombe en panne, elle est immédiatement remplacée par une nouvelle ampoule et ainsi de suite... Une bonne gestion nécessite donc d'avoir connaissance du comportement des pannes successives, et notamment de ce comportement en moyenne, pour pouvoir prévoir un stock d'ampoules de rechange. Une telle situation s'appelle un processus de renouvellement et le but du problème est l'étude d'un modèle probabiliste la décrivant. Dans la première partie, on examine le comportement asymptotique des temps de panne. Dans la deuxième, on regarde quelques propriétés de base du processus. Enfin la troisième est consacrée à la détermination du comportement asymptotique du nombre de pannes moyen.
Toutes les variables aléatoires intervenant dans le problème sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
Pour toute variable aléatoire Y, on notera $\mathbb{E}(Y)$ son espérance et $\mathbb{V}(Y)$ sa variance quand elles existent. On admettra en outre la propriété suivante : si Y et Z sont deux variables aléatoires positives telles que $Y \leqslant Z$ et $\mathbb{E}(Z)$ existe, alors Y admet une espérance et : $\mathbb{E}(Y) \leqslant \mathbb{E}(Z)$.

Commentaire

- Il convient de s'arrêter sur ce résultat généralement appelé « théorème de domination ». C'est un résultat assez classique en probabilités et qui est présent dans le programme ECS mais absent du programme ECE. Dans le programme officiel ECS, il s'énonce comme suit.

  Soient X et Y deux variables aléatoires réelles.

  On suppose :
  - × $0 \leqslant \left| X \right| \leqslant Y$ $\big($ ce qui signifie : $\forall \omega \in \Omega,\ 0 \leqslant \left| X(\omega) \right| \leqslant Y(\omega)$ $\big)$
  - × la v.a.r. Y admet une espérance

  Alors la v.a.r. X admet une espérance et :
  $$\left| \mathbb{E}(X) \right| \leqslant \mathbb{E}(Y)$$

- Cette présentation, légèrement différente de celle de l'énoncé, est en réalité tout à fait équivalente (chaque énoncé permet de démontrer l'autre).
- Dans cette présentation, il n'est pas supposé que X et Y sont des v.a.r. à valeurs positives. Évidemment :
  - × si X est à valeurs positives, alors : $|X| = X$ et on retrouve alors la présentation de l'énoncé.
  - × comme $0 \leqslant \left| X \right| \leqslant Y$ alors en particulier : $Y \geqslant 0$ (la v.a.r. Y est à valeurs positives).

  L'énoncé de l'épreuve et celui du programme officiel sont équivalents (l'un démontre l'autre). L'intérêt de l'énoncé du programme est qu'il peut être utilisé avec une v.a.r. X qui n'est pas positive.
- Il est à noter que le théorème de domination peut s'utiliser auss bien :
  - × pour des v.a.r. discrètes,
  - × pour des v.a.r. à densité,
  - × pour des v.a.r. qui ne sont ni discrètes ni à densité.

Commentaire

- Profitons-en pour rappeler brièvement que l'ensemble des v.a.r. discrètes et l'ensemble des v.a.r. à densité sont disjoints mais que ces deux ensembles ne forment pas une partition de l'ensemble des v.a.r. . Ainsi, une v.a.r. ne peut être à la fois discrète et à densité mais peut être ni discrète ni à densité. Les v.a.r. qui vérifient cette dernière propriété sont un peu délicates à étudier au sein du programme EC. En particulier, si on sait parfaitement définir l'espérance d'une v.a.r. discrète ou à densité, on ne sait pas, dans le cadre du programme, définir l'espérance d'une v.a.r. ni discrète ni à densité. On joue alors un peu les apprentis sorciers : on peut, sous les hypothèses du théorème de domination, démontrer qu'une v.a.r. X ni discrète, ni à densité, admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ (et même conclure $\left| \mathbb{E}(X) \right| \leqslant \mathbb{E}(Y)$) sans pour autant savoir calculer $\mathbb{E}(X)$.
- En réalité, il existe une théorie permettant d'unifier, sous une même écriture, les définitions de l'espérance dans le cas des v.a.r. discrètes, à densité ou quelconques. Cette théorie n'est pas à notre portée en ECE / ECS mais permet de justifier l'utilisation de certains théorèmes du programme dans le cas de v.a.r. quelconques.

Pour tout le problème, on se donne une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\geqslant 1}$ <u>positives, indépendantes et de même loi</u>. On notera, pour tout réel t, $F(t) = \mathbb{P}\big([X_1 \leqslant t] \big)$ la fonction de répartition de la variable aléatoire X_1. On suppose $F(0) = \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \big) < 1$. De plus, on suppose que X_1 admet un moment d'ordre 4, $\mathbb{E}\left(X_1^4\right)$.

Commentaire

Rappelons qu'une fonction est un mécanisme d'association. La fonction de répartition de la v.a.r. X_1, notée ici F est définie par :

$$\begin{array}{rccl} F & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & F(t) = \mathbb{P}\big([X_1 \leqslant t] \big) \end{array}$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, $F(t)$ n'est pas une fonction mais une quantité (un réel). Il serait heureux que les énoncés d'épreuves du `TOP3` évitent de faire la confusion entre fonction et quantité.

On pose $S_0 = 0$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$: $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

Première partie : Comportement asymptotique des temps de panne

1. a) (i) Soit r un entier naturel tel que $1 \leqslant r \leqslant 4$. Démontrer : $X_1^r \leqslant 1 + X_1^4$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :

$$X_1^r \leqslant 1 + X_1^4 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \omega \in \Omega, \big(X_1(\omega)\big)^r \leqslant 1 + \big(X_1(\omega)\big)^4$$

D'après l'énoncé, X_1 est une v.a.r. à valeurs positives. Ainsi : $\forall \omega \in \Omega, X_1(\omega) \geqslant 0$.
On va alors démontrer :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \ x^r \leqslant 1 + x^4 \qquad (*)$$

En appliquant cette inégalité pour $x = X_1(\omega) \geqslant 0$ (pour tout $\omega \in \Omega$), on obtiendra alors l'inégalité souhaitée initialement.

- Démontrons l'inégalité $(*)$. Deux cas se présentent :
  - × si $x \in [0, 1[$ alors :

$$\begin{array}{lll} & x < 1 & \\ \text{donc} & x^r < (1)^r = 1 & \textit{(par stricte croissance de l'application } x \mapsto x^r \textit{ sur } [0,+\infty[\textit{)} \\ \text{donc} & x^r < 1 \leqslant 1 + x^4 & \textit{(car } x^4 \geqslant 0 \textit{ puisque } x \geqslant 0\textit{)} \end{array}$$

  - × si $x \in [1, +\infty[$ alors :

$$\begin{array}{lll} & x \geqslant 1 & \\ \text{donc} & x^{4-r} \geqslant (1)^r = 1 & \textit{(par croissance de l'application } x \mapsto x^{4-r} \textit{ sur } [0,+\infty[\textit{)} \\ \text{donc} & x^{4-r} \times x^r \geqslant 1 \times x^r & \textit{(car } x^r \geqslant 0\textit{)} \\ \text{donc} & x^4 \geqslant x^r & \\ \text{et enfin} & 1 + x^4 \geqslant x^4 \geqslant x^r & \end{array}$$

> On a bien démontré : $\forall r \in [\![1, 4]\!]$, $\forall x \geqslant 0$, $x^r \leqslant 1 + x^4$, ce qui permet d'obtenir l'inégalité souhaitée.

Commentaire

Pour démontrer l'inégalité $(*)$, il est assez naturel d'introduire la fonction $h : x \mapsto x^4 - x^r + 1$. Si $r \neq 4$ (le cas $r = 4$ peut se traiter à part), h est une fonction polynomiale de degré 4. Cependant, l'étude de h exige le même type d'arguments que ceux présents dans la rédaction ci-dessus. Il vaut donc mieux opter pour la rédaction proposée. □

(ii) Montrer que pour tout $r \in \{1, 2, 3, 4\}$, X_1^r admet une espérance.

Démonstration.
Soit $r \in [\![1, 4]\!]$. On a :
- × les v.a.r. X_1^r est $X_1^4 + 1$ sont positives car X_1 l'est.
- × $X_1^r \leqslant 1 + X_1^4$ d'après la question précédente.
- × la v.a.r. $1 + X_1^4$ admet une espérance en tant que transformée affine de la v.a.r. X_1^4 qui admet une espérance d'après l'énoncé (cette propriété équivaut au fait que X_1 admet un moment d'ordre 4).

En appliquant le théorème de domination à $Y = X_1^r$ et $Z = 1 + X_1^4$, on obtient que X_1^r admet une espérance.

> On a bien démontré que pour tout $r \in [\![1, 4]\!]$, X_1 admet un moment d'ordre r.

Commentaire

Les questions ***1.a)(i)*** et ***1.a)(ii)*** étaient déjà présentes, sous une présentation légèrement différentes (on demandait d'établir une inégalité sur les réels et pas sur les v.a.r.) dans l'énoncé `ESSEC-II 2020` en question ***7.a)(i)*** et ***7.a)(ii)***. C'était d'ailleurs source de problème dans cet énoncé car le concepteur avait omis de présenter le théorème de domination. On renvoie à cet énoncé pour plus de détails (et notamment pour une démonstration de la question ***1.a)(ii)*** dans le cadre de v.a.r. discrètes ou à densité). □

On notera tout au long du problème : $\mu = \mathbb{E}(X_1)$.

(iii) Démontrer : $\mu > 0$.

Démonstration.

- D'après l'énoncé, X_1 est à valeurs positives.

$$\boxed{\text{On en déduit, par croissance de l'espérance : } \mu = \mathbb{E}(X_1) \geqslant 0.}$$

- Il reste à démontrer : $\mu \neq 0$. On procède par l'absurde.
  Supposons $\mu = \mathbb{E}(X_1) = 0$.
  Comme X_1 est à valeurs positives, on en conclut : $\mathbb{P}\big([X_1 = 0]\big) = 1$.
  Or, d'après l'énoncé : $\mathbb{P}\big([X_1 = 0]\big) < 1$.
  Absurde !

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mu > 0.}$$

Commentaire

On utilise ici la propriété suivante :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \times \quad X \geqslant 0 \quad \textit{(X est à valeurs positives)} \\ \times \quad \mathbb{E}(X) = 0 \quad \textit{(X est centrée)} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \mathbb{P}\big([X = 0]\big) = 1 \\ \textit{(X est presque sûrement nulle)} \end{array}}$$

Il est simple de démontrer cette propriété pour les v.a.r. discrètes et c'est généralement dans ce chapitre qu'on la trouve. On l'utilise ici pour une v.a.r. quelconque ce qui est permis par le programme officiel. Il stipule en effet : « On admettra que les propriétés opératoires usuelles de l'espérance et de la variance se généralisent aux variables aléatoires quelconques ».

□

(iv) Montrer que la variable aléatoire $X_1 - \mu$ admet un moment d'ordre 4.

Démonstration.
Remarquons :

$$\big(X_1 - \mu\big)^4 \;=\; X_1^4 - 4\,\mu\,X_1^3 + 6\,\mu^2\,X_1^2 - 4\,\mu^3\,X_1 + \mu^4$$

On a démontré en question ***1.a)(ii)*** que pour tout $r \in [\![1, 4]\!]$, X_1^r admet une espérance.
La v.a.r. $\big(X_1 - \mu\big)^4$ apparaît comme combinaison linéaire de v.a.r. qui admettent toutes une espérance. Elle admet donc une espérance.

$$\boxed{\text{Ainsi : } X_1 - \mu \text{ admet un moment d'ordre 4.}}$$

□

2. Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'événements telle que la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ converge.

On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $B_n = \bigcup\limits_{k=n}^{+\infty} A_k$.

a) Démontrer : $\forall n \geqslant 1$, $B_n \supset B_{n+1}$. On pose : $B = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} B_n$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 1$.

$$B_n \;=\; \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \;=\; A_n \;\cup\; \left(\bigcup_{k=n+1}^{+\infty} A_k\right) \;=\; A_n \;\cup\; B_{n+1} \;\supset\; B_{n+1}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \geqslant 1,\ B_n \supset B_{n+1}.}$$

□

b) Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :

$(*)$ $\omega \in B$;

$(**)$ ω appartient à A_k pour une infinité de valeurs de k.

Démonstration.
Soit $\omega \in \Omega$. Remarquons tout d'abord :

$$\begin{aligned} \omega \in B \quad &\Leftrightarrow \quad \omega \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n \\ &\Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \omega \in B_n \\ &\Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \omega \in \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \\ &\Leftrightarrow \quad \underbrace{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists k \geqslant n,\ \omega \in A_k}_{(***)} \end{aligned}$$

On démontre alors $(*) \;\Leftrightarrow\; (**)$ par double implication. Dans ce qui suit, on note K l'ensemble des indices qui vérifient : $\omega \in A_k$. Autrement dit :

$$K \;=\; \{k \in \mathbb{N}^* \mid \omega \in A_k\}$$

$(\Rightarrow)$ Supposons $\omega \in B$. Démontrons que ω appartient à A_k pour une infinité de valeurs de k.
On procède par l'absurde.

- On suppose que ω appartient à A_k pour un nombre au plus fini de valeurs de k.
  Ainsi, l'ensemble K est fini. Il possède donc un plus grand élément noté k_M.
- Comme $\omega \in B$ alors $(***)$ est vérifiée. En particulier, si on note $n = k_M + 1$, on conclut d'après $(***)$ qu'il existe $k \geqslant n$ tel que : $\omega \in A_k$. On a donc trouvé $k \geqslant n = k_M + 1 > k_M$ tel que $\omega \in A_k$, ce qui contredit la définition de k_M.
  Absurde !

On en conclut bien que ω appartient à A_k pour une infinité de valeurs de k.

($\Leftarrow$) Supposons que ω appartient à A_k pour une infinité de valeurs de k.
Démontrons alors $(***)$, ce qui permet de conclure : $\omega \in B$.
On procède de nouveau par l'absurde.

On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall k \geqslant n$, $\omega \notin A_k$. On a alors :

$$K \ \subset \ [\![1, n_0 - 1]\!]$$

En particulier, on en conclut que K est fini.
Absurde !

On a bien démontré : $(***)$ et ainsi, d'après l'équivalence de début de question : $\omega \in K$.

$$\boxed{\text{On a bien : } (*) \Leftrightarrow (**).}$$

Commentaire

- En début de question, on a démontré que B est réalisé par ω si et seulement si il pour tout rang $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un rang ultérieur k pour lequel A_k est réalisé par ω. On comprend bien que si tel est le cas, alors ω réalise une infinité d'événements de la famille $(A_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$. En effet :
  - × si $n = 1$, alors on sait qu'il existe $k_1 \geqslant 1$ tel que ω réalise A_{k_1}.
  - × en prenant alors $n = k_1 + 1$, on sait qu'il existe $k_2 \geqslant k_1 + 1$ tel que ω réalise A_{k_2}.
  - × en prenant alors $n = k_2 + 1$, on sait qu'il existe $k_3 \geqslant k_2 + 1$ tel que ω réalise A_{k_3}.
  - × ...

  En opérant ainsi, on crée une suite $(k_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ strictement croissante d'indices qui vérifie : $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $\omega \in A_{k_i}$, ce qui démontre que ω appartient à A_k pour une infinité de valeurs de k.
- Le point précédent démontre le sens direct de l'équivalence souhaitée. Dans le corrigé, on a préféré mettre en avant une démonstration plus rigoureuse. Cependant, il est probable qu'un tel niveau de détail n'était pas attendu.
- Il est assez fréquent, dans les sujets `ESSEC-II`, de tomber sur des questions qui :
  - × en toute rigueur, exigent une démonstration technique et relativement longue.
  - × se comprennent plutôt bien et peuvent être expliquées « avec les mains ».

  Pour ce type de questions (et uniquement celles-ci), les correcteurs des sujets `ESSEC-II` se contentent généralement de vérifier que les candidats ont compris le mécanisme le plus important de la question. Il y a donc fort à parier que toute idée pertinente, même si peu rigoureuse, pourra apporté des points sur une telle question. Ce sera par exemple le cas de la question ***3.b)(iii)*** à suivre qui exige un formalisme bien trop important si on souhaite la traiter rigoureusement.
- Dans cette question, on manipule l'événement : $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{+\infty} A_k$.

  Il est aussi relativement fréquent d'étudier l'événement : $C = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{+\infty} A_k$.

  On peut alors remarquer :

$$\begin{array}{rcl} \omega \in C & \Leftrightarrow & \exists n \in \mathbb{N}^*, \ \forall k \geqslant n, \ \omega \in A_k \\ & \Leftrightarrow & \text{il existe un rang } n \in \mathbb{N}^* \text{ à partir duquel } \omega \text{ réalise tous les événements } A_k \\ & \Leftrightarrow & \omega \text{ appartient à } A_k \text{ pour une infinité successive d'éléments } k \end{array}$$

$\square$

c) Démontrer : $\mathbb{P}(B) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}(B) & = & \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} B_n\right) & \\ & = & \lim\limits_{m\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n=1}^{m} B_n\right) & \textit{(d'après le théorème de la limite monotone)} \end{array}$$

- D'après la question ***2.a)***, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante d'événements. On en déduit :

$$\bigcap_{n=1}^{m} B_n = B_m$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathbb{P}(B) = \lim\limits_{m\to+\infty} \mathbb{P}(B_m).}$$

□

d) Montrer que si C et D sont deux événements, on a : $\mathbb{P}(C\cup D) \leqslant \mathbb{P}(C)+\mathbb{P}(D)$.

Démonstration.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}(C\cup D) & = & \mathbb{P}(C)+\mathbb{P}(D)-\mathbb{P}\big(C\cap D\big) & \\ & \leqslant & \mathbb{P}(C)+\mathbb{P}(D) & \textit{(car } \mathbb{P}\big(C\cap D\big)\geqslant 0\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall C\in\mathscr{A},\ \forall D\in\mathscr{A},\ \mathbb{P}(C\cup D) \leqslant \mathbb{P}(C)+\mathbb{P}(D).}$$

□

e) Démontrer : $\mathbb{P}(B_n) \leqslant \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$.

Démonstration.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}(B_n) & = & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=n}^{+\infty} A_k\right) & \\ & = & \lim\limits_{m\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=n}^{m} A_k\right) & \textit{(d'après le théorème de la limite monotone)} \end{array}$$

- Démontrons alors par récurrence : $\forall m\geqslant n$, $\mathcal{P}(n)$, où $\mathcal{P}(n)$: $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=n}^{m} A_k\right) \leqslant \sum\limits_{k=n}^{m} \mathbb{P}(A_k)$.

  ▸ **Initialisation** :
  - D'une part : $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=n}^{n} A_k\right) = \mathbb{P}\left(A_n\right)$.
  - D'autre part : $\sum\limits_{k=n}^{n} \mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(A_n)$.

  On a bien : $\mathbb{P}\left(A_n\right) \leqslant \mathbb{P}\left(A_n\right)$. D'où $\mathcal{P}(n)$.

▸ **Hérédité** : soit $m \geqslant n$.

Supposons $\mathcal{P}(m)$ et démontrons $\mathcal{P}(m+1)$ $\left(\textit{i.e.} : \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=n}^{m+1} A_k\right) \leqslant \sum\limits_{k=n}^{m+1} \mathbb{P}(A_k)\right)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{m+1} A_k\right) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{k=n}^{m} A_k\right) \cup A_{n+1}\right) \\
&\leqslant \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{m} A_k\right) + \mathbb{P}(A_{m+1}) && \textit{(d'après la question \textbf{2.d)} appliquée en } C = \bigcup_{k=n}^{m} A_k \in \mathscr{A} \textit{ et } D = A_{m+1} \in \mathscr{A}\textit{)} \\
&= \sum_{k=n}^{m} \mathbb{P}(A_k) + \mathbb{P}(A_{m+1}) && \textit{(par hypothèse de récurrence)}
\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(m+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall m \geqslant n,\ \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{m} A_k\right) \leqslant \sum_{k=n}^{m} \mathbb{P}(A_k).}$$

- On a donc, pour tout $m \geqslant n$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{m} A_k\right) \leqslant \sum_{k=n}^{m} \mathbb{P}(A_k)$$

D'après le début de la question, la suite $\left(\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=n}^{m} A_k\right)\right)_{m \geqslant n}$ est convergente. La suite $\left(\sum\limits_{k=n}^{m} \mathbb{P}(A_k)\right)_{m \geqslant n}$ car il est supposé en question ***2*** que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ est convergente.

Par passage à la limite, on a alors :

$$\mathbb{P}(B_n) = \lim_{m \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{m} A_k\right) \leqslant \lim_{m \to +\infty} \sum_{k=n}^{m} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(B_n) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k).}$$

Commentaire

Les questions ***2.d)*** et ***2.e)*** font fortement penser aux questions ***6.a)*** et ***6.b)*** du sujet `ESSEC-I 2020` (partie **Inégalité de Boole**). Ces résultats ne sont pas présents dans le programme officiel. Comme ces résultats sont amenés à servir dans le reste du sujet, les concepteurs sont obligés de les faire apparaître dans l'énoncé. Ils auraient pu les admettre. Ils ont fait ici le choix de demander leur démonstration ce qui doit être considéré comme une opportunité de prendre des points.

□

f) En déduire : $\mathbb{P}(B) = 0$.

Démonstration.

- Rappelons tout d'abord que d'après la question ***2.c)*** :

$$\mathbb{P}(B) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(B_n)$$

- D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leqslant \mathbb{P}(B_n) \leqslant \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$. Or :
  - × $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$.
  - × $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$. En effet :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_k) + \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$$

et ainsi
$$\sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) - \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) - \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) = 0$$

Commentaire

Le point développé ici est une illustration d'un résultat classique sur les séries. Étant donnée une série $\sum u_n$ convergente, de somme notée S et dont la suite des sommes partielles est notée $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} u_k}_{S} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} u_k}_{S_n} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k}_{R_n}$$

La quantité $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est appelé reste d'ordre n de la série $\sum u_n$.
La suite (R_n) ainsi construite est convergente de limite nulle. En effet :

$$R_n = S - S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S - S = 0$$

On en conclut, par le théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n) = 0$.

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{P}(B) = 0.}$$

Commentaire

- Considérons l'expérience consistant à effectuer une infinité de lancers d'un même dé à 6 faces équilibré. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'événement :

$$A_k : \text{« obtenir 6 lors du } k^{\text{ème}} \text{ lancer »}$$

  On peut alors démontrer, à l'aide du théorème de la limite monotone, que :
  - × la probabilité d'obtenir une infinité successive de 6 est nulle. Autrement dit : $\mathbb{P}(C) = 0$.
  - × la probabilité d'obtenir une infinité de 6 vaut 1. Autrement dit : $\mathbb{P}(B) = 1$.
    Cela se comprend plutôt bien car, comme le dé est équilibré, on s'attend, lors d'une succession infinie de lancers de dés, à obtenir une infinité de chacune des faces du dé.
- Ce dernier point peut sembler, à première vue, en contradiction avec le résultat de l'énoncé. C'est le cas uniquement car l'exemple précédent ne vérifie pas les hypothèses décrites en question *2*. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{6}$ (le dé étant supposé équilibré). La série $\sum \frac{1}{6}$ n'est pas convergente ce qui nous empêche de pouvoir conclure via la démonstration présentée dans l'énoncé. □

3. Soit $(Y_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles positives indépendantes, centrées et de même loi. On suppose que Y_1 admet un moment d'ordre 4 et on note $\mathbb{V}(Y_1) = \mathbb{E}(Y_1^2) = \sigma^2$ et $\mathbb{E}(Y_1^4) = \rho^4$. On pose enfin, pour tout entier $n \geqslant 1$: $\Sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.

Commentaire

- On a déjà mis en avant, en question ***1.a)(iii)***, la propriété :

$$\left.\begin{array}{l} \times\ \ X \geqslant 0 \quad \textit{(X est à valeurs positives)} \\ \times\ \ \mathbb{E}(X) = 0 \quad \textit{(X est centrée)} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \mathbb{P}\big(\,[X=0]\,\big) = 1 \\ \textit{(X est presque sûrement nulle)} \end{array}$$

  Autrement dit, toute v.a.r. centrée positive est nulle presque sûrement. On doit donc conclure des hypothèses de l'énoncé que la suite $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est constituée de v.a.r. toutes nulles presque sûrement.
- C'est en réalité une erreur d'énoncé. S'il est important pour la suite de supposer que les v.a.r. de la suite $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont centrées, il est en revanche inutile de faire l'hypothèse qu'elles sont positives. Nous supposerons donc dans toute cette partie que ces v.a.r. sont centrées mais **de signe quelconque**.

a) Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$ donné, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\left|\dfrac{\Sigma_n}{n}\right| > \varepsilon\right]\right) = 0$.

Démonstration.
Les v.a.r. de la suite $(Y_k)_{k\geqslant 1}$:
$\times$ sont indépendantes,
$\times$ admettent toutes la même espérance (car elles ont même loi), égale à 0 (car elles sont centrées),
$\times$ admettent toutes la même variance σ^2.
D'après la loi faible des grands nombres :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\left|\frac{1}{n}\,\Sigma_n - 0\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) \;=\; 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(\left[\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \varepsilon\right]\right) = 0.}$$

□

b) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

(i) Démontrer : $\mathbb{P}\left(\left[\left|\dfrac{\Sigma_n}{n}\right| > \varepsilon\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[\left(\dfrac{\Sigma_n}{n}\right)^4 > \varepsilon^4\right]\right)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait :
$\times$ la v.a.r. $\left|\dfrac{\Sigma_n}{n}\right|$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$
$\times$ $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$.
Ainsi, par stricte croissance de la fonction $x \mapsto x^4$ sur $\mathbb{R}_+$, on obtient :

$$\mathbb{P}\left(\left[\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \varepsilon\right]\right) \;=\; \mathbb{P}\left(\left[\left(\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right|\right)^4 > \varepsilon^4\right]\right)$$

$$\boxed{\text{D'où : } \mathbb{P}\left(\left[\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \varepsilon\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4 > \varepsilon^4\right]\right).}$$

□

(ii) Démontrer : $\mathbb{P}\left(\left[\left|\dfrac{\Sigma_n}{n}\right| > \varepsilon\right]\right) \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon^4}\, \mathbb{E}\left(\left(\dfrac{\Sigma_n}{n}\right)^4\right)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons la variable aléatoire $Z = \left(\dfrac{\Sigma_n}{n}\right)^4$. On est dans le cadre d'application de l'inégalité de Markov :

× $Z = \left(\dfrac{\Sigma_n}{n}\right)^4$ est à valeurs positives,

× la v.a.r. Z admet une espérance. En effet, la v.a.r. $\dfrac{\Sigma_n}{n}$ admet un moment d'ordre 4 en tant que combinaison linéaire des v.a.r. $Y_1, \ldots, Y_n$ qui admettent un moment d'ordre 4.

En appliquant l'inégalité de Markov à la v.a.r. Z et $\varepsilon^4 > 0$:

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{P}([Z \geqslant \varepsilon^4]) & \leqslant & \dfrac{\mathbb{E}(Z)}{\varepsilon^4} \\ & & \shortparallel & & \shortparallel \\ \mathbb{P}\left(\left[\left|\dfrac{\Sigma_n}{n}\right| > \varepsilon\right]\right) & = & \mathbb{P}\left(\left[\left(\dfrac{\Sigma_n}{n}\right)^4 > \varepsilon^4\right]\right) & & \dfrac{1}{\varepsilon^4}\, \mathbb{E}\left(\left(\dfrac{\Sigma_n}{n}\right)^4\right) \end{array}$$

(d'après la question précédente)

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}\left(\left[\left|\dfrac{\Sigma_n}{n}\right| > \varepsilon\right]\right) \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon^4}\, \mathbb{E}\left(\left(\dfrac{\Sigma_n}{n}\right)^4\right).}$$

□

(iii) Démontrer :

$$(\Sigma_n)^4 = \sum_{k=1}^{n} Y_k^4 + 3 \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} Y_k^2\, Y_j^2 + \sum_{k=1}^{n} Y_k\, W_k$$

où W_k désigne une variable aléatoire fonction de $Y_1, \ldots, Y_{k-1}, Y_{k+1}, \ldots, Y_n$ (on ne cherchera pas à expliciter cette variable aléatoire).

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$:

$$(\Sigma_n)^4 = \sum_{k=1}^{n} Y_k^4 + 3 \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} Y_k^2\, Y_j^2 + \sum_{k=1}^{n} Y_k\, W_k$$

où W_k désigne une variable aléatoire fonction de $Y_1, \ldots, Y_{k-1}, Y_{k+1}, \ldots, Y_n$.

▸ **Initialisation** :

- d'une part : $(\Sigma_1)^4 = Y_1^4$.
- d'autre part :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{1} Y_k^4 + 3 \sum_{k=1}^{1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{1} Y_k^2\, Y_j^2 + \sum_{k=1}^{1} Y_k\, W_k \\ = \ & Y_1^4 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{1} Y_k^2\, Y_j^2 + Y_1\, W_1 \\ = \ & Y_1^4 + Y_1\, W_1 \end{aligned}$$

(car la somme $\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{1}$ *est vide)*

Ainsi, en posant $W_1 = 0$ (la v.a.r. W_1 ne dépend alors pas de Y_1 comme voulu), on obtient :

$$(\Sigma_1)^4 \;=\; \sum_{k=1}^{1} Y_k^4 + 3 \sum_{k=1}^{1} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{1} Y_k^2\, Y_j^2 + \sum_{k=1}^{1} Y_k\, W_k$$

D'où $\mathcal{P}(1)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $(\Sigma_{n+1})^4 = \sum\limits_{k=1}^{n+1} Y_k^4 + 3 \sum\limits_{k=1}^{n+1} \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n+1} Y_k^2\, Y_j^2 + \sum\limits_{k=1}^{n+1} Y_k\, Z_k$
où Z_k désigne une variable aléatoire fonction de $Y_1, \ldots, Y_{k-1}, Y_{k+1}, \ldots, Y_n, Y_{n+1}$).

$$\begin{array}{cll}
& (\Sigma_{n+1})^4 & \\
= & (\Sigma_n + Y_{n+1})^4 & \textit{(par définitiond de } \Sigma_{n+1}\textit{)} \\
= & (\Sigma_n)^4 + 4\,(\Sigma_n)^3\; Y_{n+1} + 6\,(\Sigma_n)^2\; Y_{n+1}^2 + 4\;\Sigma_n\; Y_{n+1}^3 + Y_{n+1}^4 & \textit{(par formule du binôme de Newton)} \\
= & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k^4 + 3 \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} Y_k^2\, Y_j^2 + \sum_{k=1}^{n} Y_k\, W_k & \\
+ & \displaystyle 4\,(\Sigma_n)^3\; Y_{n+1} + 6 \left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)^2 Y_{n+1}^2 + 4 \left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) Y_{n+1}^3 + Y_{n+1}^4 & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
= & \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} Y_k^4 + 3 \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} Y_k^2\, Y_j^2 + \sum_{k=1}^{n} Y_k\, W_k + 4\,(\Sigma_n)^3\; Y_{n+1} & \\
+ & \displaystyle 6\Big(\sum_{k=1}^{n} Y_k^2 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} Y_k\, Y_j\Big)\, Y_{n+1}^2 + 4 \sum_{k=1}^{n} Y_k\, Y_{n+1}^3 & \\
= & \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} Y_k^4 + 3 \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} Y_k^2\, Y_j^2 + \sum_{k=1}^{n} Y_k\, W_k + 4\,(\Sigma_n)^3\; Y_{n+1} & \\
+ & \displaystyle 6 \sum_{k=1}^{n} Y_k^2\, Y_{n+1}^2 + 6 \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} Y_k\, Y_j\; Y_{n+1}^2 + 4 \sum_{k=1}^{n} Y_k\, Y_{n+1}^3 & (*)
\end{array}$$

- Commençons par rassembler les termes en vert. On remarque :

$$3 \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} Y_k^2\, Y_j^2 \;+\; 6 \sum_{k=1}^{n} Y_k^2\, Y_{n+1}^2 \;=\; 3 \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n+1} Y_k^2\, Y_j^2$$

  Autrement dit :

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} Y_k^2\, Y_j^2 \;+\; 2 \sum_{k=1}^{n} Y_k^2\, Y_{n+1}^2 \;=\; \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n+1} Y_k^2\, Y_j^2$$

En effet :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \Big(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n+1} Y_k^2\, Y_j^2 \Big)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n+1} Y_k^2\, Y_j^2 \Big) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq n+1}}^{n+1} Y_{n+1}^2\, Y_j^2$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \Big(Y_k^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n+1} Y_j^2 \Big) + \sum_{j=1}^{n} Y_{n+1}^2\, Y_j^2$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \Big(Y_k^2 \Big(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} Y_j^2 + Y_{n+1}^2 \Big)\Big) + \sum_{j=1}^{n} Y_j^2\, Y_{n+1}^2$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \Big(Y_k^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} Y_j^2 \Big) + \sum_{k=1}^{n} Y_k^2\, Y_{n+1}^2 + \sum_{j=1}^{n} Y_j^2\, Y_{n+1}^2$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} Y_k^2\, Y_j^2 \Big) + 2 \sum_{k=1}^{n} Y_k^2\, Y_{n+1}^2$$

(car la variable j est muette dans la dernière somme)

- Rassemblons maintenant les termes en bleu.

$$\sum_{k=1}^{n} Y_k\, W_k + Y_{n+1} \times 4\, (\Sigma_n)^3 + \sum_{k=1}^{n} \Big(Y_k \times 6 \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} Y_j\, Y_{n+1}^2 \Big) + \sum_{k=1}^{n} \big(Y_k \times 4\, Y_{n+1}^3 \big)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \Big(Y_k \Big(W_k + 6 \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} Y_j\, Y_{n+1}^2 + 4\, Y_{n+1}^3 \Big)\Big) + Y_{n+1} \times 4\, (\Sigma_n)^3$$

On pose alors :

× $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $Z_k = W_k + \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} Y_j\, Y_{n+1}^2 + 4\, Y_{n+1}^3$

Notons que, comme la v.a.r. W_k ne dépend pas de Y_k par hypothèse de récurrence, alors la v.a.r. Z_k ne dépend pas non plus de Y_k (elle dépend de Y_1, …, Y_{k-1}, Y_{k+1}, …, Y_{n+1}).

× $Z_{n+1} = 4\, (\Sigma_n)^3$

Notons que, comme $\Sigma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$, alors la v.a.r. Z_{n+1} ainsi définie ne dépend pas de Y_{n+1} (elle dépend de Y_1, …, Y_n).

On obtient alors :

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(Y_k \Big(W_k + 6 \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} Y_j\, Y_{n+1}^2 + 4\, Y_{n+1}^3 \Big)\Big) + Y_{n+1} \times 4\, (\Sigma_n)^3$$

$$= \sum_{k=1}^{n} Y_k\, Z_k + Y_{n+1}\, Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} Y_k\, Z_k$$

Finalement, en reprenant l'égalité $(*)$, on obtient :

$$(\Sigma_{n+1})^4 \ = \ \sum_{k=1}^{n+1} Y_k^4 + \sum_{k=1}^{n+1} \Big(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n+1} Y_k^2\, Y_j^2 \Big) + \sum_{k=1}^{n+1} Y_k\, Z_k$$

où Z_k désigne une variable aléatoire fonction de $Y_1, \ldots, Y_{k-1}, Y_{k+1}, \ldots, Y_n, Y_{n+1}$.
D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $(\Sigma_n)^4 \ = \ \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k^4 + 3 \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} Y_k^2\, Y_j^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k\, W_k$

où W_k désigne une variable aléatoire fonction de $Y_1, \ldots, Y_{k-1}, Y_{k+1}, \ldots, Y_n$.

Commentaire

- Un tel niveau de détail n'était sans doute pas attendu. Une explication moins rigoureuse aurait sûrement permis d'obtenir la totalité des points alloués à cette question.
- On pouvait démontrer l'égalité voulue en développant directement l'expression initiale. La démarche est la suivante.

1) En développant une somme à la puissance 4, on obtient des termes de degré 4. Autrement dit, on obtient ici des termes de la forme :

$$Y_i^m\, Y_j^p\, Y_k^q\, Y_\ell^r \quad \text{avec } m+p+q+r = 4$$

2) Dans le cas où l'entier m est égal à 4, les autres entiers sont nuls et on obtient alors un terme de la forme Y_i^4 (on obtient un terme de forme similaire si l'un des entiers p, q ou r est égal à 4).

3) Dans le cas où l'entier m est égal à 3, alors l'un des autres entiers vaut 1, par exemple p, et les autres sont nuls. On obtient alors un terme de la forme $Y_i^3\, Y_j$.
Remarquons que ce terme est de la forme $Y_j\, W_j$ où W_j ne dépend pas de Y_j. Ce terme sera donc comptabilisé dans la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k\, W_k$.

4) Dans le cas où l'entier m est égal à 2, deux cas se présentent :

× soit l'un des autres entiers, par exemple p, est égal à 2, alors les autres entiers sont nuls. On obtient alors un terme de la forme $Y_i^2\, Y_j^2$.

× soit deux des autres entiers, par exemple p et q, sont égaux à 1, alors le dernier entier est nul. On obtient alors un terme de la forme $Y_i^2\, Y_j\, Y_k$. Ce terme est de la forme $Y_j\, W_j$ où W_j ne dépend pas de Y_j. Il sera donc comptabilisé dans la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k\, W_k$.

5) Dans le cas où l'entier m est égal à 1, alors on obtient un terme de la forme $Y_i\, W_i$ où W_i ne dépend pas de Y_i. Ce terme sera donc comptabilisé dans la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k\, W_k$.

6) Dans le cas où l'entier m est égal à 0, on effectue la disjonction de cas des étapes *2)* à avec les entiers p puis q puis r.

On obtient alors la formule de l'énoncé.

□

(iv) Démontrer : $\mathbb{E}\left((\Sigma_n)^4\right) = n\,\rho^4 + 3\,n\,(n-1)\,\sigma^4$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Rappelons tout d'abord que la v.a.r. Σ_n admet un moment d'ordre 4 en tant que somme de v.a.r. qui en admettent un.
- D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left((\Sigma_n)^4\right) &= \mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^{n} Y_k^4 + 3 \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} Y_k^2\,Y_j^2 + \sum_{k=1}^{n} Y_k\,W_k\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(Y_k^4\right) + 3 \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \mathbb{E}\left(Y_k^2\,Y_j^2\right) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(Y_k\,W_k\right) \quad \textit{(par linéarité de l'espérance)}\end{aligned}$$

- De plus :
  × d'après l'énoncé, les v.a.r. $Y_1, \ldots, Y_n$ ont même loi. Elles ont donc les mêmes moments. Ainsi :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \mathbb{E}\left(Y_k^4\right) = \rho^4$$

Commentaire

- On utilise ici l'implication suivante : « si deux v.a.r. ont même loi, alors elles ont les mêmes moments ». Ou encore, pour toutes v.a.r. U et V :

$$U \text{ et } V \text{ ont même loi} \quad \Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}\left(U^n\right) = \mathbb{E}\left(V^n\right)$$

  En particulier, U et V ont même espérance, même moment d'ordre 2 (et donc même variance), même moment d'ordre 3, 4, etc.
- Attention : la réciproque est fausse !

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}\left(U^n\right) = \mathbb{E}\left(V^n\right) \quad \cancel{\Rightarrow} \quad U \text{ et } V \text{ ont même loi}$$

  En particulier, les assertions suivantes sont égalements fausses :

$$\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(V) \quad \cancel{\Rightarrow} \quad U \text{ et } V \text{ ont même loi}$$

$$\mathbb{V}(U) = \mathbb{V}(V) \quad \cancel{\Rightarrow} \quad U \text{ et } V \text{ ont même loi}$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(V)\\ \mathbb{V}(U) = \mathbb{V}(V)\end{array}\right\} \quad \cancel{\Rightarrow} \quad U \text{ et } V \text{ ont même loi}$$

  Par exemple, en considérant $U \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$ et $V \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, alors U et V ont même espérance et même variance (mais elles n'ont évidemment pas même loi).

  × pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ et tout $j \in [\![1,n]\!]$ tels que $j \neq k$, les v.a.r. Y_k^2 et Y_j^2 sont indépendantes par lemme des coalitions (car les v.a.r. Y_k et Y_j le sont). Ainsi :

$$\mathbb{E}\left(Y_k^2\,Y_j^2\right) = \mathbb{E}\left(Y_k^2\right) \times \mathbb{E}\left(Y_j^2\right) = \sigma^2 \times \sigma^2 = \sigma^4$$

  × enfin, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, comme l'expression de W_k ne fait pas mention de Y_k, ces 2 v.a.r. sont indépendantes, toujours par lemme des coalitions (car les v.a.r. $Y_1, \ldots, Y_n$ sont mutuellement indépendantes). Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_k\,W_k) &= \mathbb{E}(Y_k) \times \mathbb{E}(W_k) \\ &= 0 \times \mathbb{E}(W_k) = 0 \qquad \textit{(car } Y_k \textit{ est centrée)}\end{aligned}$$

- On obtient finalement :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left((\Sigma_n)^4\right) &= \sum_{k=1}^{n} \rho^4 + 3 \sum_{k=1}^{n} \Bigg(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \sigma^4 \Bigg) + \cancel{\sum_{k=1}^{n} 0} \\
&= n\,\rho^4 + 3 \sum_{k=1}^{n} \left((n-1)\,\sigma^4\right) \\
&= n\,\rho^4 + 3\,n\,(n-1)\,\sigma^4
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}\left((\Sigma_n)^4\right) = n\,\rho^4 + 3\,n\,(n-1)\,\sigma^4}$$

□

(v) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout entier n strictement positif :

$$\mathbb{E}\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4\right) \leqslant \frac{C}{n^2}$$

Commentaire

Il est important de noter que la constante C de l'énoncé ne dépend pas de n. Rappelons en effet que, lorsqu'on est en présence de quantificateurs de natures différentes, l'ordre est important.

- Par exemple, si on dispose d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, les propositions :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant M \qquad \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant M$$

  n'ont pas du tout le même sens. La seconde signifie que la fonction f est bornée (on est capable de trouver un réel M qui majore `TOUTES` les valeurs de $f(x)$ *i.e.* un majorant de $f(x)$ avec x qui parcourt $\mathbb{R}$ en entier). La première proposition signifie que pour chaque valeur particulière de x, on est capable de trouver un réel M (qui peut dépendre de x !) tel que, pour cette valeur particulière de x on ait : $f(x) \leqslant M$. Toute fonction satisfait cette proposition car, on peut poser, pour chaque choix de x : $M = f(x)$. On obtient bien alors : $f(x) \leqslant M$.
- Dans cette question, il est demandé de démontrer :

$$\exists C > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{E}\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4\right) \leqslant \frac{C}{n^2}$$

  La quantification de la constante C précédant celle de l'entier n, son expression ne doit pas dépendre de n.

Il est à noter que si l'énoncé avait souhaité que l'on détermine une constante C dépendant de n, il aurait sans doute insisté sur cette dépendance en utilisant la notation C_n (au lieu de C).

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}\left(\left(\dfrac{\Sigma_n}{n}\right)^4\right) & = & \mathbb{E}\left(\dfrac{(\Sigma_n)^4}{n^4}\right) & \\ & = & \dfrac{1}{n^4}\ \mathbb{E}\left((\Sigma_n)^4\right) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ & = & \dfrac{1}{n^4}\left(n\,\rho^4 + 3\,n\,(n-1)\,\sigma^4\right) & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & \dfrac{\rho^4}{n^3} + \dfrac{3\,\sigma^4\,(n-1)}{n^3} & \\ & = & \dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{\rho^4}{n} + 3\,\sigma^4\ \dfrac{n-1}{n}\right) & \end{array}$$

- Or :
  - × d'une part :

$$\begin{array}{rcll} & \dfrac{1}{n} & \leqslant & 1 \\ \text{donc} & \dfrac{\rho^4}{n} & \leqslant & \rho^4 \qquad \textit{(car } \rho^4 \geqslant 0\textit{)} \end{array}$$

  - × d'autre part :

$$\begin{array}{rcll} & \dfrac{n-1}{n} & \leqslant & 1 \\ \text{donc} & 3\,\sigma^4\ \dfrac{n-1}{n} & \leqslant & 3\,\sigma^4 \qquad \textit{(car } 3\ \sigma^4 \geqslant 0\textit{)} \end{array}$$

  On en déduit :

$$\frac{\rho^4}{n} + 3\,\sigma^4\ \frac{n-1}{n} \leqslant \rho^4 + 3\,\sigma^4$$

  D'où, comme $\dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$:

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{1}{n^2}\ \left(\dfrac{\rho^4}{n} + 3\,\sigma^4 \dfrac{n-1}{n}\right) & \leqslant & \dfrac{1}{n^2}\left(\rho^4 + 3\,\sigma^4\right) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \mathbb{E}\left(\left(\dfrac{\Sigma_n}{n}\right)^4\right) & & \dfrac{\rho^4 + 3\,\sigma^4}{n^2} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, en posant } C = \rho^4 + 3\,\sigma^4 > 0, \text{ on obtient : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4\right) \leqslant \frac{C}{n^2}.}$$

□

(vi) Démontrer : $\mathbb{P}\left(\left[\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \frac{1}{n^{\frac{1}{8}}}\right]\right) \leqslant \frac{C}{n^{\frac{3}{2}}}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question ***3.b)(ii)*** appliquée à $\varepsilon = \frac{1}{n^{\frac{1}{8}}} > 0$:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}\left(\left[\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \frac{1}{n^{\frac{1}{8}}}\right]\right) & \leqslant & \frac{1}{\left(n^{\frac{1}{8}}\right)^4}\, \mathbb{E}\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4\right) \\ & & \shortparallel \\ & & \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\, \mathbb{E}\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4\right) \end{array}$$

- Or, d'après la question précédente :

$$\begin{array}{rrcll} & \mathbb{E}\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4\right) & \leqslant & \frac{C}{n^2} & \\ \text{donc} & \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\, \mathbb{E}\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4\right) & \leqslant & \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \times \frac{C}{n^2} & \left(\textit{car } \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \geqslant 0\right) \\ \text{d'où} & \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\, \mathbb{E}\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4\right) & \leqslant & \frac{C}{n^{\frac{3}{2}}} & \end{array}$$

- Ainsi, par transitivité :

$$\mathbb{P}\left(\left[\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \frac{1}{n^{\frac{1}{8}}}\right]\right) \leqslant \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\, \mathbb{E}\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4\right) \leqslant \frac{C}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\left[\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \frac{1}{n^{\frac{1}{8}}}\right]\right) \leqslant \frac{C}{n^{\frac{3}{2}}}}$$

□

4. On définit, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'événement $A_n = \left[\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \frac{1}{n^{\frac{1}{8}}}\right]$.

a) Montrer que la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ est convergente.

Démonstration.
On sait :

× d'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \mathbb{P}(A_n) \leqslant \frac{C}{n^{\frac{3}{2}}}$

× la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est une série de Riemann d'exposant $\frac{3}{2}$ ($\frac{3}{2} > 1$). Elle est donc convergente.
Et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{C}{n^{\frac{3}{2}}}$ l'est aussi.
(on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel non nul)

$$\boxed{\text{Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série } \sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(A_n) \text{ est convergente.}}$$

□

b) En déduire que la probabilité pour que A_n se produise pour une infinité de valeurs de n est nulle.

Démonstration.
D'après la question précédente, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(A_n)$ est convergente. On peut alors appliquer les résultats de la question ***2.*** Ainsi, en notant :

× pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = \bigcup\limits_{k=n}^{+\infty} A_k$,

× $B = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} B_n$.

on peut conclure avec ***2.f)*** : $\mathbb{P}(B) = 0$.

> Autrement dit, d'après la question ***2.b)***, la probabilité pour que A_n se produise pour une infinité de valeurs de n est nulle.

□

c) Montrer que l'événement $\left[\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\Sigma_n}{n} = 0\right]$ a pour probabilité 1.

Commentaire

- On est ici confronté à ce qui semble être un nouvel objet : une limite de variables aléatoires $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\Sigma_n}{n}$. Cet objet est en fait une **variable aléatoire** que l'énoncé aurait pu définir. Plus précisément, il s'agit de la variable aléatoire définie par :

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \\ \omega & \mapsto & \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\Sigma_n(\omega)}{n} \end{array}$$

- Ainsi, l'événement $\left[\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\Sigma_n}{n} = 0\right]$ est l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\Sigma_n(\omega)}{n} = 0$. Autrement dit :

$$\omega \in \left[\lim_{n\to+\infty} \frac{\Sigma_n}{n} = 0\right] \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\Sigma_n(\omega)}{n} = 0$$

On se ramène alors à l'étude, pour tout $\omega \in \Omega$, de la limite de la suite **réelle** $\left(\dfrac{\Sigma_n(\omega)}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ qui est bien un objet connu.

Commentaire

- La construction d'un tel objet n'est pas si nouvelle que cela. On définit par exemple de manière similaire le maximum ou le minimum de v.a.r. . En effet, si X_1, ..., X_n sont des variables aléatoires réelles, alors on définit la nouvelle variable aléatoire $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ par :

$$\begin{array}{rcl} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & \max\big(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\big) \end{array}$$

Ce n'est cependant pas si simple de définir rigoureusement la limite de v.a.r. . En effet, pour tout $\omega \in \Omega$, la suite $\left(\dfrac{\Sigma_n(\omega)}{n}\right)_{n \geqslant 1}$ peut :

× ne pas admettre de limite,

× admettre une limite infinie (c'est par exemple le cas des suites $(S_n(\omega))_{n\geqslant 1}$ en question ***5.a)***)

- On prendra garde à ne pas inventer de propriétés à la vue d'un nouvel objet. Par exemple ici, l'égalité suivante est évidemment fausse :

$$\mathbb{P}\left(\left[\lim_{n\to+\infty} \frac{\Sigma_n}{n} = 0\right]\right) \cancel{=} \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\frac{\Sigma_n}{n} = 0\right]\right)$$

Démonstration.

- On vient de démontrer en question précédente que la probabilité que l'événement A_n se produise pour une infinité de valeurs de n est nulle, c'est-à-dire : $\mathbb{P}(B) = 0$. Ainsi : $\mathbb{P}(\overline{B}) = 1$.
Comme on cherche à démontrer $\mathbb{P}\left(\left[\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\Sigma_n}{n} = 0\right]\right) = 1$, il suffit alors de montrer :

$$\overline{B} \subset \left[\lim_{n\to+\infty} \frac{\Sigma_n}{n} = 0\right]$$

En effet, dans ce cas, par croissance de l'application $\mathbb{P}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(\overline{B}) & \leqslant & \mathbb{P}\left(\left[\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\Sigma_n}{n} = 0\right]\right) \\ \| & & \rotatebox{90}{$\geqslant$} \\ 1 & & 1 \end{array}$$

D'où : $\mathbb{P}\left(\left[\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\Sigma_n}{n} = 0\right]\right) = 1$.

- Commençons par expliciter l'événement $\overline{B}$. Démontrons alors que $\overline{B}$ est réalisé si et seulement si il existe un rang à partir duquel $\overline{A_n}$ est tout le temps réalisé.
Soit $\omega \in \Omega$.

× Tout d'abord, par déinition : $B = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{+\infty} A_k$. Alors :

$$\overline{B} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{A_k}$$

× Ainsi :

$$\begin{aligned} \omega \in \overline{B} \quad & \Leftrightarrow \quad \omega \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{A_k} \right) \\ & \Leftrightarrow \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \omega \in \bigcap_{k=n_0}^{+\infty} \overline{A_k} \\ & \Leftrightarrow \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geqslant n_0,\ \omega \in \overline{A_k} \end{aligned}$$

Autrement dit, ω réalise $\overline{B}$ si et seulement s'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ à partir duquel ω réalise tous les événements $\overline{A_k}$.

- Démontrons maintenant l'inclusion :

$$\overline{B} \ \subset\ \left[\lim_{n\to+\infty} \frac{\Sigma_n}{n} = 0 \right]$$

Soit $\omega \in \overline{B}$. D'après le point précédent, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$: $\omega \in \overline{A_n}$.

Autrement dit, comme $A_n = \left[\left| \dfrac{\Sigma_n(\omega)}{n} \right| > \dfrac{1}{n^{\frac{1}{8}}} \right]$, on obtient :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \left| \frac{\Sigma_n(\omega)}{n} \right| \ \leqslant\ \frac{1}{n^{\frac{1}{8}}}$$

Or : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{8}}} = 0$. Ainsi, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\Sigma_n(\omega)}{n} = 0$$

c'est-à-dire : $\omega \in \left[\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\Sigma_n}{n} = 0 \right]$.

$$\boxed{\text{On a bien démontré : } \overline{B} \subset \left[\lim_{n\to+\infty} \frac{\Sigma_n}{n} = 0 \right]}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Finalement, avec le premier point de cette démonstration,} \\ \text{on obtient : } \mathbb{P}\left(\left[\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\Sigma_n}{n} = 0 \right] \right) = 1. \end{array}}$$

□

Commentaire

- Pour la culture, on peut remarquer que, lors des questions ***3.a)*** à ***4.c)***, l'énoncé nous fait démontrer différents types de convergences pour la suite de v.a.r. $\left(\dfrac{\Sigma_n}{n} \right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1) la *convergence en probabilité* en question ***3.a)***.

- La définition de la convergence en probabilité d'une suite de v.a.r. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers une v.a.r. X est la suivante :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([|X_n - X| > \varepsilon]) = 0$$

On note alors : $X_n \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\mathbb{P}}} X$.

- On a donc démontré que la suite de v.a.r. $\left(\dfrac{\Sigma_n}{n} \right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la v.a.r. constante égale à 0, ce que l'on note : $\dfrac{\Sigma_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\mathbb{P}}} 0$.

Commentaire

2) la *convergence en moyenne d'ordre* 4 en question ***3.b)(v)***.

- Soit $r \in \mathbb{N}^*$. La définition de la convergence en moyenne d'ordre r d'une suite de v.a.r. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers une v.a.r. X est la suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\big(|X_n - X|^r\big) \ = \ 0$$

On note alors : $X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{L^r}{\longrightarrow}} X$.

- On a donc démontré que la suite de v.a.r. $\left(\dfrac{\Sigma_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en moyenne d'ordre 4 vers la v.a.r. constante égale à 0, ce que l'on note : $\dfrac{\Sigma_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\overset{L^4}{\longrightarrow}} 0$. En effet, d'après ***3.b)(v)*** :

$$0 \ \leqslant \ \mathbb{E}\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4\right) \ \leqslant \ \frac{C}{n^2}$$

D'où, par théorème d'encadrement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n} - 0\right)^4\right) = 0$.

3) la *convergence presque sûre* en question ***4.c)***.

- La définition de la convergence presque sûre d'une suite de v.a.r. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers une v.a.r. X est la suivante :

$$\mathbb{P}\left(\left[\lim_{n\to+\infty} X_n = X\right]\right) \ = \ 1$$

On note alors : $X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{p.s.}{\longrightarrow}} X$.

- On a donc démontré que la suite de v.a.r. $\left(\dfrac{\Sigma_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers la v.a.r. constante égale à 0, ce que l'on note : $\dfrac{\Sigma_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\overset{p.s.}{\longrightarrow}} 0$.

En plus de ces trois types de convergences, on connaît également la *convergence en loi* (qui n'est pas étudiée ici).

- Il existe des relations d'implication entre ces quatre types de convergences, que l'on peut résumer avec le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & L^r \arrow[d, Rightarrow] & \\
p.s. \arrow[r, Rightarrow] & \mathbb{P} \arrow[r, Rightarrow] & \mathcal{L}
\end{tikzcd}$$

Chacune des réciproques est fausse en toute généralité.

d) Montrer que l'événement $\left[\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n} = \mu\right]$ a pour probabilité 1.

Démonstration.

- On souhaite appliquer les questions ***3.*** à ***4.c)***. On ne peut cependant pas les appliquer directement à la suite de v.a.r. $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ car ces v.a.r. ne sont pas centrées. On pose alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $Y_k = X_k - \mu$.
- Vérifions qu'avec la suite de v.a.r. $(Y_k)_{k\geqslant 1}$, nous sommes bien dans le cadre d'application des questions ***3.*** à ***4.c)***.
  La suite $(Y_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite de v.a.r. :
  × indépendantes par lemme des coalitions (car les v.a.r. de la suite $(X_k)_{k\geqslant 1}$ le sont),
  × *(rappelons que l'on a supprimé l'hypothèse de positivité des Y_k dans la remarque associée à la question **3.**)*
  × centrées. En effet, comme X_1 admet une espérance égale à μ, alors Y_1 admet une espérance et, par linéarité de l'espérance :
  $$\mathbb{E}(Y_1) \;=\; \mathbb{E}(X_1 - \mu) \;=\; \mathbb{E}(X_1) - \mu \;=\; \mu - \mu \;=\; 0$$
  × de même loi, car les v.a.r. de la suite $(X_k)_{k\geqslant 1}$ le sont,
  × admettant un moment d'ordre 4, d'après ***1.a)(iv)***.

  Alors, d'après ***4.c)*** (en notant toujours, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$) :
  $$\mathbb{P}\left(\left[\lim_{n\to+\infty} \frac{\Sigma_n}{n} = 0\right]\right) \;=\; 1$$
- Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
  $$\frac{\Sigma_n}{n} \;=\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k \;=\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (X_k - \mu) \;=\; \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - n\,\mu\right) \;=\; \frac{S_n}{n} - \mu$$
  On en déduit : $\mathbb{P}\left(\left[\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n} - \mu = 0\right]\right) = 1.$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}\left(\left[\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = \mu\right]\right) = 1.}$$

□

5. a) Montrer que, pour tout $\omega \in \Omega$, la suite de réels $(S_n(\omega))_{n\geqslant 1}$ est croissante.

Démonstration.
Soit $\omega \in \Omega$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} S_{n+1}(\omega) - S_n(\omega) &= \sum_{k=1}^{n+1} X_k(\omega) - \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) \\ &= \left(\cancel{\sum_{k=1}^{n} X_k(\omega)} + X_{n+1}(\omega)\right) - \cancel{\sum_{k=1}^{n} X_k(\omega)} \\ &= X_{n+1}(\omega) \;\geqslant\; 0 \qquad \textit{(car } X_{n+1} \textit{ est à valeurs positives)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La suite } (S_n(\omega))_{n\geqslant 1} \text{ est donc croissante.}}$$

□

On considère la fonction S_∞ définie sur Ω par $S_\infty(\omega) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(\omega)$ avec $S_\infty(\omega) = +\infty$ si $(S_n(\omega))_{n\geqslant 1}$ diverge.

Commentaire

Notons que la variable aléatoire S_∞ est ainsi bien définie. En effet, pour tout $\omega \in \Omega$, d'après la question précédente, la suite $(S_n(\omega))_{n\geqslant 1}$ est croissante. Ainsi, par théorème de la limite monotone, deux cas se présentent :

- × soit cette suite est de plus majorée, et alors elle est convergente. On peut alors définir $S_\infty(\omega)$ par **le réel** $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(\omega)$.
- × soit cette suite est de plus non majorée, et alors elle diverge vers $+\infty$. Dans ce cas, on peut définir $S_\infty(\omega)$ par $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(\omega) = +\infty$.

b) Montrer que si $S_\infty(\omega) \in \mathbb{R}_+$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n(\omega)}{n} = 0$.

Démonstration.
Soit $\omega \in \Omega$. Supposons : $S_\infty(\omega) \in \mathbb{R}_+$.
Alors, par définition de S_∞, on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(\omega) \in \mathbb{R}_+$. Autrement dit, la suite $(S_n(\omega))_{n\geqslant 1}$ est convergente. Notons ℓ sa limite. On en déduit :

- × $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(\omega) = \ell$,
- × $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par produit de limites : } \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = 0.}$$

□

c) En déduire : $\mathbb{P}([S_\infty = +\infty]) = 1$.

Démonstration.

- Soit $\omega \in \Omega$. D'après la question ***5.a)***, seulement deux cas se présentent :
  - × soit $(S_n(\omega))_{n\geqslant 1}$ converge, et alors : $S_\infty(\omega) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(\omega) \in \mathbb{R}_+$,
  - × soit $(S_n(\omega))_{n\geqslant 1}$ diverge vers $+\infty$, et alors : $S_\infty(\omega) = +\infty$

  Autrement dit :
  - × d'une part : $\Omega = [S_\infty \in \mathbb{R}_+] \cup [S_\infty = +\infty]$,
  - × d'autre part, les événements $[S_\infty \in \mathbb{R}_+]$ et $[S_\infty = +\infty]$ sont incompatibles.

  Ainsi, la famille $\big(\, [S_\infty \in \mathbb{R}_+]\,,\ [S_\infty = +\infty]\, \big)$ forme un système complet d'événements.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}([S_\infty = \infty]) = 1 - \mathbb{P}([S_\infty \in \mathbb{R}_+]).}$$

- De plus, on a démontré en ***5.b)*** :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad S_\infty(\omega) \in \mathbb{R}_+ \ \Rightarrow\ \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = 0$$

  Autrement dit :

$$\omega \in [S_\infty \in \mathbb{R}_+] \quad \Rightarrow \quad \omega \in \left[\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = 0\right]$$

$$\boxed{\text{On obtient : } [S_\infty \in \mathbb{R}_+] \subset \left[\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = 0\right].}$$

- Or, d'après ***4.c)*** : $\mathbb{P}\left(\left[\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n} = \mu\right]\right) = 1$. D'où :

$$\mathbb{P}\left(\left[\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} \neq \mu\right]\right) \ = \ 1 - \mathbb{P}\left(\left[\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = \mu\right]\right) \ = \ 1 - 1 \ = \ 0$$

De plus, d'après ***1.a)(iii)*** : $\mu \neq 0$. On en déduit :

$$\left[\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = 0\right] \ \subset \ \left[\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} \neq \mu\right]$$

(si une valeur est nulle, alors elle ne peut être égale à μ, car μ est forcément différent de 0)
Donc, par croissance de $\mathbb{P}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}\left(\left[\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n} = 0\right]\right) & \leqslant & \mathbb{P}\left(\left[\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n} \neq \mu\right]\right) \\ \rotatebox{90}{$\leqslant$} & & \rotatebox{90}{$=$} \\ 0 & & 0 \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}\left(\left[\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = 0\right]\right) = 0.}$$

- Or, comme précisé dans le 2ème point : $[S_\infty \in \mathbb{R}_+] \subset \left[\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n} = 0\right]$.
D'où, par croissance de $\mathbb{P}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}\left([S_\infty \in \mathbb{R}_+]\right) & \leqslant & \mathbb{P}\left(\left[\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n} = 0\right]\right) \\ \rotatebox{90}{$\leqslant$} & & \rotatebox{90}{$=$} \\ 0 & & 0 \end{array}$$

Donc : $\mathbb{P}\left([S_\infty \in \mathbb{R}_+]\right) = 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}([S_\infty = +\infty]) = 1 - \mathbb{P}([S_\infty \in \mathbb{R}_+]) = 1.}$$

$\square$

Deuxième partie : Le processus de renouvellement

On a montré dans la partie précédente qu'avec probabilité 1, la suite $(S_n(\omega))_{n\geqslant 1}$ tend vers l'infini. On peut donc définir, pour tout réel $t \geqslant 0$, la variable aléatoire :

$$N_t \; = \; \max\{k \in \mathbb{N} \mid S_k \leqslant t\}$$

C'est le **processus de renouvellement** associé à la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$.

6. a) Soient deux réels s et t tels que $0 \leqslant s \leqslant t$. Démontrer : $N_s \leqslant N_t$.

Démonstration.

- Soit $k \in \{k \in \mathbb{N} \mid S_k \leqslant s\}$. Alors, par transitivité :

$$S_k \; \leqslant \; s \leqslant \; t$$

D'où : $k \in \{k \in \mathbb{N} \mid S_k \leqslant t\}$. On en déduit en particulier :

$$k \;\; \leqslant \;\; \underbrace{\max\{k \in \mathbb{N} \mid S_k \leqslant t\}}_{= N_t}$$

- Comme ceci est valable pour tout $k \in \{k \in \mathbb{N} \mid S_k \leqslant s\}$, on obtient en particulier :

$$\underbrace{\max\{k \in \mathbb{N} \mid S_k \leqslant s\}}_{= N_s} \;\; \leqslant \;\; N_t$$

$$\boxed{\text{Finalement, si } s \leqslant t, \text{ alors : } N_s \leqslant N_t.}$$

□

b) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Montrer l'égalité des événements $[N_t \geqslant n]$ et $[S_n \leqslant t]$.

Démonstration.

- Démontrons : $[N_t \geqslant n] \subset [S_n \leqslant t]$.
Soit $\omega \in [N_t \geqslant n]$. Alors : $N_t(\omega) \geqslant n$.
De plus, par définition de N_t : $S_{N_t(\omega)}(\omega) \leqslant t$. Or, d'après la question ***5.a)***, la suite $(S_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Ainsi, comme $n \leqslant N_t(\omega)$, on obtient :

$$S_n(\omega) \;\; \leqslant \;\; S_{N_t(\omega)}(\omega) \;\; \leqslant \;\; t$$

En particulier : $S_n(\omega) \leqslant t$. Autrement dit : $\omega \in [S_n \leqslant t]$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } [N_t \geqslant n] \subset [S_n \leqslant t].}$$

- Démontrons : $[S_n \leqslant t] \subset [N_t \geqslant n]$.
Soit $\omega \in [S_n \leqslant t]$. Alors : $S_n(\omega) \leqslant t$.
On en déduit : $n \in \{k \in \mathbb{N} \mid S_k(\omega) \leqslant t\}$. Alors, en particulier :

$$n \;\; \leqslant \;\; \underbrace{\max\{k \in \mathbb{N} \mid S_k(\omega) \leqslant t\}}_{= N_t(\omega)}$$

Ainsi : $n \leqslant N_t(\omega)$. Autrement dit : $\omega \in [N_t \geqslant n]$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } [S_n \leqslant t] \subset [N_t \geqslant n].}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } [N_t \geqslant n] = [S_n \leqslant t].}$$

□

c) Pour $\omega \in \Omega$ donné, montrer que la limite $\lim\limits_{t \to +\infty} N_t(\omega)$ existe (elle est éventuellement infinie). On note $N_\infty(\omega)$ cette limite.

Démonstration.
Soit $\omega \in \Omega$. On note f la fonction définie par :

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & N_t(\omega) \end{array}$$

D'après la question ***6.a)***, pour tout $(s,t) \in (\mathbb{R}_+)^2$:

$$s \leqslant t \quad \Rightarrow \quad N_s(\omega) \leqslant N_t(\omega)$$

Autrement dit :

$$s \leqslant t \quad \Rightarrow \quad f(s) \leqslant f(t)$$

La fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$. Par théorème de la limite monotone, on en déduit que deux cas se présentent :

× soit la fonction f est majorée, et alors elle admet une limite finie en $+\infty$.
Ainsi, la limite $\lim\limits_{t \to +\infty} N_t(\omega) = \lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$ existe et est finie.

× soit la fonction f n'est pas majorée, et alors elle admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$.
Ainsi : $\lim\limits_{t \to +\infty} N_t(\omega) = \lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$.

$$\boxed{\text{On en conclut que, pour tout } \omega \in \Omega, \text{ la limite } \lim\limits_{t \to +\infty} N_t(\omega) \text{ existe.}}$$

Commentaire

Cette question permet de justifier la notation N_∞ introduite par l'énoncé. On peut la définir plus précisément de manière similaire à la variable aléatoire S_∞ introduite en question ***5.a)*** :

$$N_\infty \ : \ \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ \omega & \mapsto & \lim\limits_{t \to +\infty} N_t(\omega) \end{array}$$

avec toujours la convention $N_\infty(\omega) = +\infty$ si $\lim\limits_{t \to +\infty} N_t(\omega) = +\infty$.

□

d) Soient $\omega \in \Omega$ et $K \in \mathbb{N}$. On suppose : $N_\infty(\omega) = K$.

(i) Montrer qu'il existe $T_\omega > 0$ tel que : $\forall t \geqslant T_\omega$, $N_t(\omega) = K$.

Démonstration.

- D'après l'énoncé, on sait :
  × par hypothèse : $N_\infty(\omega) = K$. C'est-à-dire : $\lim\limits_{t \to +\infty} N_t(\omega) = K$.
  × par définition de N_t : $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $N_t(\omega) \in \mathbb{N}$.

  Autrement dit, la fonction $t \mapsto N_t(\omega)$ admet une limite en $+\infty$ (elle admet pour limite K) et est à valeurs entières.

- Démontrons qu'elle est alors constante dans un voisinage de $+\infty$, c'est-à-dire :

$$\exists A \in \mathbb{R}_+,\ \forall t \geqslant A,\ N_t(\omega) = K$$

L'idée pour le démontrer est d'encadrer, pour tout $t \geqslant A$, le réel $N_t(\omega)$ entre $K - \varepsilon$ et $K + \varepsilon$ pour un ε suffisamment petit. En effet, si l'on parvient à obtenir un tel encadrement, comme $N_t(\omega) \in \mathbb{N}$ et que le seul entier de l'intervalle $[K - \varepsilon, K + \varepsilon]$ est K, on en déduira bien : $N_t(\omega) = K$.

  × Commençons par écrire la définition de : $\lim\limits_{t \to +\infty} N_t(\omega) = K$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $t \geqslant A$:

$$\begin{array}{lrcccl} & & & |N_t(\omega) - K| & < & \varepsilon \\ \text{donc} & -\varepsilon & < & N_t(\omega) - K & < & \varepsilon \\ \text{d'où} & K - \varepsilon & < & N_t(\omega) & < & K + \varepsilon \end{array}$$

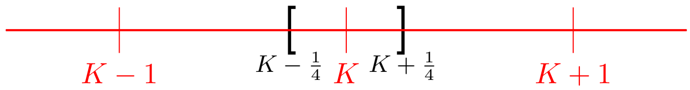
  Comme cet encadrement est valable pour tout $\varepsilon > 0$, en particulier, pour $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$, on obtient :

$$K - \frac{1}{4} \ \leqslant\ N_t(\omega) \ \leqslant\ K + \frac{1}{4}$$

  × On sait de plus : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ N_t(\omega) \in \mathbb{N}$. Ainsi, comme K est un entier, pour tout $t \geqslant A$:

$$\left\{ \begin{array}{l} K - \dfrac{1}{4} \ \leqslant\ N_t(\omega) \ \leqslant\ K + \dfrac{1}{4} \\[2ex] N_t(\omega) \in \mathbb{N} \end{array} \right. \qquad \text{donc} \qquad N_t(\omega) = K$$

  On peut se convaincre que K est le seul entier de l'intervalle $\left[K - \frac{1}{4}, K + \frac{1}{4}\right]$ avec le schéma ci-dessous.



$$\boxed{\text{On en déduit qu'il existe } A \geqslant 0 \text{ tel que : } \forall t \geqslant A,\ N_t(\omega) = K.}$$

- Il reste à démontrer qu'il existe $T_\omega > 0$ (et non $T_\omega \geqslant 0$) tel que : $\forall t \geqslant T_\omega$, $N_t(\omega) = K$. Deux cas se présentent :

  × si $A > 0$, alors on choisit : $T_\omega = A$ et on a la proposition voulue.

  × si $A = 0$, alors, par définition de A :

$$\forall t \geqslant 0,\ N_t(\omega) = K$$

  Autrement dit, la fonction $t \mapsto N_t(\omega)$ est constante égale à K. On en déduit en particulier :

$$\forall t \geqslant 1,\ N_t(\omega) = K$$

  Ainsi, en choisissant $T_\omega = 1$ (qui est bien strictement positif), on obtient la proposition voulue.

$$\boxed{\text{Finalement, il existe bien } T_\omega > 0 \text{ tel que : } \forall t \geqslant T_\omega,\ N_t(\omega) = K.}$$

Commentaire

On démontre dans cette question que la fonction $t \mapsto N_t(\omega)$ est constante au voisinage de $+\infty$. On peut en fait démontrer, avec exactement le même raisonnement, **pour toute fonction** f réelle à valeurs réelles :

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ admet une limite finie en } +\infty \\ f \text{ est à valeurs entières} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} f \text{ est constante au voisinage} \\ \text{de } +\infty \end{array}$$

(ii) Montrer qu'alors $S_K(\omega) \leqslant T_\omega$, et $S_{K+1}(\omega) > t$ pour tout $t \geqslant T_\omega$.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $\forall t \geqslant T_\omega$, $N_t(\omega) = K$. En particulier : $N_{T_\omega}(\omega) = K$.
  D'où : $N_{T_\omega}(\omega) \geqslant K$.

$$\boxed{\text{D'après } \textbf{\textit{6.b)}}\text{, on en déduit : } S_K(\omega) \leqslant T_\omega.}$$

- Démontrons par l'absurde : $\forall t \geqslant T_\omega$, $S_{K+1}(\omega) > t$.
  Supposons qu'il existe $t_0 \geqslant T_\omega$, $S_{K+1}(\omega) \leqslant t_0$.
  × D'une part, d'après ***6.b)*** : $N_{t_0}(\omega) \geqslant K + 1$.
  × D'autre part, comme $t_0 \geqslant T_\omega$, d'après ***6.d)(i)*** : $N_{t_0}(\omega) = K$.
  Absurde !

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall t \geqslant T_\omega,\ S_{K+1}(\omega) > t.}$$

Commentaire

Les correcteurs auraient sans doute aussi accepté une démonstration faisant intervenir la définition de N_t :

- D'après la question précédente : $\forall t \geqslant T_\omega$, $N_t(\omega) = K$. En particulier : $N_{T_\omega}(\omega) = K$.
- Ainsi, par définition de $N_{T_\omega}(\omega)$, l'entier K est le plus grand $k \in \mathbb{N}$ tel que : $S_k(\omega) \leqslant T_\omega$.
  En particulier : $S_K(\omega) \leqslant T_\omega$.
- Soit $t \geqslant T_\omega$.
  Comme $N_t(\omega) = K$, on a toujours que K est le plus grand entier k tel que : $S_k(\omega) \leqslant t$.
  On en déduit que $K + 1$ est le premier entier k à partir duquel : $S_k(\omega) > t$.
  En particulier : $S_{K+1}(\omega) > t$.

(iii) En déduire que si $N_\infty(\omega) = K$ alors nécessairement $X_{K+1}(\omega) > t$ pour tout t réel positif, ce qui est absurde.

Démonstration.
Supposons : $N_\infty(\omega) = K$.

- On remarque tout d'abord :

$$X_{K+1}(\omega) \ = \ S_{K+1}(\omega) - S_K(\omega)$$

- De plus, d'après ***6.d)(i)*** et ***6.d)(ii)***, il existe $T_\omega > 0$ tel que :
  × $S_K(\omega) \leqslant T_\omega$. D'où : $-S_K(\omega) \geqslant -T_\omega$.
  × $\forall t \geqslant T_\omega$, $S_{K+1}(\omega) > t$.

- Soit $t \geqslant T_\omega$. On obtient :
$$\underset{\overset{\shortparallel}{X_{K+1}(\omega)}}{S_{K+1}(\omega) - S_K(\omega)} \quad > \quad t - T_\omega$$

- Soit $u \geqslant 0$.
En appliquant l'inégalité précédente à $t = u + T_\omega \geqslant T_\omega$, on obtient :
$$X_{K+1}(\omega) \quad > \quad \underset{\overset{\shortparallel}{u}}{(u + \cancel{T_\omega}) - \cancel{T_\omega}}$$

$$\boxed{\forall u \geqslant 0,\ X_{K+1}(\omega) > u}$$

- On sait alors :
  × $\lim\limits_{t \to +\infty} t = +\infty$
  × $\forall t \geqslant 0,\ X_{K+1}(\omega) > t$
  Par théorème de comparaison, on obtient :
$$\underset{\overset{\shortparallel}{X_{K+1}(\omega)}}{\lim\limits_{t \to +\infty} X_{K+1}(\omega)} \quad = \quad +\infty$$
  Absurde ! (car X_{K+1} est une variable aléatoire **réelle**)

□

(iv) Conclure : $\mathbb{P}([N_\infty = +\infty]) = 1$.

Démonstration.

- Pour aboutir à ce résultat, nous allons démontrer le résultat (plus fort) suivant :
$$[N_\infty = \infty] \ = \ \Omega$$
Autrement dit : $\forall \omega \in \Omega$, $\omega \in [N_\infty = \infty]$. C'est-à-dire :
$$\forall \omega \in \Omega, \quad N_\infty(\omega) = \infty$$

- On procède à un raisonnement par l'absurde.
Supposons qu'il existe $\omega_0 \in \Omega$ tel que : $N_\infty(\omega_0) \neq \infty$.
D'après ***6.c)***, on en déduit que $N_\infty(\omega_0)$ est finie. Il existe donc $K \in \mathbb{N}$ tel que : $N_\infty(\omega_0) = K$.
Absurde ! (d'après ***6.d)(iii)***)

On en déduit : $[N_\infty = \infty] = \Omega$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathbb{P}\big([N_\infty = \infty]\big) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.}$$

□

7. On souhaite écrire une fonction **Scilab** qui simule informatiquement la variable N_t. On suppose que la fonction `X` renvoie une réalisation de la variable aléatoire X. Compléter la fonction suivante, qui prend en argument un nombre réel t, et renvoie une réalisation de N_t :

```
function N = Renouvellement(t)
        N = 0 ;
        S = 0 ;
    while ...
    ...
endfunction
```

Démonstration.
On propose le script suivant.

```
1 function N = Renouvellement(t)
2     N = 0 ;
3     S = 0 ;
4     while S <= t
5         S = S + X()
6         N = N + 1
7     end
8 endfunction
```

Détaillons les éléments de cette fonction.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  - × cette fonction se nomme `Renouvellement`,
  - × elle prend en paramètre la variable `t`,
  - × elle admet pour variable de sortie la variable `N`.

```
1 function N = Renouvellement(t)
```

  La variable `N` est initialisée à 0.
  La variable `S`, qui contiendra des simulations de chaque v.a.r. de la suite $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, est initialisée à 0 (choix naturel d'initialisation lorsqu'on souhaite coder une somme puisque 0 est l'élément neutre de l'opérateur de sommation).

```
2 N = 0
3 S = 0
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 4 à 7 consistent à déterminer le plus grand entier n tel que : $S_n \leqslant t$. On doit donc calculer les simulations des v.a.r. successives de la suite $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tant que $S_n \leqslant t$. Pour cela, on met en place une structure itérative (boucle while).

```
4 while S <= t
```

  Tant que $S_n \leqslant t$, on calcule S_{n+1} et on stocke toujours cette valeur dans `S` (on utilise ici la relation : $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$) :

```
5         S = S + X()
```

  On rappelle que, d'après l'énoncé, la fonction `X` *renvoie une simulation de la v.a.r. X et que les v.a.r. de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ont même loi que X.*
  On met alors à jour en conséquence la variable `N` : on l'incrémente de 1 pour signaler qu'on a calculé S_{n+1}.

```
6         N = N + 1
```

- **Fin de la fonction**
  À l'issue de cette boucle, la variable `N` contient le plus grand entier n tel que $S_n \leqslant t$. Autrement dit, la variable `N` contient une simulation de la v.a.r. N_t.

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement la fonction **Scilab** démontre la bonne compréhension de ces mécanismes et permet certainement d'obtenir la majorité des points alloués à cette question. On procèdera de même dans les autres questions **Scilab**. □

8. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\mathbb{P}([N_t = n]) \;=\; \mathbb{P}([N_t \geqslant n]) - \mathbb{P}([N_t \geqslant n+1])$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $t \in \mathbb{R}_+$.

- On commence par remarquer :

$$[N_t \geqslant n] \;=\; \underset{\displaystyle [N_t \geqslant n+1]}{\underset{\shortparallel}{[N_t > n]}} \;\cup\; [N_t = n] \qquad \textit{(car N_t est à valeurs entières)}$$

Commentaire

- Il est important de comprendre que l'égalité :

$$[N_t \geqslant n] \;=\; [N_t > n] \cup [N_t = n]$$

est vérifiée pour `TOUTE` v.a.r. , sans hypothèse supplémentaire. En effet, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$\begin{array}{rcl} \omega \in [N_t \geqslant n] & \Leftrightarrow & N_t(\omega) \;\geqslant\; k \\ & \Leftrightarrow & N_t(\omega) \;>\; k \quad \texttt{OU} \quad N_t(\omega) \;=\; k \\ & \Leftrightarrow & \omega \in [N_t > n] \quad \texttt{OU} \quad \omega \in [N_t = n] \\ & \Leftrightarrow & \omega \in [N_t > n] \cup [N_t = n] \end{array}$$

- En revanche, l'égalité :

$$[N_t > n] = [N_t \geqslant n+1]$$

n'est vérifiée que pour les v.a.r. à valeurs entières. On peut le constater dans la démonstration. Pour tout $\omega \in \Omega$:

$$\begin{array}{rcll} \omega \in [N_t > n] & \Leftrightarrow & N_t(\omega) \;>\; n & \\ & \Leftrightarrow & N_t(\omega) \;\geqslant\; n+1 & \textit{(car $N_t(\omega)$ est un entier)} \\ & \Leftrightarrow & \omega \in [N_t \geqslant n+1] & \end{array}$$

Rappelons que dire que N_t est à valeurs dans $\mathbb{N}$ signifie :

$$N_t(\Omega) \subset \mathbb{N}$$

Autrement dit, toutes les valeurs prises par N_t sont des entiers naturels positifs. Cela ne veut pas dire pour autant que N_t prend toutes les valeurs entières positives. En particulier, une v.a.r. N_t telle que $N_t(\Omega) = [\![1, 10]\!]$ est bien une v.a.r. à valeurs entières car N_t ne prend pour valeur que des entiers positifs (plus précisément tous les entiers compris entre 1 et 10).

- Comme les événements $[N_t \geqslant n+1]$ et $[N_t = n]$ sont incompatibles, on en déduit :

$$\mathbb{P}\big([N_t \geqslant n]\big) = \mathbb{P}\big([N_t \geqslant n+1]\big) + \mathbb{P}\big([N_t = n]\big)$$

$$\boxed{\text{D'où : } \forall n \in \mathbb{N},\, \forall t \in \mathbb{R}_+,\, \mathbb{P}\big([N_t = n]\big) = \mathbb{P}\big([N_t \geqslant n]\big) - \mathbb{P}\big([N_t \geqslant n+1]\big).}$$

□

b) Pour tout réel $t \geqslant 0$, pour tout entier naturel n, on note : $F_n(t) = \mathbb{P}([S_n \leqslant t])$.

(i) Déterminer F_0 et F_1.

Démonstration.
Soit $t \in \mathbb{R}_+$.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} F_0(t) & = & \mathbb{P}\big([S_0 \leqslant t]\big) & \\ & = & \mathbb{P}\big([0 \leqslant t]\big) & \textit{(car par définition, } S_0 = 0\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}(\Omega) & \textit{(car on a supposé } t \geqslant 0\textit{)} \\ & = & 1 & \end{array}$$

- Ensuite :

$$F_1(t) = \mathbb{P}\big([S_1 \leqslant t]\big) = F(t)$$

$$\boxed{\forall t \geqslant 0,\, F_0(t) = 1 \text{ et } F_1(t) = F(t).}$$

□

(ii) Démontrer : $\mathbb{P}\big([N_t = n]\big) = F_n(t) - F_{n+1}(t)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big([N_t = n]\big) & = & \mathbb{P}\big([N_t \geqslant n]\big) - \mathbb{P}\big([N_t \geqslant n+1]\big) & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & \mathbb{P}\big([S_n \leqslant t]\big) - \mathbb{P}\big([S_{n+1} \leqslant t]\big) & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{6.b)}}\textit{)} \\ & = & F_n(t) - F_{n+1}(t) & \textit{(par définition)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall t \in \mathbb{R}_+,\, \forall n \in \mathbb{N},\, \mathbb{P}\big([N_t = n]\big) = F_n(t) - F_{n+1}(t).}$$

□

9. Soient U, V, U' et V' quatre variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que U et U' suivent la même loi et que pour tous entiers naturels k et j tels que $\mathbb{P}([U = k]) \neq 0$, on a :

$$\mathbb{P}_{[U=k]}([V = j]) = \mathbb{P}_{[U'=k]}\big([V' = j]\big)$$

Montrer que V et V' suivent la même loi.

Démonstration.

- D'après l'énoncé : $U(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $U'(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{En particulier, les familles } \big([U = k]\big)_{k \in \mathbb{N}} \text{ et } \big([U' = k]\big)_{k \in \mathbb{N}} \text{ sont des} \\ \text{systèmes complets d'événements.}\end{array}}$$

- Soit $j \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big([V=j]\big) & = & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([U=k] \cap [V=j]\big) & \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([U=k]\big) \times \mathbb{P}_{[U=k]}\big([V=j]\big) & \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([U=k]\big) \times \mathbb{P}_{[U'=k]}\big([V'=j]\big) & \textit{(par hypothèse de l'énoncé)} \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([U'=k]\big) \times \mathbb{P}_{[U'=k]}\big([V'=j]\big) & \textit{(car, par hypothèse, les v.a.r. } U \textit{ et } U' \textit{ ont même loi)} \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([U'=k] \cap [V'=j]\big) & \\ & = & \mathbb{P}\big([V'=j]\big) & \end{array}$$

Les v.a.r. V et V' sont toutes deux à valeurs entières. De plus : $\forall j \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\big([V=j]\big) = \mathbb{P}\big([V'=j]\big)$.
Ces deux v.a.r. ont bien même loi.

□

10. Soit $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.
On note : $W = \min\{k \geqslant 1 \mid Z_k = 1\}$.

a) Démontrer pour tout $i \geqslant 1$: $\mathbb{P}([W=i]) = p\,(1-p)^{i-1}$.

Démonstration.
Soit $i \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord, remarquons :

L'événement $[W=i]$ est réalisé

$\Leftrightarrow$ i est le plus petit indice k tel que Z_k prend la valeur 1

$\Leftrightarrow$ Z_i est la première v.a.r. de la suite (Z_k) à prendre la valeur 1

$\Leftrightarrow$ Z_1 prend pour valeur 0

ET Z_2 prend pour valeur 0

...

ET Z_{i-1} prend pour valeur 0

ET Z_i prend pour valeur 1

$\Leftrightarrow$ L'événement $\left(\bigcap\limits_{k=1}^{i-1} [Z_k=0]\right) \cap [Z_i=1]$ est réalisé

$$\boxed{[W=i] \ = \ \left(\bigcap_{k=1}^{i-1} [Z_k=0]\right) \cap [Z_i=1]}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\big([W=i]\big) & = & \mathbb{P}\left(\left(\bigcap\limits_{k=1}^{i-1}[Z_k=0]\right)\cap[Z_i=1]\right) & \\
& = & \left(\prod\limits_{k=1}^{i-1}\mathbb{P}\big([Z_k=0]\big)\right)\times\mathbb{P}\big([Z_i=1]\big) & \textit{(car les v.a.r. de la famille } (Z_n)_{n\geqslant 1} \textit{ sont indépendantes)} \\
& = & \left(\prod\limits_{k=1}^{i-1}(1-p)\right)\times p & \textit{(car les v.a.r. de la famille } (Z_n)_{n\geqslant 1} \textit{ suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre } p\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall i\geqslant 1,\ \mathbb{P}\big([W=i]\big)=p\,(1-p)^{i-1}.}$$

□

b) Pour tout entier $n\geqslant 1$, on pose : $W_n=\min\left\{k\geqslant 1 \mid \sum\limits_{l=1}^{k}Z_l=n\right\}$.

(i) Montrer que pour tout $k\geqslant n$, on a :

$$\mathbb{P}([W_n=k]) \ = \ \binom{k-1}{n-1}\,p^n\,(1-p)^{k-n}$$

Démonstration.
Soit $n\geqslant 1$ et soit $j\geqslant n$.

- Tout d'abord, remarquons :

$$\begin{array}{cl}
& \text{L'événement } [W_n=j] \text{ est réalisé} \\
\Leftrightarrow & \text{j est le plus petit indice } k \text{ tel que } \sum\limits_{l=1}^{k}Z_l \text{ prend la valeur } n \\
\Leftrightarrow & \sum\limits_{l=1}^{j-1}Z_l \text{ ne prend pour valeur } n \\
& \texttt{ET} \quad \sum\limits_{l=1}^{j}Z_l \text{ prend pour valeur } n \\
\Leftrightarrow & \sum\limits_{l=1}^{j-1}Z_l \text{ prend pour valeur } n-1 \\
& \texttt{ET} \quad \left(\sum\limits_{l=1}^{j-1}Z_l\right)+Z_j \text{ prend pour valeur } n \\
\Leftrightarrow & \sum\limits_{l=1}^{j-1}Z_l \text{ prend pour valeur } n-1 \\
& \texttt{ET} \quad Z_j \text{ prend pour valeur } 1 \\
\Leftrightarrow & \text{L'événement } \left[\sum\limits_{l=1}^{j-1}Z_l=n-1\right]\cap[Z_j=1] \text{ est réalisé}
\end{array}$$

$$\boxed{[W_n=j] \ = \ \left[\sum\limits_{l=1}^{j-1}Z_l=n-1\right]\cap[Z_j=1]}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\big([W_n = j]\big) & = & \mathbb{P}\left(\left[\sum\limits_{l=1}^{j-1} Z_l = n-1\right] \cap [Z_j = 1]\right) & \\
& = & \mathbb{P}\left(\left[\sum\limits_{l=1}^{j-1} Z_l = n-1\right]\right) \times \mathbb{P}\left([Z_j = 1]\right) & \textit{(car, d'après le lemme des coalitions, les v.a.r. } \sum\limits_{l=1}^{j-1} Z_l \textit{ et } Z_j \textit{ sont indépendantes)} \\
& = & \left(\binom{j-1}{n-1} p^{n-1} (1-p)^{(j-1)-(n-1)}\right) \times \mathbb{P}\left([Z_j = 1]\right) & \textit{(car } \sum\limits_{l=1}^{j-1} Z_l \hookrightarrow \mathcal{B}(j-1, p)\textit{)} \ (*) \\
& = & \binom{j-1}{n-1} p^{n-1} (1-p)^{j-n} \times p & \textit{(car } Z_j \hookrightarrow \mathcal{B}(p)\textit{)}
\end{array}$$

Notons que $(*)$ est vérifié car les v.a.r. de la famille $(Z_n)_{n \geqslant 1}$ sont indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre p.

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall n \geqslant 1,\ \forall j \geqslant n,\ \mathbb{P}\big([W_n = j]\big) = \binom{j-1}{n-1} p^n (1-p)^{j-n}.}$$

□

Commentaire

- Pour bien comprendre les v.a.r. présentes dans cette question (W et W_n), on peut introduire un contexte d'expérience aléatoire.

  Contexte aléatoire :
  Considérons une pièce de monnaie qui donne Pile avec probabilité $p \in]0, 1[$.
  On considère l'expérience consistant à effectuer une infinité de lancers (supposés indépendants) de cette pièce.
  Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note Z_i la v.a.r. qui prend la valeur 1 si on obtient Pile lors du $i^{\text{ème}}$ tirage et qui prend la valeur 0 sinon.

  Ce contexte étant établi, on peut alors remarquer que :

  × la v.a.r. W prend pour valeur le rang d'apparition du premier Pile. Et ainsi : $W \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

  × la v.a.r. W_n est le nombre de tirages nécessaires pour obtenir n Pile.

- Ce n'est pas la première fois aux concours que l'on introduit une v.a.r. prenant pour valeur le nombre de tirages nécessaires pour atteindre (ou dépasser), une valeur n. C'était pas exemple le cas à `ECRICOME 2017`. Dans ce sujet, l'expérience aléatoire consistait à effectuer une série illimitée de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On considérait alors la v.a.r. T_n prenant pour valeur le nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros de boules obtenues soit supérieure ou égale à n.

(ii) Montrer que pour tout $k \geqslant n$ et $j \geqslant k+1$, on a :

$$\mathbb{P}_{[W_n = k]}\big([W_{n+1} = j]\big) = p\,(1-p)^{j-k-1}$$

Démonstration.
Soit $k \geqslant n$ et soit $j \geqslant k+1$.

- Tout d'abord :

$$\mathbb{P}_{[W_n = k]}\big([W_{n+1} = j]\big) = \frac{\mathbb{P}\big([W_n = k] \cap [W_{n+1} = j]\big)}{\mathbb{P}\big([W_n = k]\big)}$$

L'événement $[W_n = k] \cap [W_{n+1} = j]$ est réalisé

$\Leftrightarrow$ k est le plus petit indice i pour lequel $\sum\limits_{l=1}^{i} Z_l$ prend pour valeur n

ET j est le plus petit indice i pour lequel $\sum\limits_{l=1}^{i} Z_l$ prend pour valeur $n+1$

$\Leftrightarrow$ k est le plus petit indice i pour lequel $\sum\limits_{l=1}^{i} Z_l$ prend pour valeur n

ET $\sum\limits_{l=1}^{j-1} Z_l$ prend pour valeur n

ET Z_j prend pour valeur 1

$\Leftrightarrow$ k est le plus petit indice i pour lequel $\sum\limits_{l=1}^{i} Z_l$ prend pour valeur n

ET $\left(\sum\limits_{l=1}^{k} Z_l\right) + \sum\limits_{l=k+1}^{j-1} Z_l$ prend pour valeur n

ET Z_j prend pour valeur 1

$\Leftrightarrow$ k est le plus petit indice i pour lequel $\sum\limits_{l=1}^{i} Z_l$ prend pour valeur n

ET $\sum\limits_{l=k+1}^{j-1} Z_l$ prend pour valeur 0

ET Z_j prend pour valeur 1

$\Leftrightarrow$ k est le plus petit indice i pour lequel $\sum\limits_{l=1}^{i} Z_l$ prend pour valeur n

ET les v.a.r. $Z_{k+1}, \ldots, Z_{n-1}$ prennent toutes pour valeur 0

ET Z_j prend pour valeur 1

$\Leftrightarrow$ l'événément $[W_n = k]$ est réalisé

ET l'événément $\bigcap\limits_{l=k+1}^{j-1} [Z_l = 0]$ est réalisé

ET l'événément $[Z_j = 1]$ est réalisé

Finalement : $[W_n = k] \cap [W_{n+1} = j] \; = \; [W_n = k] \cap \left(\bigcap\limits_{l=k+1}^{j-1} [Z_l = 0]\right) \cap [Z_j = 1]$.

- On en déduit :

$$\begin{array}{cl} & \mathbb{P}\big([W_n = k] \cap [W_{n+1} = j] \big) \\ = & \mathbb{P}\left([W_n = k] \cap \left(\bigcap\limits_{l=k+1}^{j-1} [Z_l = 0] \right) \cap [Z_j = 1] \right) \\ = & \mathbb{P}\big([W_n = k] \big) \times \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{l=k+1}^{j-1} [Z_l = 0] \right) \times \mathbb{P}\big([Z_j = 1] \big) \\ = & \mathbb{P}\big([W_n = k] \big) \times \prod\limits_{l=k+1}^{j-1} \mathbb{P}\big([Z_l = 0] \big) \times p \\ = & \mathbb{P}\big([W_n = k] \big) \times (1-p)^{(j-1)-(k+1)+1} \times p \end{array}$$

(d'après le lemme des coalitions, les événements $[W_n = k]$, $\bigcap\limits_{l=k+1}^{j-1} [Z_l = 0]$ et $[Z_j = 1]$ sont indépendants)

(car les v.a.r. de la famille $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont indépendantes)

(car : $\forall l \in \mathbb{N}^*$, $Z_l \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$)

- Finalement :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}_{[W_n = k]}\big([W_{n+1} = j] \big) & = & \dfrac{\mathbb{P}\big([W_n = k] \cap [W_{n+1} = j] \big)}{\mathbb{P}\big([W_n = k] \big)} \\ & = & \dfrac{\cancel{\mathbb{P}\big([W_n = k] \big)} \times (1-p)^{j-k-1} \times p}{\cancel{\mathbb{P}\big([W_n = k] \big)}} \end{array}$$

$$\boxed{\forall k \geqslant n, \forall j \geqslant k+1, \mathbb{P}_{[W_n = k]}\big([W_{n+1} = j] \big) \ = \ p\,(1-p)^{j-k-1}.}$$

□

c) On suppose que pour tout entier $i \geqslant 1$: $\mathbb{P}([X_1 = i]) = p\,(1-p)^{i-1}$.

(i) Montrer que pour tous entiers j et k tels que $j \geqslant k+1$, on a :

$$\mathbb{P}_{[S_n = k]}([S_{n+1} = j]) \ = \ p\,(1-p)^{j-k-1}$$

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $j \geqslant k+1$.

- Tout d'abord :

$$\mathbb{P}_{[S_n = k]}\big([S_{n+1} = j] \big) \ = \ \dfrac{\mathbb{P}\big([S_n = k] \cap [S_{n+1} = j] \big)}{\mathbb{P}\big([S_n = k] \big)}$$

- De plus :

$$\begin{array}{rcl} [S_n = k] \cap [S_{n+1} = j] & = & [S_n = k] \cap [S_n + X_{n+1} = j] \\ & = & [S_n = k] \cap [k + X_{n+1} = j] \\ & = & [S_n = k] \cap [X_{n+1} = j-k] \end{array}$$

- Finalement :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}_{[S_n=k]}([S_{n+1}=j]) & = & \dfrac{\mathbb{P}\big([S_n=k]\cap[S_{n+1}=j]\big)}{\mathbb{P}\big([S_n=k]\big)} & \\
& = & \dfrac{\mathbb{P}\big([S_n=k]\cap[X_{n+1}=j-k]\big)}{\mathbb{P}\big([S_n=k]\big)} & \\
& = & \dfrac{\cancel{\mathbb{P}\big([S_n=k]\big)}\ \mathbb{P}\big([X_{n+1}=j-k]\big)}{\cancel{\mathbb{P}\big([S_n=k]\big)}} & \textit{(car, d'après le lemme des coalitions, } S_n \textit{ et } X_{n+1} \textit{ sont indépendantes)} \\
& = & \mathbb{P}\big([X_1=j-k]\big) & \textit{(car, d'après l'énoncé, } X_{n+1} \textit{ et } X_1 \textit{ suivent la même loi)} \\
& = & (1-p)^{j-k-1} & \textit{(en appliquant la formule de l'énoncé en } i=j-k\geqslant 1\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \forall k\in\mathbb{N},\ \forall j\geqslant k+1,\ \mathbb{P}_{[S_n=k]}\big([S_{n+1}=j]\big)=p\,(1-p)^{j-k-1}.}$$ □

(ii) En déduire que pour tout entier $n\geqslant 1$, S_n a même loi que W_n.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: les v.a.r. S_n et W_n ont même loi.

▸ **Initialisation** :
- D'une part : $S_1=X_1\hookrightarrow\mathcal{G}(p)$ (énoncé de la question ***10.c)***).
- D'autre part :

$$W_1 \ = \ \min\left\{k\geqslant 1 \mid \sum_{l=1}^{k} Z_l=1\right\} \ = \ \min\{k\geqslant 1\mid Z_k=1\} \ = \ W$$

En effet, le rang k de la première v.a.r. Z_l qui prend la valeur 1 est aussi la plus petite valeur de k pour laquelle $\sum\limits_{l=1}^{k} Z_l$ prend la valeur 1 et inversement.

De plus : $W\hookrightarrow\mathcal{G}(p)$ d'après la question ***10.a)***.

Ainsi, S_1 et W_1 ont même loi. D'où $\mathcal{P}(1)$.

▸ **Hérédité** : soit $n\in\mathbb{N}^*$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* les v.a.r. S_{n+1} et W_{n+1} ont même loi).
Démontrons que les v.a.r. $U=W_n$, $V=W_{n+1}$, $U'=S_n$ et $V'=S_{n+1}$ vérifient les hypothèses de la question ***9***.

× On constate tout d'abord que ces v.a.r. sont toutes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

× De plus, W_n et S_n suivent la même loi par hypothèse de récurrence.

× Soit $(k,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, tel que $\mathbb{P}\big([W_n=k]\big)\neq 0$ c'est-à-dire tel que $k\geqslant n$.
Deux cas se présentent.

Si $j\in[\![0,k]\!]$, alors :

$$\mathbb{P}_{[W_n=k]}\big([W_{n+1}=j]\big) \ = \ 0$$

Démontrons-cette égalité.
Si l'événement $[W_n=k]$ est réalisé, c'est qu'il est nécessaire de faire la somme des k v.a.r. Z_1, …, Z_k pour atteindre pour la première fois n.
Dans ce cas, on ne peut atteindre pour la première fois $n+1$ en sommant $j\leqslant k$ v.a.r. .
De la même manière :

$$\mathbb{P}_{[S_n=k]}\big([S_{n+1}=j]\big) \ = \ 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall k\geqslant n,\ \forall j\in[\![0,k]\!],\ \ \mathbb{P}_{[W_n=k]}\big([W_{n+1}=j]\big)=\mathbb{P}_{[S_n=k]}\big([S_{n+1}=j]\big)}$$

Si $j \geqslant k+1$, alors d'après ***10.b)(ii)*** et ***10.c)(i)*** :

$$\mathbb{P}_{[W_n=k]}\big([W_{n+1}=j]\big) \;=\; p\,(1-p)^{j-k-1} \;=\; \mathbb{P}_{[S_n=k]}\big([S_{n+1}=j]\big)$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall k \geqslant n, \forall j \geqslant k+1,\ \mathbb{P}_{[W_n=k]}\big([W_{n+1}=j]\big) = \mathbb{P}_{[S_n=k]}\big([S_{n+1}=j]\big)}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall k \geqslant n, \forall j \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}_{[W_n=k]}\big([W_{n+1}=j]\big) = \mathbb{P}_{[S_n=k]}\big([S_{n+1}=j]\big)}$$

On peut alors conclure, d'après la question ***9***, que les v.a.r. W_{n+1} et S_{n+1} ont même loi. D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n).}$$

□

d) Montrer que pour tout réel $t \geqslant 0$ et tout entier naturel n non nul, on a :

$$\mathbb{P}([N_t=n]) \;=\; \sum_{k=n}^{\lfloor t\rfloor} \binom{k-1}{n-1} p^n\,(1-p)^{k-n} - \sum_{k=n+1}^{\lfloor t\rfloor} \binom{k-1}{n} p^{n+1}(1-p)^{k-n-1}$$

où $\lfloor t\rfloor$ désigne le plus grand entier naturel inférieur ou égal à t (par convention $\sum\limits_{k=r}^{s} = 0$ si $r > s$).

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $t \geqslant 0$.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\big([N_t=n]\big) & = & F_n(t) - F_{n+1}(t) & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{8.b)(ii)}}\textit{)} \\
& = & \mathbb{P}\big([S_n \leqslant t]\big) - \mathbb{P}\big([S_{n+1} \leqslant t]\big) & \textit{(par définition de } F_n \textit{ et } F_{n+1}\textit{)} \\
& = & \mathbb{P}\big([W_n \leqslant t]\big) - \mathbb{P}\big([W_{n+1} \leqslant t]\big) & \textit{(car, d'après la question précédente, } S_n \textit{ et } W_n \\
& & & \textit{ont même loi et } S_{n+1} \textit{ et } W_{n+1} \textit{ ont même loi)}
\end{array}$$

- Ensuite, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{rcll}
[W_m \leqslant t] & = & [W_m \leqslant \lfloor t\rfloor] & \textit{(car } W_m \textit{ est à valeurs entières)} \\
& = & \bigcup\limits_{k=m}^{\lfloor t\rfloor} [W_m = k] & \textit{(car } W_m \textit{ est à valeurs dans } [\![m,+\infty[\![\textit{)}
\end{array}$$

Et ainsi :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\big([W_m \leqslant t]\big) & = & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=m}^{\lfloor t\rfloor} [W_m = k]\right) & \\
& = & \sum\limits_{k=m}^{\lfloor t\rfloor} \mathbb{P}\big([W_m=k]\big) & \textit{(car les événements de la famille} \\
& & & \big([W_m=k]\big)_{k\geqslant m} \textit{ sont 2 à 2 incompatibles)} \\
& = & \sum\limits_{k=m}^{\lfloor t\rfloor} \dbinom{k-1}{m-1} p^m\,(1-p)^{k-m} &
\end{array}$$

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big([W_m \leqslant t]\big) = \sum_{k=m}^{\lfloor t\rfloor} \binom{k-1}{m-1} p^m\,(1-p)^{k-m}}$$

- Finalement, en combinant ces égalités et choisissant successivement $m = n$ et $m = n+1$:

$$\mathbb{P}\big(\,[N_t = n]\,\big) \quad = \quad \sum_{k=n}^{\lfloor t \rfloor} \binom{k-1}{n-1} p^n \, (1-p)^{k-n} - \sum_{k=n+1}^{\lfloor t \rfloor} \binom{k-1}{(n+\cancel{1}) - \cancel{1}} p^{n+1} \, (1-p)^{k-(n+1)}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \geqslant 0,\ \mathbb{P}\big(\,[N_t = n]\,\big) = \sum_{k=n}^{\lfloor t \rfloor} \binom{k-1}{n-1} p^n \, (1-p)^{k-n} - \sum_{k=n+1}^{\lfloor t \rfloor} \binom{k-1}{n} p^{n+1} (1-p)^{k-n-1}}$$

$\square$

Troisième partie : Théorème du renouvellement

Le but de cette partie est d'obtenir des propriétés asymptotiques, en moyenne, du processus de renouvellement.

11. a) Montrer que pour tout réel $t \geqslant 0$: $S_{N_t} \leqslant t < S_{N_t+1}$.

Commentaire

- L'énoncé demande ici de manipuler la variable aléatoire réelle S_{N_t} sans l'expliquer. Voici sa définition :

  si la v.a.r. N_t prend la valeur n, alors S_{N_t} prend la valeur S_n

  On aurait aimé que l'énoncé introduise cette v.a.r. correctement de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccl} S_{N_t} & : & \Omega & \to & \mathbb{R} \\ & & \omega & \mapsto & S_{N_t(\omega)}(\omega) = \sum\limits_{k=1}^{N_t(\omega)} X_k(\omega) \end{array}$$

- On remarque que l'énoncé introduit seulement en question ***13.*** la notation S_J où J est une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$. On peut regretter que cette définition intervienne si tard après sa manipulation pour $J = N_t$. C'est peut-être pour éviter d'induire en erreur les candidats en leur laissant penser que c'est cette écriture sous forme de somme qu'il faut utiliser dans cette question (alors que l'on va essentiellement utiliser la définition de la v.a.r. N_t).

Démonstration.
Soit $t \geqslant 0$. Soit $\omega \in \Omega$.

- On a toujours : $N_t(\omega) = N_t(\omega)$.
  Ainsi, en appliquant la question ***6.b)*** à $n = N_t(\omega) \in \mathbb{N}$, on obtient :

$$S_{N_t(\omega)}(\omega) \ \leqslant \ t$$

- Démontrons par l'absurde : $S_{N_t(\omega)+1}(\omega) > t$.
  Supposons : $S_{N_t(\omega)+1}(\omega) \leqslant t$.
  Alors, d'après ***6.b)*** appliquée à $n = N_t(\omega) + 1 \in \mathbb{N}$, on obtient : $N_t(\omega) \geqslant N_t(\omega) + 1$.
  Absurde !

Finalement : $\forall \omega \in \Omega$, $S_{N_t(\omega)}(\omega) \leqslant t < S_{N_t(\omega)+1}(\omega)$.

$$\boxed{\forall t \geqslant 0,\ S_{N_t} \leqslant t < S_{N_t+1}}$$

Commentaire

Comme en en question ***6.d)(ii)***, on pouvait également démontrer cet encadrement à l'aide de la définition de N_t (et c'est sans doute ce qu'attendait l'énoncé). Explicitons cette démonstration.
Soit $t \geqslant 0$. Soit $\omega \in \Omega$.
L'entier $N_t(\omega)$ est le plus grand entier k tel que : $S_k(\omega) \leqslant t$. Alors :

- en particulier : $S_{N_t(\omega)}(\omega) \leqslant t$.
- l'entier $N_t(\omega) + 1$ est le premier entier k tel que : $S_k(\omega) > t$.
  En particulier : $S_{N_t(\omega)+1}(\omega) > t$.

□

b) En déduire que pour tout $\omega \in \Omega$, il existe $T_\omega > 0$ tel que pour tout réel $t \geqslant T_\omega$:

$$\frac{S_{N_t}(\omega)}{N_t(\omega)} \leqslant \frac{t}{N_t(\omega)} < \frac{S_{N_t+1}(\omega)}{N_t(\omega)}$$

Démonstration.
Soit $\omega \in \Omega$.

- D'après ***6.d)(iv)*** : $[N_\infty = +\infty] = \Omega$.
  (on rappelle qu'on avait démontré ce résultat plus fort que celui demandé)
  Alors :
  $$\lim_{t \to +\infty} N_t(\omega) = N_\infty(\omega) = +\infty$$
  Par définition de la limite, on en déduit qu'il existe $T_\omega > 0$ tel que :
  $$\forall t \geqslant T_\omega, \quad N_t(\omega) > 0$$
- Soit $t \geqslant T_\omega$. D'après la question précédente :
  $$S_{N_t(\omega)}(\omega) \leqslant t < S_{N_t(\omega)+1}(\omega)$$
  Comme $N_t(\omega) > 0$, on obtient :
  $$\frac{S_{N_t(\omega)}(\omega)}{N_t(\omega)} \leqslant \frac{t}{N_t(\omega)} < \frac{S_{N_t(\omega)+1}(\omega)}{N_t(\omega)}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Pour tout } \omega \in \Omega, \text{ il existe } T_\omega > 0 \text{ tel que :} \\ \forall t \geqslant T_\omega, \quad \dfrac{S_{N_t(\omega)}(\omega)}{N_t(\omega)} \leqslant \dfrac{t}{N_t(\omega)} < \dfrac{S_{N_t(\omega)+1}(\omega)}{N_t(\omega)}.\end{array}}$$

□

c) Montrer que l'événement $\left[\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{S_{N_t}}{N_t} = \mu\right]$ a pour probabilité 1.

Commentaire

- L'idée est ici la suivante :
  × d'après la question ***6.d)(iv)***, la v.a.r. N_t admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ presque sûrement,
  × d'après la question ***4.d)***, la v.a.r. $\dfrac{S_n}{n}$ converge vers μ presque sûrement.

  Alors, par théorème de composition des limites, la v.a.r. $\dfrac{S_{N_t}}{N_t}$ admet pour limite μ en $+\infty$ presque sûrement.
- On remarque donc que l'argument clé de la démonstration est l'inclusion :
  $$\left(\left[\lim_{t \to +\infty} N_t = +\infty\right] \cap \left[\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n} = \mu\right]\right) \subset \left[\lim_{t \to +\infty} \frac{S_{N_t}}{N_t} = \mu\right]$$
  C'est donc cette inclusion que l'on commencera par démontrer.
- On peut penser que l'explication peu rigoureuse du 1er point permettait sans doute d'obtenir la majorité des points alloués à cette question.

Démonstration.

- Démontrons : $\left([N_\infty = +\infty] \cap \left[\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n} = \mu\right]\right) \subset \left[\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{S_{N_t}}{N_t} = \mu\right]$.

  Soit $\omega \in \left([N_\infty = +\infty] \cap \left[\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n} = \mu\right]\right)$. Alors :

$$\begin{array}{lccc} & \omega \in [N_\infty = \infty] & \texttt{ET} & \omega \in \left[\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n} = \mu\right] \\ \text{donc} & N_\infty(\omega) = +\infty & \texttt{ET} & \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n(\omega)}{n} = \mu \\ \text{d'où} & \lim\limits_{t\to+\infty} N_t(\omega) = +\infty & \texttt{ET} & \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n(\omega)}{n} = \mu \end{array}$$

  Ainsi, par théorème de composition des limites : $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{S_{N_t(\omega)}(\omega)}{N_t(\omega)} = \mu$. Autrement dit :

$$\omega \in \left[\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{S_{N_t}}{N_t} = \mu\right]$$

$$\boxed{\left([N_\infty = +\infty] \cap \left[\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n} = \mu\right]\right) \quad \subset \quad \left[\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{S_{N_t}}{N_t} = \mu\right]}$$

- Démontrons maintenant : $\mathbb{P}\left([N_\infty = +\infty] \cap \left[\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n} = \mu\right]\right) = 1$.

  Pour cela, on va démontrer le résultat plus général suivant :

$$\forall (A,B) \in \mathscr{A}^2, \qquad \left.\begin{array}{r} \mathbb{P}(A) = 1 \\ \mathbb{P}(B) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = 1$$

  Soit $(A,B) \in \mathscr{A}^2$.
  Supposons : $\mathbb{P}(A) = 1$ et $\mathbb{P}(B) = 1$.

  × D'après la formule du crible :

$$\mathbb{P}(A \cap B) \ = \ \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) \ = \ 1 + 1 - \mathbb{P}(A \cup B) \ = \ 2 - \mathbb{P}(A \cup B)$$

  × Or :

$$\begin{array}{lccccc} & 0 & \leqslant & \mathbb{P}(A \cup B) & \leqslant & 1 \\ \text{donc} & 0 & \geqslant & -\mathbb{P}(A \cup B) & \geqslant & -1 \\ \text{d'où} & 2 & \geqslant & 2 - \mathbb{P}(A \cup B) & \geqslant & 1 \\ \text{ainsi} & 2 & \geqslant & \mathbb{P}(A \cap B) & \geqslant & 1 \end{array}$$

  On a de plus toujours : $\mathbb{P}(A \cap B) \leqslant 1$.

  Finalement : $\mathbb{P}(A \cap B) = 1$.

$$\boxed{\forall (A,B) \in \mathscr{A}^2, \qquad \left.\begin{array}{r} \mathbb{P}(A) = 1 \\ \mathbb{P}(B) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = 1}$$

On sait :

× d'après **6.d)(iv)** : $\mathbb{P}\big([N_\infty = \infty] \big) = 1$

× d'après **4.d)** : $\mathbb{P}\left(\left[\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{S_n}{n} = \mu \right] \right) = 1$

$$\boxed{\text{Ainsi, d'après la propriété précédente : } \mathbb{P}\left([N_\infty = \infty] \cap \left[\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{S_n}{n} = \mu \right] \right) = 1}$$

- Enfin, d'après le 1^er point et la croissance de $\mathbb{P}$:

$$\underset{1}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{P}\left([N_\infty = +\infty] \cap \left[\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{S_n}{n} = \mu \right] \right)}} \quad \leqslant \quad \mathbb{P}\left(\left[\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{S_{N_t}}{N_t} = \mu \right] \right)$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}\left(\left[\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{S_{N_t}}{N_t} = \mu \right] \right) = 1.}$$

□

d) Montrer que l'événement $\left[\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{S_{N_t+1}}{N_t} = \mu \right]$ a pour probabilité 1.

Démonstration.

- On commence par remarquer, pour tout $\omega \geqslant T_\omega$:

$$\frac{S_{N_t(\omega)+1}(\omega)}{N_t(\omega)} \;=\; \frac{S_{N_t(\omega)+1}(\omega)}{N_t(\omega)+1} \times \frac{N_t(\omega)+1}{N_t(\omega)} \;=\; \frac{S_{N_t(\omega)+1}(\omega)}{N_t(\omega)+1} \times \left(1 + \frac{1}{N_t(\omega)} \right)$$

Pour démontrer le résultat voulu, on doit donc expliquer les trois points suivants :

1) $\left(\left[\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{S_{N_t+1}}{N_t+1} = \mu \right] \cap \left[\lim\limits_{t \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{N_t} = 1 \right] \right) \subset \left[\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{S_{N_t+1}}{N_t} = \mu \right]$

2) $\mathbb{P}\left(\left[\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{S_{N_t+1}}{N_t+1} = \mu \right] \right) = 1$

3) $\mathbb{P}\left(\left[\lim\limits_{t \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{N_t} = 1 \right] \right) = 1$

En effet, les points ***2)*** et ***3)*** permettent d'affirmer, à l'aide du résultat démontré dans le 2^ème point de la question précédente :

$$\mathbb{P}\left(\left[\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{S_{N_t+1}}{N_t+1} = \mu \right] \cap \left[\lim\limits_{t \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{N_t} = 1 \right] \right) \;=\; 1$$

On pourra alors conclure, avec le point ***1)***, par croissance de $\mathbb{P}$:

$$\underset{1}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{P}\left(\left[\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{S_{N_t+1}}{N_t+1} = \mu \right] \cap \left[\lim\limits_{t \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{N_t} = 1 \right] \right)}} \quad \leqslant \quad \mathbb{P}\left(\left[\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{S_{N_t+1}}{N_t} = \mu \right] \right)$$

- Démontrons : $\left(\left[\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{S_{N_t+1}}{N_t+1} = \mu\right] \cap \left[\lim\limits_{t\to+\infty} 1+\dfrac{1}{N_t} = 1\right]\right) \subset \left[\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{S_{N_t+1}}{N_t} = \mu\right]$.

  Soit $\omega \in \left[\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{S_{N_t+1}}{N_t+1} = \mu\right] \cap \left[\lim\limits_{t\to+\infty} 1+\dfrac{1}{N_t} = 1\right]$. Alors :

$$\omega \in \left[\lim_{t\to+\infty} \frac{S_{N_t+1}}{N_t+1} = \mu\right] \quad \texttt{ET} \quad \omega \in \left[\lim_{t\to+\infty} 1+\frac{1}{N_t} = 1\right]$$

$$\text{donc} \qquad \lim_{t\to+\infty} \frac{S_{N_t(\omega)+1}(\omega)}{N_t(\omega)+1} = \mu \quad \texttt{ET} \quad \lim_{t\to+\infty} 1+\frac{1}{N_t(\omega)} = 1$$

  D'après l'égalité démontrée dans le premier point, on obtient : $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{S_{N_t(\omega)+1}(\omega)}{N_t(\omega)} = \mu \times 1 = \mu$.
  Autrement dit :

$$\omega \in \left[\lim_{t\to+\infty} \frac{S_{N_t+1}}{N_t} = \mu\right]$$

$$\boxed{\left(\left[\lim_{t\to+\infty} \frac{S_{N_t+1}}{N_t+1} = \mu\right] \cap \left[\lim_{t\to+\infty} 1+\frac{1}{N_t} = 1\right]\right) \subset \left[\lim_{t\to+\infty} \frac{S_{N_t+1}}{N_t} = \mu\right]}$$

- En raisonnant comme en question précédente, on obtient : $\mathbb{P}\left(\left[\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{S_{N_t+1}}{N_t+1} = \mu\right]\right) = 1$.

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\left[\lim_{t\to+\infty} \frac{S_{N_t+1}}{N_t+1} = \mu\right]\right) = 1}$$

- Démontrons enfin : $\mathbb{P}\left(\left[\lim\limits_{t\to+\infty} 1+\dfrac{1}{N_t} = 1\right]\right) = 1$.
  Soit $\omega \in \Omega$.
  D'après ***6.d)(iv)*** : $[N_\infty = \infty] = \Omega$. D'où :

$$\lim_{t\to+\infty} N_t(\omega) \ = \ N_\infty(\omega) \ = \ +\infty$$

  On en conclut :

$$\lim_{t\to+\infty} 1+\frac{1}{N_t(\omega)} \ = \ 1+0 \ = \ 1$$

  On a démontré : $\forall \omega \in \Omega$, $\lim\limits_{t\to+\infty} 1+\dfrac{1}{N_t(\omega)} = 1$. Ainsi :

$$\Omega \ = \ \left[\lim_{t\to+\infty} 1+\frac{1}{N_t} = 1\right]$$

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\left[\lim_{t\to+\infty} 1+\frac{1}{N_t} = 1\right]\right) = \mathbb{P}(\Omega) = 1}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}\left(\left[\lim_{t\to+\infty} \frac{S_{N_t+1}}{N_t} = \mu\right]\right) = 1.}$$

□

e) En déduire que l'événement $\left[\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{N_t}{t} = \dfrac{1}{\mu}\right]$ a pour probabilité 1.

Démonstration.

- On a démontré en question ***11.b)***, pour tout $t \geqslant T_\omega$:

$$\frac{S_{N_t(\omega)}(\omega)}{N_t(\omega)} \leqslant \frac{t}{N_t(\omega)} < \frac{S_{N_t(\omega)+1}(\omega)}{N_t(\omega)}$$

- Démontrons alors : $\left(\left[\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{S_{N_t}}{N_t} = \mu\right] \cap \left[\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{S_{N_t+1}}{N_t} = \mu\right]\right) \subset \left[\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{N_t}{t} = \dfrac{1}{\mu}\right]$.

  Soit $\omega \in \left(\left[\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{S_{N_t}}{N_t} = \mu\right] \cap \left[\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{S_{N_t+1}}{N_t} = \mu\right]\right)$. Alors :

$$\omega \in \left[\lim_{t\to+\infty} \frac{S_{N_t}}{N_t} = \mu\right] \quad \texttt{ET} \quad \omega \in \left[\lim_{t\to+\infty} \frac{S_{N_t+1}}{N_t} = \mu\right]$$

$$\text{donc} \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{S_{N_t(\omega)}(\omega)}{N_t(\omega)+1} = \mu \quad \texttt{ET} \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{S_{N_t(\omega)+1}}{N_t(\omega)} = \mu$$

  Ainsi, d'après ***11.b)*** et par théorème d'encadrement, on obtient : $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t}{N_t(\omega)} = \mu$.

  Or, d'après ***1.a)(iii)*** : $\mu > 0$. On en déduit : $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{N_t(\omega)}{t} = \dfrac{1}{\mu}$. D'où :

$$\omega \in \left[\lim_{t\to+\infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mu}\right]$$

$$\boxed{\left(\left[\lim_{t\to+\infty} \frac{S_{N_t}}{N_t} = \mu\right] \cap \left[\lim_{t\to+\infty} \frac{S_{N_t+1}}{N_t} = \mu\right]\right) \subset \left[\lim_{t\to+\infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mu}\right]}$$

- De plus :
  - × d'après ***11.c)*** : $\mathbb{P}\left(\left[\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{S_{N_t}}{N_t} = \mu\right]\right) = 1$.
  - × d'après ***11.d)*** : $\mathbb{P}\left(\left[\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{S_{N_t+1}}{N_t} = \mu\right]\right) = 1$.

  Ainsi, d'après le résultat démontré dans le $2^{\text{ème}}$ point de la question ***11.c)*** :

$$\mathbb{P}\left(\left[\lim_{t\to+\infty} \frac{S_{N_t}}{N_t} = \mu\right] \cap \left[\lim_{t\to+\infty} \frac{S_{N_t+1}}{N_t} = \mu\right]\right) = 1$$

- Par croissance de $\mathbb{P}$, on obtient :

$$\underbrace{\mathbb{P}\left(\left[\lim_{t\to+\infty} \frac{S_{N_t}}{N_t} = \mu\right] \cap \left[\lim_{t\to+\infty} \frac{S_{N_t+1}}{N_t} = \mu\right]\right)}_{=1} \leqslant \mathbb{P}\left(\left[\lim_{t\to+\infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mu}\right]\right)$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}\left(\left[\lim_{t\to+\infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mu}\right]\right) = 1.}$$

□

On va maintenant cherche à montrer que le résultat précédent s'étend en moyenne, c'est-à-dire :

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}\left(\frac{N_t}{t}\right) = \frac{1}{\mu}$$

12. On commence par examiner un contre-exemple qui montre que le résultat ne se déduit pas automatiquement de la question précédente. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose :

$$Y_n = \begin{cases} 0 & \text{si } U > \dfrac{1}{n} \\ n & \text{si } U \leqslant \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

avec la convention $Y_n(\omega) = 0$ pour tout $\omega \in \Omega$ tel que : $U(\omega) = 0$.

Commentaire

- Dans un énoncé de probabilités, on manipule différents niveaux d'objets.
  1) Au premier niveau, on trouve l'expérience aléatoire considérée.
  On note Ω l'univers des possibles : c'est **l'ensemble** des résultats possibles (appelés aussi issues) de l'expérience. Ici, Ω est un ensemble fixé au début du problème par l'énoncé.
  2) Au deuxième niveau, on trouve les événements : un événement A n'est rien d'autre qu'un **ensemble** qui regroupe certaines issues de l'expérience. Ainsi : $A \subset \Omega$.
  On peut écrire : $A = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A\}$.
  Lorsque $\omega \in A$, on dit que ω **réalise** l'événement A.
  3) Au troisième niveau, on trouve les v.a.r. . Ce sont des **applications** particulières :
  - elles prennent comme argument un résultat possible de l'expérience et renvoient une valeur réelle. Par exemple, avec une réalisation $\omega \in \Omega$, la v.a.r. U peut prendre toutes les valeurs réelles entre 0 et 1.
    En effet, d'après l'énoncé, $U \hookrightarrow \mathcal{U}\big([0,1]\big)$, donc : $U(\Omega) = [0,1]$.
  - elles sont des machines à créer des événements. Par exemple, $\left[U \leqslant \frac{1}{n}\right]$ est un événement.
    Il regroupe **toutes** les réalisations ω tels que : $U(\omega) \leqslant \dfrac{1}{n}$.
    Autrement dit : $\left[U \leqslant \frac{1}{n}\right] = \{\omega \in \Omega \mid U(\omega) \leqslant \frac{1}{n}\} \subset \Omega$.

  Ce deuxième point nous replonge au deuxième niveau. Ainsi, pour comprendre le chapitre sur les v.a.r. , il est essentiel de maîtriser celui sur les probabilités générales.
- Les notations $U \leqslant \dfrac{1}{n}$ ou $Y_n = n$ de l'énoncé sont malvenues.
  Écrire $U \leqslant \dfrac{1}{n}$ signifie : $\forall \omega \in \Omega$, $U(\omega) \leqslant \dfrac{1}{n}$. Il n'en est rien. Il faut alors traduire rigoureusement l'énoncé pour comprendre la définition de la v.a.r. Y_n : si $\omega \in \Omega$ vérifie $U(\omega) \leqslant \dfrac{1}{n}$, alors $Y_n(\omega) = n$.
  On peut aussi dire que si la v.a.r. U **prend une valeur** inférieure à $\frac{1}{n}$, alors la v.a.r. Y_n **prend la valeur** n. Mais en aucun cas, il ne faut écrire $Y_n = n$ car cela marque une confusion d'objets.

a) Soit $\omega \in \Omega$. Montrer qu'il existe $N_\omega \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant N_\omega$, on a : $Y_n(\omega) = 0$.

Démonstration.
Soit $\omega \in \Omega$. Comme $U(\Omega) = [0,1]$, deux cas se présentent :

- si $U(\omega) = 0$, alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_n(\omega) = 0$.
  Ainsi, en choisissant $N_\omega = 0$, on obtient : $\forall n \geqslant N_\omega$, $Y_n(\omega) = 0$.

- si $U(\omega) \in]0,1]$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, alors il existe $N_\omega \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant N_\omega$, $\dfrac{1}{n} < U(\omega)$.
Ainsi, par définition de Y_n :
$$\forall n \geqslant N_\omega, \quad Y_n(\omega) = 0$$

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } \omega \in \Omega, \text{ il existe } N_\omega \in \mathbb{N} \text{ tel que : } \forall n \geqslant N_\omega,\ Y_n(\omega) = 0.}$$

□

b) En déduire que l'événement $\left[\lim\limits_{n\to+\infty} Y_n = 0\right]$ a pour probabilité 1.

Démonstration.

- Soit $\omega \in \Omega$.
  - × Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \omega \in \left[\lim_{n\to+\infty} Y_n = 0\right] &\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} Y_n(\omega) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |Y_n(\omega)| \leqslant \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ Y_n(\omega) \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$
(car Y_n est à valeurs positives ($Y_n(\Omega) \subset \{0, n\}$))

  - × Cette dernière assertion est vérifiée. En effet, d'après la question précédente, il existe $N_\omega \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant N_\omega$, $Y_n(\omega) = 0$.
  Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 = N_\omega \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n \geqslant n_0,\ Y_n(\omega) = 0 \leqslant \varepsilon$$
  - × Grâce au raisonnement par équivalence, on en déduit : $\omega \in \left[\lim\limits_{n\to+\infty} Y_n = 0\right]$.
- On a donc démontré :
$$\forall \omega \in \Omega, \quad \omega \in \left[\lim_{n\to+\infty} Y_n = 0\right]$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \Omega = \left[\lim_{n\to+\infty} Y_n = 0\right].}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathbb{P}\left(\left[\lim_{n\to+\infty} Y_n = 0\right]\right) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.}$$

□

c) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$: $\mathbb{E}(Y_n) = 1$. On n'a donc pas : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} Y_n\right)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Par définition de Y_n, on sait : $Y_n(\Omega) \subset \{0, n\}$. La v.a.r. Y_n est donc finie.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } Y_n \text{ admet donc une espérance.}}$$

- De plus :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}(Y_n) & = & \cancel{0 \times \mathbb{P}([Y_n = 0])} + n \times \mathbb{P}([Y_n = n]) & \\
& = & n \times \mathbb{P}\left(\left[U \leqslant \dfrac{1}{n}\right]\right) & \textit{(par définition de } Y_n\textit{)} \\
& = & n\, F_U\left(\dfrac{1}{n}\right) & \\
& = & n \times \dfrac{1}{n} & \textit{(car } U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1]) \textit{ et } \dfrac{1}{n} \in [0,1]\textit{)} \\
& = & 1 &
\end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(Y_n) = 1}$$

Commentaire

- On rappelle que la notation $\lim\limits_{n \to +\infty} Y_n$ désigne la variable aléatoire définie par :

$$\begin{array}{rcl}
\Omega & \to & \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \\
\omega & \to & \lim\limits_{n \to +\infty} Y_n(\omega)
\end{array}$$

  Cette variable aléatoire n'est justement pas toujours bien définie formellement. Il est en effet possible, pour certains $\omega \in \Omega$ que la suite réelle $(Y_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'admette pas de limite.
- En théorie, il faudrait s'assurer de la bonne définition **pour tout** $\omega \in \Omega$ de $\lim\limits_{n \to +\infty} Y_n(\omega)$. Cependant, en probabilités, on se contente souvent de résultats vérifiés *presque sûrement*.
  Ici, la variable aléatoire $\lim\limits_{n \to +\infty} Y_n$ est effectivement bien définie presque sûrement. En effet, d'après la question précédente, la variable aléatoire $\lim\limits_{n \to +\infty} Y_n$ est presque sûrement constante égale à 0.
- Cela nous permet de vérifier le résultat affirmé en fin de question par l'énoncé.
  × D'une part, on sait : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(Y_n) = 1$. Ainsi : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(Y_n) = 1$.
  × D'autre part, d'après la question précédente, la variable aléatoire $\lim\limits_{n \to +\infty} Y_n$ est presque sûrement constante égale à 0. Ainsi : $\mathbb{E}\left(\lim\limits_{n \to +\infty} Y_n\right) = 0$.

  On en déduit bien : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(Y_n) \xcancel{=} \mathbb{E}\left(\lim\limits_{n \to +\infty} Y_n\right)$.

□

13. Soit J une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note : $S_J = \sum\limits_{k=1}^{J} X_k$.

a) Démontrer : $S_J = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} X_k \, \mathbb{1}_{[J \geqslant k]}$ où $\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \notin A \\ 1 & \text{si } \omega \in A \end{cases}$

Commentaire

- L'énoncé introduit ici la définition de variable aléatoire indicatrice. Ce type de v.a.r. ne fait pas partie du programme d'ECE. Donnons néanmoins certaines de leurs propriétés.
  - × Loi de $\mathbb{1}_A$.
    - Par définition de $\mathbb{1}_A$, cette v.a.r. ne prend comme valeur que 0 et 1.
      Donc $\mathbb{1}_A(\Omega) = \{0, 1\}$.
    - Soit $\omega \in \Omega$.
      $$\omega \in [\mathbb{1}_A = 1] \ \Leftrightarrow \ \mathbb{1}_A(\omega) = 1 \ \Leftrightarrow \ \omega \in A$$
      D'où : $[\mathbb{1}_A = 1] = A$. Ainsi : $\mathbb{P}([\mathbb{1}_A = 1]) = \mathbb{P}(A)$.

    On en déduit : $\mathbb{1}_A \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\mathbb{P}(A)\right)$.
  - × En particulier :
    $$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)\big(1 - \mathbb{P}(A)\big)$$
- Il peut aussi être utilise de savoir démontrer les propriétés suivantes.
  Soient B et C deux événements.
  1) $\mathbb{1}_{B \cap C} = \mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_C$
  2) $\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_{\overline{B}} = 1$
  Pour la démonstration de la propriété ***1)***, on pourra se référer sujet `ESSEC-II 2018`.
  La propriété ***2)*** est démontrée dans la remarque de la question ***13.b)***.

Démonstration.
Soit $\omega \in \Omega$.
Comme la famille $\big(\, [J = j] \, \big)_{j \in \mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements, alors il existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\omega \in [J = j_0]$. D'où :
$$J(\omega) \ = \ j_0$$
On en déduit :

- d'une part :$S_{J(\omega)}(\omega) = S_{j_0}(\omega) = \sum\limits_{k=1}^{j_0} X_k(\omega)$.
- d'autre part :
  - × comme $J(\omega) = j_0$, alors : $\forall k \in [\![1, j_0]\!]$, $J(\omega) = j_0 \geqslant k$. Donc :
    $$\forall k \in [\![1, j_0]\!], \quad \omega \in [J \geqslant k]$$
    On en déduit, par définition des v.a.r. indicatrices :
    $$\forall k \in [\![1, j_0]\!], \quad \mathbb{1}_{[J \geqslant k]}(\omega) = 1$$
  - × toujours comme $J(\omega) = j_0$, alors : $\forall k \in [\![j_0 + 1, +\infty[\![$, $\omega \notin [J \geqslant k]$.
    On en déduit, par définition des v.a.r. indicatrices :
    $$\forall k \in [\![j_0 + 1, +\infty[\![, \quad \mathbb{1}_{[J \geqslant k]}(\omega) = 0$$

On en conclut :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} X_k(\omega)\, \mathbb{1}_{[J\geqslant k]}(\omega) &= \sum_{k=1}^{j_0} X_k(\omega)\, \mathbb{1}_{[J\geqslant k]}(\omega) + \sum_{k=j_0+1}^{+\infty} X_k(\omega)\, \mathbb{1}_{[J\geqslant k]}(\omega) \\ &= \sum_{k=1}^{j_0} X_k(\omega) \times 1 + \cancel{\sum_{k=j_0+1}^{+\infty} X_k(\omega) \times 0} \\ &= \sum_{k=1}^{j_0} X_k(\omega)\end{aligned}$$

On a démontré : $\forall \omega \in \Omega,\ S_{J(\omega)}(\omega) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} X_k(\omega)\, \mathbb{1}_{[J\geqslant k]}(\omega)$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } S_J = \sum_{k=1}^{+\infty} X_k\, \mathbb{1}_{[J\geqslant k]}.}$$

□

On suppose désormais que J vérifie la propriété suivante : pour tout entier $n \geqslant 1$, la variable $\mathbb{1}_{[J\leqslant n]}$ est indépendante des variables X_{n+1}, X_{n+2}, ... On **admettra** que si $(W_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires positives, l'écriture formelle $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}(W_n) = \mathbb{E}\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} W_n\right)$ est toujours valide sous réserve d'existence.

Commentaire

- Une fois encore, l'énoncé demande aux candidats de manipuler une notation non définie : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} W_n$. Explicitons la.
  - × Comme les v.a.r. $(W_k)_{k\geqslant 1}$ sont des v.a.r. à valeurs positives, pour tout $\omega \in \Omega$, la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} W_k(\omega)\right)_{n\geqslant 1}$ est croissante. Ainsi, par théorème de la limite monotone, deux cas se présentent :
    - soit cette suite est de plus majorée, et elle est alors convergente.
      On peut alors définir le réel $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} W_k(\omega)$.
    - soit cette suite est de plus non majorée, et alors elle diverge vers $+\infty$.
      Dans ce cas, on considère $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} W_k(\omega) = +\infty$.
  - × On définit donc la variable aléatoire $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} W_k$ de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ \omega & \mapsto & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} W_k(\omega) \end{array}$$

- Avec la formulation « sous réserve d'existence », l'énoncé se dédouane de toute explication sur l'existence des objets manipulés. Il faut en fait comprendre par cette formulation qu'on s'autorise tous les calculs du type cité dans l'énoncé (linéarité de l'espérance pour des sommes infinies de v.a.r.) sans aucune justification.

b) Montrer que les variables aléatoires X_k et $\mathbb{1}_{[J \geqslant k]}$ sont indépendantes.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{1}_{[J \geqslant k]} & = & 1 - \mathbb{1}_{\overline{[J \geqslant k]}} & \\ & = & 1 - \mathbb{1}_{[J < k]} & \\ & = & 1 - \mathbb{1}_{[J \leqslant k-1]} & \textit{(car } J \textit{ est à valeurs entières)} \end{array}$$

Or, d'après l'énoncé, la v.a.r. $\mathbb{1}_{[J \leqslant k-1]}$ est indépendante de X_k, X_{k+1}, ...

Par lemme des coalitions, les v.a.r. $\mathbb{1}_{[J \geqslant k]} = 1 - \mathbb{1}_{[J \leqslant k-1]}$ et X_k sont indépendantes.

Commentaire

On utilise ici la propriété plus générale suivante : $\forall A \in \mathscr{A}$, $\mathbb{1}_A = 1 - \mathbb{1}_{\overline{A}}$.Démontrons la.
Soit $A \in \mathscr{A}$. Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent :

× si $\omega \in A$, alors :
- par définition de $\mathbb{1}_A$, on a : $\mathbb{1}_A(\omega) = 1$.
- comme $\omega \notin \overline{A}$, par définition de $\mathbb{1}_{\overline{A}}$, on a : $\mathbb{1}_{\overline{A}}(\omega) = 0$. Ainsi : $1 - \mathbb{1}_{\overline{A}}(\omega) = 1$.

On en déduit : $\mathbb{1}_A(\omega) = 1 - \mathbb{1}_{\overline{A}}(\omega)$.

× si $\omega \notin A$, alors :
- par définition de $\mathbb{1}_A$, on a : $\mathbb{1}_A(\omega) = 0$.
- comme $\omega \in \overline{A}$, par définition de $\mathbb{1}_{\overline{A}}$, on a : $\mathbb{1}_{\overline{A}}(\omega) = 1$. Ainsi : $1 - \mathbb{1}_{\overline{A}}(\omega) = 0$.

On en déduit : $\mathbb{1}_A(\omega) = 1 - \mathbb{1}_{\overline{A}}(\omega)$.

On a démontré : $\forall \omega \in \Omega$, $\mathbb{1}_A(\omega) = 1 - \mathbb{1}_{\overline{A}}(\omega)$. D'où : $\mathbb{1}_A = 1 - \mathbb{1}_{\overline{A}}$.

□

c) Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

(i) Démontrer : $U = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{[U \geqslant n]}$.

Démonstration.
Soit $\omega \in \Omega$.

- Comme la famille $\big([U = k]\big)_{k \in \mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $U(\omega) = k_0$.
- Avec le même raisonnement qu'en question ***13.a)*** :
  × $\forall n \in [\![1, k_0]\!]$, $\mathbb{1}_{[U \geqslant n]}(\omega) = 1$
  × $\forall n \in [\![k_0 + 1, +\infty[\![$, $\mathbb{1}_{[U \geqslant n]}(\omega) = 0$

  On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{[U \geqslant n]}(\omega) & = & \sum\limits_{n=1}^{k_0} \mathbb{1}_{[U \geqslant n]}(\omega) + \sum\limits_{n=k_0+1}^{+\infty} \mathbb{1}_{[U \geqslant n]}(\omega) \\ & = & \sum\limits_{n=1}^{k_0} 1 + \cancel{\sum\limits_{n=k_0+1}^{+\infty} 0} \\ & = & k_0 \end{array}$$

On obtient : $\forall \omega \in \Omega$, $U(\omega) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{[U \geqslant n]}(\omega)$.

Finalement : $U = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{[U \geqslant n]}$.

□

(ii) Démontrer : $\mathbb{E}(U) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([U \geqslant n])$.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $U = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{[U \geqslant n]}$.
  Ainsi, sous réserve d'existence, d'après la propriété de l'énoncé :

$$\mathbb{E}(U) \; = \; \mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{[U \geqslant n]}\right) \; = \; \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{[U \geqslant n]}\right)$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrons : $\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{[U \geqslant n]}\right) = \mathbb{P}\big(\, [U \geqslant n] \,\big)$.
  - × Tout d'abord, par définition de la v.a.r. $\mathbb{1}_{[U \geqslant n]}$, on a : $\mathbb{1}_{[U \geqslant n]}(\Omega) \subset \{0, 1\}$.
  - × Soit $\omega \in \Omega$.

$$\omega \in \left[\mathbb{1}_{[U \geqslant n]} = 1\right] \;\Leftrightarrow\; \mathbb{1}_{[U \geqslant n]}(\omega) = 1 \;\Leftrightarrow\; \omega \in [U \geqslant n]$$

  D'où : $\left[\mathbb{1}_{[U \geqslant n]} = 1\right] = [U \geqslant n]$. Ainsi : $\mathbb{P}\big(\, \left[\mathbb{1}_{[U \geqslant n]} = 1\right] \,\big) = \mathbb{P}\big(\, [U \geqslant n] \,\big)$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit, pour tout } n \in \mathbb{N}^* : \mathbb{1}_{[U \geqslant n]} \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\mathbb{P}\big(\, [U \geqslant n] \,\big)\right). \\ \text{D'où : } \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{[U \geqslant n]}\right) = \mathbb{P}\big(\, [U \geqslant n] \,\big).\end{array}}$$

$$\boxed{\text{Finalement, sous réserve d'existence : } \mathbb{E}(U) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\, [U \geqslant n] \,\big).}$$

□

d) Démontrer : $\mathbb{E}(S_J) = \mathbb{E}(X_1)\,\mathbb{E}(J) = \mu\,\mathbb{E}(J)$.

Démonstration.

- D'après ***13.b)*** : $S_J = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} X_k\, \mathbb{1}_{[J \geqslant k]}$.
  Ainsi, d'après la propriété admise par l'énoncé, sous réserve d'existence :

$$\mathbb{E}(S_j) \; = \; \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} X_k\, \mathbb{1}_{[J \geqslant k]}\right) \; = \; \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}\left(X_k\, \mathbb{1}_{[J \geqslant k]}\right)$$

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
  D'après ***13.b)***, les v.a.r. X_k et $\mathbb{1}_{[J \geqslant k]}$ sont indépendantes. On en déduit :

$$\mathbb{E}\left(X_k\, \mathbb{1}_{[J \geqslant k]}\right) \; = \; \mathbb{E}(X_k)\, \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{[J \geqslant k]}\right)$$

  Or :
  - × comme les v.a.r. de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ont même loi, on en déduit :

$$\mathbb{E}(X_k) \; = \; \mathbb{E}(X_1)$$

  - × comme $\mathbb{1}_{[J \geqslant k]} \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\mathbb{P}\big(\, [J \geqslant k] \,\big)\right)$, alors :

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{[J \geqslant k]}\right) \; = \; \mathbb{P}\big(\, [J \geqslant k] \,\big)$$

- On obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_J) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}\left(X_k \, \mathbb{1}_{[J \geqslant k]}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}(X_k)\, \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{[J \geqslant k]}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}(X_1)\, \mathbb{P}\big([J \geqslant k]\big) \\
&= \mathbb{E}(X_1) \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([J \geqslant k]\big) \\
&= \mathbb{E}(X_1)\ \mathbb{E}(J) \qquad \textit{(d'après } \textbf{\textit{13.c)(ii)}}\textit{)}
\end{aligned}$$

Finalement, sous réserve d'existence : $\mathbb{E}(S_j) = \mathbb{E}(X_1)\, \mathbb{E}(J) = \mu\, \mathbb{E}(J)$.

□

14. a) Soient un réel $t > 0$ et un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $J = N_t + 1$. Montrer que la variable aléatoire $\mathbb{1}_{[J \leqslant n]}$ est indépendante de X_{n+1}, X_{n+2}, ...

Démonstration.

- Par définition de la v.a.r. J :

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{[J \leqslant n]} &= \mathbb{1}_{[N_t+1 \leqslant n]} \\
&= \mathbb{1}_{[N_t \leqslant n-1]} \\
&= \mathbb{1}_{[N_t < n]} \qquad \textit{(car } N_t \textit{ est à valeurs entières)} \\
&= 1 - \mathbb{1}_{\overline{[N_t < n]}} \\
&= 1 - \mathbb{1}_{[N_t \geqslant n]} \\
&= 1 - \mathbb{1}_{[S_n \leqslant t]} \qquad \textit{(d'après } \textbf{\textit{6.b)}}\textit{)}
\end{aligned}$$

- Or, comme $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a.r. indépendantes, alors, par lemme des coalitions, la v.a.r. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ est indépendante de X_{n+1}, X_{n+2}, ...

On en déduit, toujours par lemme des coalitions, que la v.a.r. $\mathbb{1}_{[J \leqslant n]} = 1 - \mathbb{1}_{[S_n \leqslant t]}$ est indépendante de X_{n+1}, X_{n+2}, ...

□

b) En déduire que $\mathbb{E}(S_{N_t+1}) = \mu \left(\mathbb{E}(N_t) + 1\right)$ puis que $\mathbb{E}(N_t) = \dfrac{\mathbb{E}(S_{N_t+1})}{\mu} - 1$.

Démonstration.

- En posant $J = N_t + 1$, alors :
  - × tout d'abord : $S_{N_t+1} = S_J$,
  - × ensuite, la v.a.r. J est à valeurs dans $\mathbb{N}$,
  - × enfin, d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la v.a.r. $\mathbb{1}_{[J \leqslant n]}$ est indépendante de X_{n+1}, X_{n+2}, ...

On est donc bien dans le cadre d'application de la question ***13.***. On en déduit, sous réserve d'existence :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}\left(S_{N_t+1}\right) & = & \mathbb{E}(S_J) & \\ & = & \mu\,\mathbb{E}(J) & \\ & = & \mu\mathbb{E}\left(N_t+1\right) & \\ & = & \mu\big(\mathbb{E}(N_t)+1\big) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Sous réserve d'existence : } \mathbb{E}\left(S_{N_t+1}\right) = \mu\big(\mathbb{E}(N_t)+1\big).}$$

- On en conclut, comme $\mu \neq 0$ (d'après ***1.a)(iii)***) :

$$\frac{\mathbb{E}\left(S_{N_t+1}\right)}{\mu} \ = \ \mathbb{E}(N_t)+1$$

$$\boxed{\text{Finalement, sous réserve d'existence : } \mathbb{E}(N_t) = \frac{\mathbb{E}\left(S_{N_t+1}\right)}{\mu} - 1.}$$

□

15. Montrer que pour tout $t > 0$: $\dfrac{\mathbb{E}(N_t)}{t} \geqslant \dfrac{1}{\mu} - \dfrac{1}{t}$.

Démonstration.
Soit $t > 0$.

- D'après la question précédente : $\mathbb{E}(N_t) = \dfrac{\mathbb{E}\left(S_{N_t+1}\right)}{\mu} - 1$.
- De plus, d'après ***11.a)*** : $S_{N_t+1} > t$.
  Par croissance de l'espérance, sous réserve d'existence :

$$\begin{array}{rccl} & \mathbb{E}\left(S_{N_t+1}\right) & > & t \\ \text{donc} & \dfrac{\mathbb{E}\left(S_{N_t+1}\right)}{\mu} & > & \dfrac{t}{\mu} \qquad \textit{(car } \mu > 0\textit{)} \\ \text{d'où} & \dfrac{\mathbb{E}\left(S_{N_t+1}\right)}{\mu} - 1 & > & \dfrac{t}{\mu} - 1 \\ \text{ainsi} & \mathbb{E}(N_t) & > & \dfrac{t}{\mu} - 1 \end{array}$$

- On en déduit, comme $t > 0$:

$$\frac{\mathbb{E}(N_t)}{t} \ > \ \frac{\frac{t}{\mu}-1}{t}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } t > 0 \text{, sous réserve d'existence : } \frac{\mathbb{E}(N_t)}{t} > \frac{1}{\mu} - \frac{1}{t}.}$$

□

16. Soit $b > 0$. On pose : $\tilde{X}_i = \min(b, X_i)$.

a) Montrer que les variables $\tilde{X}_i$ forment une suite de variables aléatoires indépendantes, positives et de même loi.

Démonstration.
On note $f : x \mapsto \min(b, x)$ de sorte que :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \tilde{X}_i \ = \ f(X_i)$$

On en déduit :

- tout d'abord, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{rcll} \tilde{X}_i(\Omega) & = & \big(f(X)\big)(X_i) & \\ & = & f\big(X_i(\Omega)\big) & \\ & \subset & f(\mathbb{R}_+) & \textit{(car } X_i \textit{ est à valeurs positives)} \end{array}$$

  Or, comme $b \geqslant 0$: $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\min(b,x) \in \mathbb{R}_+$. Ainsi : $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$.
  D'où : $\tilde{X}_i(\Omega) \subset f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$.

  $\boxed{\text{On obtient bien que, pour tout } i \in \mathbb{N}^*, \text{ la v.a.r. } \tilde{X}_i \text{ est à valeurs positives.}}$

- comme les v.a.r. de la suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ ont même loi, celles de la suite $\big(f(X_i)\big)_{i\in\mathbb{N}^*}$ aussi.

  $\boxed{\text{On en déduit que les v.a.r. de la suite } \big(\tilde{X}_i\big)_{i\in\mathbb{N}^*} \text{ suivent la même loi.}}$

- comme $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a.r. indépendantes, alors, par lemme des coalitions, $\big(\tilde{X}_i\big)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a.r. indépendantes.

  $\boxed{\text{La suite } \big(\tilde{X}_i\big)_{i\in\mathbb{N}^*} \text{ est une suite de v.a.r. indépendantes.}}$

□

b) On pose $\tilde{S}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{X}_i$ et $\tilde{\mu}_b = \mathbb{E}(\tilde{X}_1)$. On considère le processus de renouvellement $\tilde{N}_t$ associé aux $\tilde{X}_i$.

(i) Démontrer : $\forall n \geqslant 1$, $\tilde{S}_n \leqslant S_n$.

Démonstration.

- Tout d'abord, par définition du minimum, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$:

$$\underbrace{\min(b, X_i)}_{=\ \tilde{X}_i} \leqslant X_i$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En sommant les inégalités précédentes pour i variant de 1 à n, on obtient :

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \tilde{X}_i}_{=\ \tilde{S}_n} \leqslant \underbrace{\sum_{i=1}^{n} X_i}_{=\ S_n}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \tilde{S}_n \leqslant S_n}$$

□

(ii) Démontrer : $\forall t \geqslant 0$, $\tilde{N}_t \geqslant N_t$.

Démonstration.
Soit $t \geqslant 0$. Soit $\omega \in \Omega$.

- En raisonnant comme en ***6.b)***, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \tilde{N}_t(\omega) \geqslant n \ \Leftrightarrow\ \tilde{S}_n(\omega) \leqslant t$$

  En appliquant cette propriété à $n = N_t(\omega) \in \mathbb{N}$, on obtient :

$$\tilde{N}_t(\omega) \geqslant N_t(\omega) \ \Leftrightarrow\ \tilde{S}_{N_t(\omega)}(\omega) \leqslant t$$

  Pour montrer : $\tilde{N}_t(\omega) \geqslant N_t(\omega)$, on va donc démontrer : $\tilde{S}_{N_t(\omega)}(\omega) \leqslant t$.

- D'après ***11.a)*** : $S_{N_t(\omega)}(\omega) \leqslant t$.
  Or, d'après la question précédente : $\tilde{S}_{N_t(\omega)}(\omega) \leqslant S_{N_t(\omega)}(\omega)$. D'où, par transitivité :

$$\tilde{S}_{N_t(\omega)}(\omega) \ \leqslant \ S_{N_t(\omega)}(\omega) \ \leqslant \ t$$

  On en déduit, avec le premier point : $\tilde{N}_t(\omega) \geqslant N_t(\omega)$.

  Ceci étant vérifié pour tout $\omega \in \Omega$, on en déduit : $\forall t \geqslant 0,\ \tilde{N}_t \geqslant N_t$.

$\square$

(iii) Démontrer : $\forall t \geqslant 0,\ \tilde{S}_{\tilde{N}_t+1} \leqslant t+b$.

Démonstration.
Soit $t \geqslant 0$.

- Tout d'abord, par définition de la v.a.r. $\tilde{S}_{\tilde{N}_t+1}$, on sait : $\tilde{S}_{\tilde{N}_t+1} = \tilde{S}_{\tilde{N}_t} + \tilde{X}_{\tilde{N}_t+1}$.
- Or :
  - × avec le même raisonnement qu'en question ***11.a)*** : $\tilde{S}_{\tilde{N}_t} \leqslant t$.
  - × par définition du minimum : $\tilde{X}_{\tilde{N}_t+1} = \min\left(b, X_{\tilde{N}_t}\right) \leqslant b$.

On en déduit : $\forall t \geqslant 0,\ \tilde{S}_{\tilde{N}_t+1} \leqslant t+b$.

$\square$

c) (i) Montrer que pour tout réel $t \in \mathbb{R}_+^*$: $\dfrac{\mathbb{E}(\tilde{N}_t)}{t} = \dfrac{\mathbb{E}(\tilde{S}_{\tilde{N}_t+1})}{t\,\tilde{\mu}_b} - \dfrac{1}{t}$.

Démonstration.
Soit $t \in \mathbb{R}_+$.

- Commençons par démontrer que la v.a.r. $\tilde{S}_{\tilde{N}_t+1}$ admet une espérance. En effet :
  - × d'après ***16.b)(iii)*** : $\tilde{S}_{\tilde{N}_t+1} \leqslant t+b$,
  - × la v.a.r. $\tilde{S}_{\tilde{N}_t+1}$ et la v.a.r. constante égale à $t+b$ sont positives (car $b \geqslant 0$, $t \geqslant 0$ et les v.a.r. de la suite $\left(\tilde{X}_i\right)_{i\in\mathbb{N}^*}$ le sont),
  - × la v.a.r. constante $t+b$ admet une espérance.

  Ainsi, d'après le résultat admis dans le préambule de l'énoncé, la v.a.r. $\tilde{S}_{\tilde{N}_t+1}$ admet une espétance (et $\mathbb{E}\left(\tilde{S}_{\tilde{N}_t+1}\right) \leqslant t+b$).

- En raisonnant comme en question ***14.***, on obtient :

$$\mathbb{E}\left(\tilde{S}_{\tilde{N}_t+1}\right) \ = \ \tilde{\mu}_b\left(\mathbb{E}\left(\tilde{N}_t\right)+1\right)$$

  Notons que, comme la v.a.r. $\tilde{S}_{\tilde{N}_t+1}$ admet une espérance, la réserve d'existence de l'espérance $\mathbb{E}\left(\tilde{N}_t\right)$ est levée.

  La v.a.r. $\tilde{N}_t$ admet une espérance et : $\mathbb{E}\left(\tilde{S}_{\tilde{N}_t+1}\right) = \tilde{\mu}_b\left(\mathbb{E}\left(\tilde{N}_t\right)+1\right)$.

- Démontrons maintenant : $\tilde{\mu}_b > 0$. Pour cela, on démontre que la v.a.r. $\tilde{X}_1$ vérifie les mêmes propriétés que la v.a.r. X_1.
  - × tout d'abord, d'après ***16.a)***, la v.a.r. $\tilde{X}_1$ est à valeurs positives.
  - × De plus :

$$\begin{array}{rcll} F_{\tilde{X}_1}(0) & = & \mathbb{P}\big(\left[\tilde{X}_1 \leqslant 0\right]\big) & \\ & = & \mathbb{P}\big([\min(b, X_1) \leqslant 0]\big) & \\ & = & 1 - \mathbb{P}\big([\min(b, X_1) > 0]\big) & \\ & = & 1 - \mathbb{P}\big([b > 0] \cap [X_1 > 0]\big) & \\ & = & 1 - \mathbb{P}\big(\Omega \cap [X_1 > 0]\big) & \textit{(car, d'après l'énoncé : } b > 0\textit{)} \\ & = & 1 - \mathbb{P}\big([X_1 > 0]\big) & \\ & = & \mathbb{P}\big([X \leqslant 0]\big) & \\ & = & F(0) \ < \ 1 & \textit{(d'après l'énoncé)} \end{array}$$

  - × enfin, comme :
    - les v.a.r. X_1 et $\tilde{X}_1$ sont à valeurs positives,
    - par définition du minimum : $\tilde{X}_1 \leqslant X_1$.
      Par croissance de $x \mapsto x^4$ sur $\mathbb{R}_+$, on obtient : $\tilde{X}_1^4 \leqslant X_1^4$.
    - la v.a.r. X_1^4 admet une espérance car X_1 admet un moment d'ordre 4.

    alors, d'après le résultat du préambule de l'énoncé, la v.a.r. $\tilde{X}_1^4$ admet une espérance. Autrement dit, la v.a.r. $\tilde{X}_1$ admet un moment d'ordre 4.

  Finalement, les v.a.r. X_1 et $\tilde{X}_1$ vérifie les mêmes propriétés.

Avec le même raisonnement qu'en ***1.a)(iii)***, on obtient donc : $\tilde{\mu}_b > 0$.

- Avec le 2ème point de la démonstration de cette question : $\mathbb{E}\left(\tilde{S}_{\tilde{N}_t+1}\right) = \tilde{\mu}_b \left(\mathbb{E}(\tilde{N}_t) + 1\right)$.
  Comme $t\,\tilde{\mu}_b > 0$, alors :

$$\frac{\mathbb{E}\left(\tilde{S}_{\tilde{N}_t+1}\right)}{t\,\tilde{\mu}_b} = \frac{\tilde{\mu}_b \left(\mathbb{E}(\tilde{N}_t) + 1\right)}{t\,\tilde{\mu}_b}$$

On en déduit : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{\mathbb{E}(\tilde{N}_t)}{t} = \dfrac{\mathbb{E}(\tilde{S}_{\tilde{N}_t+1})}{t\,\tilde{\mu}_b} - \dfrac{1}{t}$.

□

(ii) En déduire que pour tout réel $b > 0$:

$$\frac{\mathbb{E}(N_t)}{t} \leqslant \frac{\mathbb{E}(\tilde{N}_t)}{t} \leqslant \frac{t+b}{t\,\tilde{\mu}_b}$$

Démonstration.

- Soit $b > 0$. Soit $t > 0$. Tout d'abord, on sait que :
  - × les v.a.r. $\tilde{N}_t$ et N_t sont à valeurs positives,
  - × d'après ***16.b)(ii)*** : $N_t \leqslant \tilde{N}_t$,
  - × la v.a.r. $\tilde{N}_t$ admet une espérance d'après la question précédente.

D'après le résultat admis dans le préambule de l'énoncé, la v.a.r. N_t admet une espérance.

- De plus, d'après ce même résultat : $\mathbb{E}(N_t) \leqslant \mathbb{E}(\tilde{N}_t)$. Donc, comme $t > 0$:

$$\frac{\mathbb{E}(N_t)}{t} \leqslant \frac{\mathbb{E}(\tilde{N}_t)}{t}$$

$$\boxed{\forall b > 0, \forall t > 0, \frac{\mathbb{E}(N_t)}{t} \leqslant \frac{\mathbb{E}(\tilde{N}_t)}{t}}$$

- Soit $b > 0$. Soit $t > 0$.
  D'après le 1er point de la question précédente, la v.a.r. $\tilde{S}_{\tilde{N}_t+1}$ admet une espérance et :

$$\begin{array}{lrcll} & \mathbb{E}\left(\tilde{S}_{\tilde{N}_t+1}\right) & \leqslant & t+b & \\ \text{donc} & \dfrac{\mathbb{E}\left(\tilde{S}_{\tilde{N}_t+1}\right)}{t\,\tilde{\mu}_b} & \leqslant & \dfrac{t+b}{t\,\tilde{\mu}_b} & \textit{(car } \tilde{\mu}_b > 0 \textit{ d'après la question précédente)} \\ \text{d'où} & \dfrac{\mathbb{E}\left(\tilde{S}_{\tilde{N}_t+1}\right)}{t\,\tilde{\mu}_b} - \dfrac{1}{t} & \leqslant & \dfrac{t+b}{t\,\tilde{\mu}_b} - \dfrac{1}{t} & \\ \text{ainsi} & \dfrac{\mathbb{E}(\tilde{N}t)}{t} & \leqslant & \dfrac{t+b}{t\,\tilde{\mu}_b} - \dfrac{1}{t} & \textit{(d'après la question précédente)} \end{array}$$

  Or : $\frac{1}{t} > 0$. On en déduit : $\frac{t+b}{t\,\tilde{\mu}_b} - \frac{1}{t} \leqslant \frac{t+b}{t\,\tilde{\mu}_b}$. Ainsi :

$$\frac{\mathbb{E}(\tilde{N}t)}{t} \leqslant \frac{t+b}{t\,\tilde{\mu}_b} - \frac{1}{t} \leqslant \frac{t+b}{t\,\tilde{\mu}_b}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall b > 0, \forall t > 0, \frac{\mathbb{E}(\tilde{N}t)}{t} \leqslant \frac{t+b}{t\,\tilde{\mu}_b}.}$$

□

d) On choisit : $b = \sqrt{t}$.

(i) Démontrer :

$$\frac{\mathbb{E}(N_t)}{t} \leqslant \frac{t+\sqrt{t}}{t\,\mathbb{E}\big(\min(\sqrt{t}, X_1)\big)}$$

Démonstration.
Soit $t > 0$. D'après la question ***16.c)(iii)*** appliquée à $b = \sqrt{t} > 0$:

$$\frac{\mathbb{E}(N_t)}{t} \leqslant \frac{t+\sqrt{t}}{t\,\tilde{\mu}_{\sqrt{t}}}$$

Or, par définition de $\tilde{\mu}_{\sqrt{t}}$:

$$\tilde{\mu}_{\sqrt{t}} = \mathbb{E}(\tilde{X}_1) = \mathbb{E}\big(\min(\sqrt{t}, X_1)\big)$$

$$\boxed{\text{D'où : } \forall t > 0, \frac{\mathbb{E}(N_t)}{t} \leqslant \frac{t+\sqrt{t}}{t\,\mathbb{E}\big(\min(\sqrt{t}, X_1)\big)}.}$$

□

(ii) Démontrer : $0 \leqslant X_1 - \min(\sqrt{t}, X_1) \leqslant X_1 \, \mathbb{1}_{[X_1 > \sqrt{t}]}$.

Démonstration.

- Tout d'abord, on a déjà démontré en question ***16.c)(i)*** : $\tilde{X}_1 \leqslant X_1$. Autrement dit :

$$\min\left(\sqrt{t}, X_1\right) \ \leqslant \ X_1$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } 0 \leqslant X_1 - \min\left(\sqrt{t}, X_1\right).}$$

- Démontrons : $X_1 - \min\left(\sqrt{t}, X_1\right) \leqslant X_1 \, \mathbb{1}_{[X_1 > \sqrt{t}]}$.
Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent :
  - × si $X_1(\omega) > \sqrt{t}$, alors :
    - d'une part : $\min\left(\sqrt{t}, X_1(\omega)\right) = \sqrt{t}$. D'où :

$$X_1(\omega) - \min\left(\sqrt{t}, X_1(\omega)\right) \ = \ X_1(\omega) - \sqrt{t}$$

    - d'autre part : $\omega \in \left[X_1 > \sqrt{t}\right]$. Donc : $\mathbb{1}_{[X_1 > \sqrt{t}]}(\omega) = 1$. D'où :

$$X_1(\omega) \, \mathbb{1}_{[X_1 > \sqrt{t}]}(\omega) \ = \ X_1(\omega) \times 1 \ = \ X_1(\omega)$$

    De plus, comme $t \geqslant 0$, alors : $\sqrt{t} \geqslant 0$. Donc :

$$\begin{array}{ccc} X_1(\omega) - \sqrt{t} & \leqslant & X_1(\omega) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ X_1(\omega) - \min\left(\sqrt{t}, X_1(\omega)\right) & & X_1(\omega) \, \mathbb{1}_{[X_1 > \sqrt{t}]}(\omega) \end{array}$$

  - × si $X_1(\omega) \leqslant \sqrt{t}$, alors :
    - d'une part : $\min\left(\sqrt{t}, X_1(\omega)\right) = X_1(\omega)$. D'où :

$$X_1(\omega) - \min\left(\sqrt{t}, X_1(\omega)\right) \ = \ X_1(\omega) - X_1(\omega) \ = \ 0$$

    - d'autre part : $\omega \notin \left[X_1 > \sqrt{t}\right]$. Donc : $\mathbb{1}_{[X_1 > \sqrt{t}]}(\omega) = 0$. D'où :

$$X_1(\omega) \, \mathbb{1}_{[X_1 > \sqrt{t}]}(\omega) \ = \ X_1(\omega) \times 0 \ = \ 0$$

    Ainsi : $X_1(\omega) - \min\left(\sqrt{t}, X_1(\omega)\right) = X_1(\omega) \, \mathbb{1}_{[X_1 > \sqrt{t}]}(\omega)$. D'où :

$$X_1(\omega) - \min\left(\sqrt{t}, X_1(\omega)\right) \ \leqslant \ X_1(\omega) \, \mathbb{1}_{[X_1 > \sqrt{t}]}(\omega)$$

  Finalement : $\forall \omega \in \Omega,\ X_1(\omega) - \min\left(\sqrt{t}, X_1(\omega)\right) \leqslant X_1(\omega) \, \mathbb{1}_{[X_1 > \sqrt{t}]}(\omega)$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } X_1 - \min\left(\sqrt{t}, X_1\right) \leqslant X_1 \, \mathbb{1}_{[X_1 > \sqrt{t}]}.}$$

□

(iii) En déduire : $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathbb{E}\big(\min(\sqrt{t}, X_1)\big) = \mu$.

Démonstration.
Soit $t > 0$.

- Démontrons que la v.a.r. $X_1\, \mathbb{1}_{[X_1>\sqrt{t}]}$ admet une espérance.
  - × Tout d'abord : $X_1\, \mathbb{1}_{[X_1>\sqrt{t}]} \leqslant X_1$. En effet, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$\begin{array}{rcll} X_1(\omega) & = & X_1(\omega) \times 1 & \\ & = & X_1(\omega) \left(\mathbb{1}_{[X_1>\sqrt{t}]}(\omega) + \mathbb{1}_{\overline{[X_1>\sqrt{t}]}}(\omega)\right) & \textit{(car : } \forall A \in \mathscr{A},\ 1 = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{\overline{A}}\textit{)} \\ & = & X_1(\omega)\, \mathbb{1}_{[X_1>\sqrt{t}]}(\omega) + X_1(\omega)\, \mathbb{1}_{\overline{[X_1>\sqrt{t}]}}(\omega) & \\ & \geqslant & X_1(\omega)\, \mathbb{1}_{[X_1>\sqrt{t}]}(\omega) & \textit{(car les v.a.r. } X_1 \textit{ et } \mathbb{1}_{[X_1\leqslant\sqrt{t}]} \textit{ sont à valeurs positives)} \end{array}$$

  - × On obtient alors :
    - d'après ce qui précède : $X_1\, \mathbb{1}_{[X_1>\sqrt{t}]} \leqslant X_1$.
    - les v.a.r. X_1 et $X_1\, \mathbb{1}_{[X_1>\sqrt{t}]}$ sont à valeurs positives,
    - la v.a.r. X_1 admet une espérance.

D'après le résultat admis dans le préambule de l'énoncé, la v.a.r. $X_1\, \mathbb{1}_{[X_1>\sqrt{t}]}$ admet une espérance et : $\mathbb{E}\big(X_1\, \mathbb{1}_{[X_1>\sqrt{t}]}\big) \leqslant \mathbb{E}(X_1) = \mu$.

- On en déduit que la v.a.r. $X_1 - \min\big(\sqrt{t}, X_1\big)$ admet une espérance. En effet :
  - × les v.a.r. $X_1 - \min\big(\sqrt{t}, X_1\big)$ et $X_1\, \mathbb{1}_{[X_1>\sqrt{t}]}$ sont à valeurs positives d'après ***16.d)(ii)***,
  - × toujours d'après ***16.d)(ii)*** : $0 \leqslant X_1 - \min\big(\sqrt{t}, X_1\big) \leqslant X_1\, \mathbb{1}_{[X_1>\sqrt{t}]}$,
  - × la v.a.r. $X_1\, \mathbb{1}_{[X_1>\sqrt{t}]}$ admet une espérance.

D'après le résultat admis dans le préambule de l'énoncé, la v.a.r. $X_1 - \min\big(\sqrt{t}, X_1\big)$ admet une espérance et : $0 \leqslant \mathbb{E}\Big(X_1 - \min\big(\sqrt{t}, X_1\big)\Big) \leqslant \mathbb{E}\big(X_1\, \mathbb{1}_{[X_1>\sqrt{t}]}\big)$.

- Par linéarité de l'espérance, on obtient donc :

$$0 \ \leqslant\ \underbrace{\mathbb{E}(X_1) - \mathbb{E}\big(\min(\sqrt{t}, X_1)\big)}_{= \ \mu - \mathbb{E}(\min(\sqrt{t}, X_1))} \ \leqslant\ \mathbb{E}\big(X_1\, \mathbb{1}_{[X_1>\sqrt{t}]}\big)$$

  Ainsi, si on parvient à démontrer : $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathbb{E}\big(X_1\, \mathbb{1}_{[X_1>\sqrt{t}]}\big) = 0$, alors, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{t\to+\infty} \mu - \mathbb{E}\big(\min(\sqrt{t}, X_1)\big) \ = \ 0$$

  D'où : $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathbb{E}\big(\min(\sqrt{t}, X_1)\big) = \mu$.

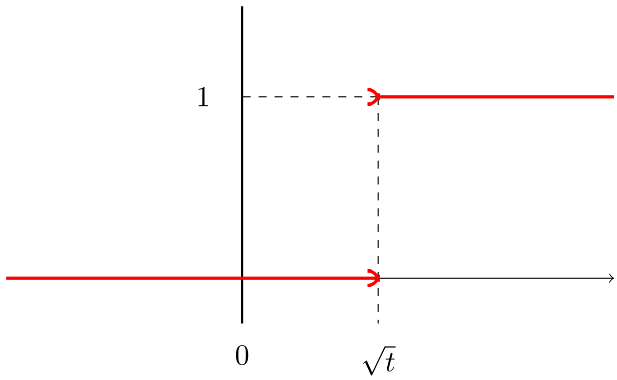
- Démontrons donc : $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathbb{E}\big(X_1 \, \mathbb{1}_{[X_1 > \sqrt{t}]}\big) = 0$.
Il n'est pas possible de démontrer ce point dans le cadre du programme pour une v.a.r. X_1 ni discrète ni à densité. On choisit donc ici de présenter le cas où X_1 est discrète.
Supposons que la v.a.r. X_1 est discrète. On note : $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$.
On suppose (quitte à changer la numérotation des indices) que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante, c'est-à-dire : $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$
  × On note $g_t : x \mapsto x \, \mathbb{1}_{x > \sqrt{t}}$ de sorte que : $X_1 \, \mathbb{1}_{[X_1 > \sqrt{t}]} = g_t(X_1)$.

Commentaire

- La fonction $h_t : x \mapsto \mathbb{1}_{x > \sqrt{t}}$ est une fonction indicatrice. Explicitons la :

$$h_t : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \in \,]\sqrt{t}, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array}$$

Sa courbe représentative est donc assez simple.



- On prendra garde à ne pas confondre **variable aléatoire** indicatrice et **fonction** indicatrice. En effet :
  × une variable aléatoire indicatrice est, bien évidemment, une variable aléatoire. En cette qualité, c'est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$.
  × une fonction indicatrice est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

× On sait déjà que la v.a.r. $X_1 \, \mathbb{1}_{[X_1 > \sqrt{t}]} = g_t(X_1)$ admet une espérance d'après le premier point de la démonstration. De plus, par théorème de transfert :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}\big(X_1 \, \mathbb{1}_{[X_1 > \sqrt{t}]}\big) & = & \mathbb{E}\big(g_t(X_1)\big) \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} g_t(x_k) \, \mathbb{P}\big([X_1 = x_k]\big) \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} x_k \, \mathbb{1}_{x_k > \sqrt{t}} \, \mathbb{P}\big([X_1 = x_k]\big) \\ & = & \cancel{\sum\limits_{\substack{k = 0 \\ x_k \leqslant \sqrt{t}}}^{+\infty} x_k \, \mathbb{1}_{x_k > \sqrt{t}} \, \mathbb{P}\big([X_1 = x_k]\big)} + \sum\limits_{\substack{k = 0 \\ x_k > \sqrt{t}}}^{+\infty} x_k \, \mathbb{1}_{x_k > \sqrt{t}} \, \mathbb{P}\big([X_1 = x_k]\big) \\ & = & \sum\limits_{\substack{k = 0 \\ x_k > \sqrt{t}}}^{+\infty} x_k \, \mathbb{P}\big([X_1 = x_k]\big) \qquad \textit{(par définition de } \mathbb{1}_{x_k > \sqrt{t}}\textit{)} \end{array}$$

× Comme la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, on peut définir le premier entier $n \in \mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{t} < x_n$. On le note n_t. On pose alors :

$$\varphi \ : \ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{N} \\ t & \mapsto & n_t \end{array}$$

Par définition de $\varphi(t)$:

$$\mathbb{E}\big(X_1 \, \mathbb{1}_{[X_1 > \sqrt{t}]}\big) \ = \ \sum_{\substack{k=0 \\ x_k > \sqrt{t}}}^{+\infty} x_k \, \mathbb{P}\big(\,[X_1 = x_k]\,\big) \ = \ \sum_{k=\varphi(t)}^{+\infty} x_k \, \mathbb{P}\big(\,[X_1 = x_k]\,\big)$$

On note enfin (R_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} x_k \, \mathbb{P}\big(\,[X_1 = x_k]\,\big)$.

(la quantité R_n est le reste de la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} x_k \, \mathbb{P}\big(\,[X_1 = x_k]\,\big)$)

On obtient alors :

$$\mathbb{E}\big(X_1 \, \mathbb{1}_{[X_1 > \sqrt{t}]}\big) \ = \ R_{\varphi(t)}$$

× Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) \ = \ +\infty$ (démontré dans la remarque), avec le changement de variable $\boxed{n = \varphi(t)}$, on obtient :

$$\lim_{t\to+\infty} R_{\varphi(t)} \ = \ \lim_{n\to+\infty} R_n \ = \ 0$$

où la dernière égalité est obtenue car R_n est le reste d'ordre n de la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} x_k \, \mathbb{P}\big(\,[X_1 = x_k]\,\big)$ qui est convergente car X_1 admet une espérance.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}\big(X_1 \, \mathbb{1}_{[X_1 > \sqrt{t}]}\big) = 0.}$$

$$\boxed{\text{Finalement, par théorème d'encadrement : } \lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}\big(\min(\sqrt{t}, X_1)\big) = \mu.}$$

Commentaire

- Démontrons : $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = +\infty$.

  × Démontrons que φ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
  Soit $(t_1, t_2) \in \big(\mathbb{R}_+^*\big)^2$. Supposons : $t_1 \leqslant t_2$.
  Démontrons par l'absurde : $\varphi(t_1) \leqslant \varphi(t_2)$. Supposons donc : $\varphi(t_1) > \varphi(t_2)$.

  - D'une part, comme $\varphi(t_1)$ est, par définition, le premier entier tel que $x_n > \sqrt{t_1}$, on en déduit :

  $$x_{\varphi(t_2)} \leqslant \sqrt{t_1}$$

  - D'autre part, par définition de $\varphi(t_2)$: $x_{\varphi(t_2)} > \sqrt{t_2}$.
  Or, par croissance de la fonction $\sqrt{\cdot}$ sur $\mathbb{R}_+$: $\sqrt{t_1} \leqslant \sqrt{t_2}$. Ainsi, par transitivité :

  $$\sqrt{t_1} \ \leqslant \ \sqrt{t_2} \ < \ x_{\varphi(t_2)}$$

  Absurde !

Commentaire

× Démontrons par l'absurde que la fonction φ n'est pas majorée.
Supposons que la fonction φ est majorée.

- Alors, comme elle est croissante, par théorème de la limite monotone, elle admet une limite finie en $+\infty$.
- On sait de plus que la fonction φ est à valeurs entières.

Ainsi, d'après la remarque de la question ***6.d)(i)***, la fonction φ est constante au voisinage de $+\infty$.
Autrement dit, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall t \geqslant A, \quad \varphi(t) = n_0$$

Soit $t \geqslant A$. Par définition de $\varphi(t)$:

$$\sqrt{t} \ < \ x_{\varphi(t)} = x_{n_0}$$

Absurde ! En effet : $\lim\limits_{t\to+\infty} \sqrt{t} = +\infty \not\leqslant x_{n_0}$.

- Démontrons : $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme X_1 admet une espérance :

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} x_k\, \mathbb{P}\big([X_1 = x_k]\big)}_{\mathbb{E}(X_1)} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} x_k\, \mathbb{P}\big([X_1 = x_k]\big)}_{S_n} + \underbrace{\sum_{k=n}^{+\infty} x_k\, \mathbb{P}\big([X_1 = x_k]\big)}_{R_n}$$

Alors :

$$R_n \ = \ \mathbb{E}(X_1) - S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(X_1) - \mathbb{E}(X_1) = 0$$

- La démonstration du résultat $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathbb{E}\big(X_1\, \mathbb{1}_{[X_1>\sqrt{t}]}\big) = 0$ se traite de manière analogue dans le cas où X_1 est une v.a.r. à densité (c'est même un peu plus simple).
- Un tel niveau de détails n'était évidemment pas attendu. L'idée d'une fin de sujet ESSEC II est de tester le recul des candidats sur les notions au programme et sur celles introduites dans le sujet. Ainsi, un candidat affirmant :

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}\big(X_1\, \mathbb{1}_{[X_1>\sqrt{t}]}\big) = 0 \text{ car } X_1 \text{ admet une espérance}$$

aurait certainement obtenu la totalité des points alloués à cette partie de la question.

- La démonstration du résultat $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathbb{E}\big(X_1\, \mathbb{1}_{[X_1>\sqrt{t}]}\big) = 0$ dans le cas général nécessite l'utilisation d'une propriété hors programme : l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Détaillons brièvement la manière de procéder à l'aide de cette proposition.

1) Commençons par énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Soient X et Y deux v.a.r. admettant un moment d'ordre 2. Alors :

$$\big|\mathbb{E}(X\,Y)\big| \ \leqslant \ \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\,\mathbb{E}(Y^2)}$$

Pour la démonstration de cette inégalité, on se réfèrera au cours sur les couples de v.a.r. discrètes.
En appliquant cette inégalité à X_1 (qui admet un moment d'ordre 2 d'après l'énoncé) et $\mathbb{1}_{[X_1>\sqrt{t}]}$ (qui admet un moment d'ordre 2 car c'est une v.a.r. finie), on obtient :

$$\Big|\mathbb{E}\big(X_1\, \mathbb{1}_{[X_1>\sqrt{t}]}\big)\Big| \ \leqslant \ \sqrt{\mathbb{E}(X_1^2)\,\mathbb{E}\left(\left(\mathbb{1}_{[X_1>\sqrt{t}]}\right)^2\right)}$$

Commentaire

2) On calcule $\mathbb{E}\left(\left(\mathbb{1}_{[X_1>\sqrt{t}]}\right)^2\right)$:

$$\mathbb{E}\left(\left(\mathbb{1}_{[X_1>\sqrt{t}]}\right)^2\right) = \cancel{0^2 \times \mathbb{P}\left(\left[\mathbb{1}_{[X_1>\sqrt{t}]} = 0\right]\right)} + 1^2 \times \mathbb{P}\left(\left[\mathbb{1}_{[X_1>\sqrt{t}]} = 1\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[X_1 > \sqrt{t}\right]\right)$$

3) On démontre : $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[X_1 > \sqrt{t}\right]\right) = 0$.
La v.a.r. X_1 est à valeurs positives. De plus : $\sqrt{t} > 0$. Ainsi, par inégalité de Markov :

$$0 \leqslant \mathbb{P}\left(\left[X_1 > \sqrt{t}\right]\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{t}}$$

Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{t}} = 0$, on en déduit : $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[X_1 > \sqrt{t}\right]\right) = 0$.

4) On obtient alors : $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathbb{E}\left(\left(\mathbb{1}_{[X_1>\sqrt{t}]}\right)^2\right) = 0$. Et donc : $\lim\limits_{t\to+\infty} \sqrt{\mathbb{E}(X_1^2)\,\mathbb{E}\left(\left(\mathbb{1}_{[X_1>\sqrt{t}]}\right)^2\right)}$.

Avec l'inégalité du point ***1)***, on en déduit bien : $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathbb{E}\left(X_1\,\mathbb{1}_{[X_1>\sqrt{t}]}\right) = 0$. □

(iv) Conclure : $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\mathbb{E}(N_t)}{t} = \frac{1}{\mu}$.

Démonstration.

- Soit $t > 0$.
  - × D'après la question ***15.*** : $\frac{1}{\mu} - \frac{1}{t} \leqslant \frac{\mathbb{E}(N_t)}{t}$.
  - × D'après la question ***16.d)(i)*** : $\frac{\mathbb{E}(N_t)}{t} \leqslant \frac{t+\sqrt{t}}{t\,\mathbb{E}\left(\min(\sqrt{t}, X_1)\right)}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall t > 0,\ \frac{1}{\mu} - \frac{1}{t} \leqslant \frac{\mathbb{E}(N_t)}{t} \leqslant \frac{t+\sqrt{t}}{t\,\mathbb{E}\left(\min(\sqrt{t}, X_1)\right)}.}$$

- Or :
  - × d'une part : $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{\mu} - \frac{1}{t} = \frac{1}{\mu}$.
  - × d'autre part : $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t+\sqrt{t}}{t\,\mathbb{E}\left(\min(\sqrt{t}, X_1)\right)} = \frac{1}{\mu}$. En effet, pour tout $t > 0$:

$$\frac{t+\sqrt{t}}{t\,\mathbb{E}\left(\min(\sqrt{t}, X_1)\right)} = \underset{\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}\ \frac{1}{\mu}}{\frac{1}{\mathbb{E}\left(\min(\sqrt{t}, X_1)\right)}} + \underset{\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}\ 0}{\frac{1}{\sqrt{t}\,\mathbb{E}\left(\min(\sqrt{t}, X_1)\right)}}$$

(d'après la question précédente, car $\mu > 0$)

$$\boxed{\text{Ainsi, par théorème d'encadrement : } \lim_{t\to+\infty} \frac{\mathbb{E}(N_t)}{t} = \frac{1}{\mu}.}$$

□