DS3 /187

Une des situations les plus fréquentes dans l'entretien d'un site concerne la gestion des équipements et, notammemt, le fait de prévoir le remplacement d'éléments défaillants. Imaginons par exemple qu'un local soit éclairé par une ampoule. Celle-ci a une durée de vie aléatoire ; quand elle tombe en panne, elle est immédiatement remplacée par une nouvelle ampoule et ainsi de suite... Une bonne gestion nécessite donc d'avoir connaissance du comportement des pannes successives, et notamment de ce comportement en moyenne, pour pouvoir prévoir un stock d'ampoules de rechange. Une telle situation s'appelle un processus de renouvellement et le but du problème est l'étude d'un modèle probabiliste la décrivant. Dans la première partie, on examine le comportement asymptotique des temps de panne. Dans la deuxième, on regarde quelques propriétés de base du processus. Enfin la troisième est consacrée à la détermination du comportement asymptotique du nombre de pannes moyen.
Toutes les v.a.r. intervenant dans le problème sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
Pour toute variable aléatoire Y, on notera $\mathbb{E}(Y)$ son espérance et $\mathbb{V}(Y)$ sa variance quand elles existent.
On admettra en outre la propriété suivante : si Y et Z sont deux variables aléatoires positives telles que $Y \leqslant Z$ et $\mathbb{E}(Z)$ existe, alors Y admet une espérance et : $\mathbb{E}(Y) \leqslant \mathbb{E}(Z)$.
Pour tout le problème, on se donne une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\geqslant 1}$ positives, indépendantes et de même loi. On notera, pour tout réel t, $F(t) = \mathbb{P}([X_1 \leqslant t])$ la fonction de répartition de la variable aléatoire X_1. On suppose $F(0) = \mathbb{P}([X_1 = 0]) < 1$. De plus, on suppose que X_1 admet un moment d'ordre 4, $\mathbb{E}\left(X_1^4\right)$.
On pose $S_0 = 0$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$: $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

Première partie : Comportement asymptotique des temps de panne /63

1. a) (i) Soit r un entier naturel tel que $1 \leqslant r \leqslant 4$. Démontrer : $X_1^r \leqslant 1 + X_1^4$.

- **1 pt : comprendre qu'il s'agit de démontrer $\forall x \geqslant 0,\ x^r \leqslant 1 + x^4$**
- **2 pts (max) : démo de $\forall x \geqslant 0,\ x^r \leqslant 1 + x^4$ parmi**
  - × **1 pt : cas $r = 4$**
  - × **1 pt : avoir pensé au découpage $x \in [0, 1[$ et $x \in]1, +\infty[$**
  - × **1 pt : avoir cité la croissance d'une application élévation à une puissance entière**

(ii) Montrer que pour tout $r \in \{1, 2, 3, 4\}$, X_1^r admet une espérance.

- **1 pt : comprendre qu'il s'agit d'appliquer le théorème de domination**
- **3 pts :**
  - × **1 pt : $X_1^r \geqslant 0$ et $X_1^4 + 1 \geqslant 0$**
  - × **1 pt : $X_1^r \leqslant 1 + X_1^4$**
  - × **1 pt : $1 + X_1^4$ admet une espérance en tant que transformée affine de X_1^4**

On notera tout au long du problème : $\mu = \mathbb{E}(X_1)$.

(iii) Démontrer : $\mu > 0$.

- **1 pt : $X_1 \geqslant 0$ donc $\mu = \mathbb{E}(X_1) \geqslant 0$**
- **2 pts : $\mu \neq 0$ par l'absurde**
  - × **1 pt : présentation correct de la démo par l'absurde**

× **1 pt : si $\mu = \mathbb{E}(X_1) = 0$ alors comme $X_1 \geqslant 0$ on a : X_1 nulle presque sûrement**

(iv) Montrer que la variable aléatoire $X_1 - \mu$ admet un moment d'ordre 4.

- **1 pt :** $\big(X_1 - \mu\big)^4 \ = \ X_1^4 - 4\ \mu\, X_1^3 + 6\ \mu^2\, X_1^2 - 4\ \mu^3\, X_1 + \mu^4$
- **1 pt : la v.a.r. $\big(X_1 - \mu\big)^4$ admet une espérance comme CL de v.a.r. qui admettent une espérance**

2. Soit $(A_n)_{n \geqslant 1}$ une suite d'événements telle que la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ converge.

On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $B_n = \bigcup\limits_{k=n}^{+\infty} A_k$.

a) Démontrer : $\forall n \geqslant 1$, $B_n \supset B_{n+1}$. On pose : $B = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} B_n$.

- **2 pts :** $B_n \ = \ \bigcup\limits_{k=n}^{+\infty} A_k \ = \ A_n \ \cup \ \left(\bigcup\limits_{k=n+1}^{+\infty} A_k\right) \ = \ A_n \ \cup \ B_{n+1} \ \supset \ B_{n+1}$

b) Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :

$(*)$ $\omega \in B$;

$(**)$ ω appartient à A_k pour une infinité de valeurs de k.

- **1 pt :** $\omega \in B \ \Leftrightarrow \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \exists k \geqslant n, \ \omega \in A_k \ (***)$
- **3 pts : ($\Rightarrow$) pour une démonstration par l'absurde propre**
  × **1 pt : on suppose $\omega \in B$ et $K_\omega \ = \ \{k \in \mathbb{N}^* \mid \omega \in A_k\}$ est fini**
  × **1 pt : on note $k_M = \max(K_\omega)$**
  × **1 pt : comme $(***)$ est vérifié, il existe $k \geqslant k_M + 1 > k_M$ tel que $\omega \in A_k$. Contradiction !**

  On donne 1 pt pour une explication avec les mains de ce sens
- **2 pts : ($\Leftarrow$)**
  × **1 pt : on suppose K_ω infini et on suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall k \geqslant n$, $\omega \notin A_k$**
  × **1 pt : on en conclut $K_\omega \ \subset \ [\![1, n_0 - 1]\!]$. Absurde !**

  On donne 1 pt pour une explication avec les mains de ce sens

c) Démontrer : $\mathbb{P}(B) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(B_n)$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \lim\limits_{m \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n=1}^{m} B_n\right)$ **par théorème de la limite monotone**
- **1 pt :** $\bigcap\limits_{n=1}^{m} B_n \ = \ B_m$ **car $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante d'après *2.a)***

d) Montrer que si C et D sont deux événements, on a : $\mathbb{P}(C \cup D) \leqslant \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(D)$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}(C \cup D) = \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(D) - \mathbb{P}\big(C \cap D\big)$ **(par la formule du crible)**
- **1 pt :** $\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(D) - \mathbb{P}\big(C \cap D\big)$ **car** $\mathbb{P}\big(C \cap D\big) \geqslant 0$

e) Démontrer : $\mathbb{P}(B_n) \leqslant \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=n}^{+\infty} A_k\right) = \lim\limits_{m \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=n}^{m} A_k\right)$ **(théorème de la limite monotone)**

- **3 pts : par récurrence : $\forall m \geqslant n$, $\mathcal{P}(n)$, où $\mathcal{P}(n)$: $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=n}^{m} A_k\right) \leqslant \sum\limits_{k=n}^{m} \mathbb{P}(A_k)$.**
  - × **1 pt : initialisation**
  - × **1 pt : (hérédité) $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=n}^{m+1} A_k\right) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcup\limits_{k=n}^{m} A_k\right) \cup A_{n+1}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=n}^{m} A_k\right) + \mathbb{P}(A_{n+1})$ (*2.d)*)**
  - × **1 pt : (hérédité) $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=n}^{m} A_k\right) \leqslant \sum\limits_{k=n}^{m} \mathbb{P}(A_k)$ par hypothèse de récurrence**
- **1 pt : passage à la limite car tous les objets admettent une limite finie**
  $\mathbb{P}(B_n) = \lim\limits_{m\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=n}^{m} A_k\right) \leqslant \lim\limits_{m\to+\infty} \sum\limits_{k=n}^{m} \mathbb{P}(A_k) = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$

f) En déduire : $\mathbb{P}(B) = 0$.

- **0 pt : d'après ce qui précède $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \mathbb{P}(B_n) \leqslant \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$**
- **1 pt : $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) - \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) - \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) = 0$**
- **1 pt : par théorème d'encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n) = 0$ ($= \mathbb{P}(B)$ d'après *2.c)*)**

3. Soit $(Y_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles positives indépendantes, centrées et de même loi. On suppose que Y_1 admet un moment d'ordre 4 et on note $\mathbb{V}(Y_1) = \mathbb{E}(Y_1^2) = \sigma^2$ et $\mathbb{E}(Y_1^4) = \rho^4$. On pose enfin, pour tout entier $n \geqslant 1$: $\Sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.

a) Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$ donné, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\left|\dfrac{\Sigma_n}{n}\right| > \varepsilon\right]\right) = 0$.

- **1 pt : hypothèse de la loi faible des grands nombres**

b) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

(i) Démontrer : $\mathbb{P}\left(\left[\left|\dfrac{\Sigma_n}{n}\right| > \varepsilon\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[\left(\dfrac{\Sigma_n}{n}\right)^4 > \varepsilon^4\right]\right)$.

- **1 pt : la v.a.r. $\left|\dfrac{\Sigma_n}{n}\right|$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$**
- **1 pt : par stricte croissance de $x \mapsto x^4$ sur $\mathbb{R}_+$**

(ii) Démontrer : $\mathbb{P}\left(\left[\left|\dfrac{\Sigma_n}{n}\right| > \varepsilon\right]\right) \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon^4}\, \mathbb{E}\left(\left(\dfrac{\Sigma_n}{n}\right)^4\right)$.

- **1 pt : hypothèses de l'inégalité de Markov**

(iii) Démontrer :

$$(\Sigma_n)^4 = \sum_{k=1}^{n} Y_k^4 + 3 \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} Y_k^2\, Y_j^2 + \sum_{k=1}^{n} Y_k\, W_k$$

où W_k désigne une variable aléatoire fonction de Y_1, …, Y_{k-1}, Y_{k+1}, …, Y_n (on ne cherchera pas à expliciter cette variable aléatoire).

- **3 pts : suivant les détails**

(iv) Démontrer : $\mathbb{E}\left((\Sigma_n)^4\right) = n\,\rho^4 + 3\,n\,(n-1)\,\sigma^4$.

- **1 pt : la v.a.r. Σ_n admet un moment d'ordre 4 en tant que somme de v.a.r. qui en admettent un**
- **1 pt : linéarité de l'espérance**
- **1 pt : indépendance de Y_k^2 et Y_j^2, et $\mathbb{E}(Y_k^2\, Y_j^2) = \sigma^4$**
- **1 pt : indépendance de X_k et Y_k, et $\mathbb{E}(Y_k\, W_k) = 0$ (car $Y_k centre$)**

(v) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout entier n strictement positif :

$$\mathbb{E}\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4\right) \leqslant \frac{C}{n^2}$$

- **1 pt :** $\mathbb{E}\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4\right) = \frac{1}{n^2}\left(\frac{\rho^4}{n} + 3\,\sigma^4\,\frac{n-1}{n}\right)$
- **1 pt :** $\frac{\rho^4}{n} + 3\,\sigma^4\,\frac{n-1}{n} \leqslant \rho^4 + 3\,\sigma^4$
- **1 pt :** $\mathbb{E}\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4\right) \leqslant \frac{C}{n^2}$ **avec** $C = \rho^4 + 3\,\sigma^4 > 0$

(vi) Démontrer : $\mathbb{P}\left(\left[\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \frac{1}{n^{\frac{1}{8}}}\right]\right) \leqslant \frac{C}{n^{\frac{3}{2}}}$.

- **1 pt : utilisation de *3.b)(ii)* et de la question précédente**

4. On définit, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'événement $A_n = \left[\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \frac{1}{n^{\frac{1}{8}}}\right]$.

a) Montrer que la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ est convergente.

- **1 pt : d'après la question précédente :** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \mathbb{P}(A_n) \leqslant \frac{C}{n^{\frac{3}{2}}}$
- **1 pt : la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est une série de Riemann d'exposant $\frac{3}{2}$ ($\frac{3}{2} > 1$). Elle est donc convergente.**

b) En déduire que la probabilité pour que A_n se produise pour une infinité de valeurs de n est nulle.

- **1 pt : D'après la question précédente, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(A_n)$ est convergente. On peut alors appliquer les résultats de la question *2.* D'où :** $\mathbb{P}(B) = 0$ **(où** $B = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\bigcup\limits_{k=n}^{+\infty} A_k\right)$**)**
- **1 pt : d'après la question *2.b)*, la probabilité pour que A_n se produise pour une infinité de valeurs de n est nulle.**

c) Montrer que l'événement $\left[\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\Sigma_n}{n} = 0\right]$ a pour probabilité 1.

- **1 pt : ω réalise $\overline{B}$ si et seulement s'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ à partir duquel ω réalise tous les événements $\overline{A_k}$.**
- **1 pt :** $\overline{B} \subset \left[\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\Sigma_n}{n} = 0\right]$
- **1 pt : croissance de $\mathbb{P}$**

d) Montrer que l'événement $\left[\lim_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n} = \mu\right]$ a pour probabilité 1.

- **1 pt : On pose alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $Y_k = X_k - \mu$.**
- **1 pt : avec la suite de v.a.r. $(Y_k)_{k\geqslant 1}$, nous sommes bien dans le cadre d'application des questions *3.* à *4.c)*. Donc :** $\mathbb{P}\left(\left[\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\Sigma_n}{n} = 0\right]\right) = 1$
- **1 pt :** $\dfrac{\Sigma_n}{n} = \dfrac{S_n}{n} - \mu$

5. a) Montrer que, pour tout $\omega \in \Omega$, la suite de réels $(S_n(\omega))_{n\geqslant 1}$ est croissante.

- **1 pt pour l'argument X_{n+1} à valeurs positives**

On considère la fonction S_∞ définie sur Ω par $S_\infty(\omega) = \lim_{n\to+\infty} S_n(\omega)$ avec $S_\infty(\omega) = +\infty$ si $(S_n(\omega))_{n\geqslant 1}$ diverge.

b) Montrer que si $S_\infty(\omega) \in \mathbb{R}_+$, alors : $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{S_n(\omega)}{n} = 0$.

- **1 pt : la suite $(S_n(\omega))_{n\geqslant 1}$ est convergente. Elle est donc bornée.**
- **1 pt : il existe donc $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tels que :** $m \leqslant S_n(\omega) \leqslant M$
- **1 pt : théorème d'encadrement**

c) En déduire : $\mathbb{P}([S_\infty = +\infty]) = 1$.

- **1 pt : la famille $\big([S_\infty \in \mathbb{R}_+]\,,\ [S_\infty = +\infty] \big)$ forme un système complet d'événements, donc :** $\mathbb{P}([S_\infty = \infty]) = 1 - \mathbb{P}([S_\infty \in \mathbb{R}_+])$
- **1 pt : d'après *5.b)* :** $[S_\infty \in \mathbb{R}_+] \subset \left[\lim_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n} = 0\right]$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\left(\left[\lim_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n} = 0\right]\right) = 0$ **car** $\mu \neq 0$

Deuxième partie : Le processus de renouvellement /48

On a montré dans la partie précédente qu'avec probabilité 1, la suite $(S_n(\omega))_{n\geqslant 1}$ tend vers l'infini. On peut donc définir, pour tout réel $t \geqslant 0$, la variable aléatoire :

$$N_t \;=\; \max\{k \in \mathbb{N} \mid S_k \leqslant t\}$$

C'est le **processus de renouvellement** associé à la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$.

6. ***a)*** Soient deux réels s et t tels que $0 \leqslant s \leqslant t$. Démontrer : $N_s \leqslant N_t$.

- **2 pts**

b) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Montrer l'égalité des événements $[N_t \geqslant n]$ et $[S_n \leqslant t]$.

- **2 pts : 1 pt par inclusion**

c) Pour $\omega \in \Omega$ donné, montrer que la limite $\lim\limits_{t\to+\infty} N_t(\omega)$ existe (elle est éventuellement infinie). On note $N_\infty(\omega)$ cette limite.

- **1 pt : la fonction $f : t \mapsto N_t(\omega)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$**
- **1 pt : théorème de la limite monotone**

d) Soient $\omega \in \Omega$ et $K \in \mathbb{N}$. On suppose : $N_\infty(\omega) = K$.

(i) Montrer qu'il existe $T_\omega > 0$ tel que : $\forall t \geqslant T_\omega$, $N_t(\omega) = K$.

- **3 pts : suivant le niveau de détail**
  (1 pt si on décrète que $t \mapsto N_t(\omega)$ admet une limite en $+\infty$ et est à valeurs entières, elle est donc constante au voisinage de $+\infty$)
- **1 pt : $T_\omega > 0$**

(ii) Montrer qu'alors $S_K(\omega) \leqslant T_\omega$, et $S_{K+1}(\omega) > t$ pour tout $t \geqslant T_\omega$.

- **1 pt : D'après *6.b)*, on en déduit : $S_K(\omega) \leqslant T_\omega$**
- **1 pt : par l'absurde : $\forall t \geqslant T_\omega$, $S_{K+1}(\omega) > t$**

(iii) En déduire que si $N_\infty(\omega) = K$ alors nécessairement $X_{K+1}(\omega) > t$ pour tout t réel positif, ce qui est absurde.

- **1 pt : $X_{K+1}(\omega) \;=\; S_{K+1}(\omega) - S_K(\omega)$**
- **1 pt : d'après *6.d)(i)* et *6.d)(ii)*, il existe $T_\omega > 0$ tel que : $X_{K+1}(\omega) > t - T_\omega$**
- **1 pt : Soit $u \geqslant 0$. En appliquant l'inégalité précédente à $t = u + T_\omega \geqslant T_\omega$, on obtient : $X_{K+1}(\omega) > u$**
- **1 pt : absurde par théorème de comparaison**

(iv) Conclure : $\mathbb{P}([N_\infty = +\infty]) = 1$.

- **1 pt : démonstration par l'absurde de $[N_\infty = +\infty] = \Omega$**

7. On souhaite écrire une fonction **Scilab** qui simule informatiquement la variable N_t. On suppose que la fonction `X` renvoie une réalisation de la variable aléatoire X. Compléter la fonction suivante, qui prend en argument un nombre réel t, et renvoie une réalisation de N_t :

```
function N = Renouvellement(t)
        N = 0 ;
        S = 0 ;
    while ...
    ...
endfunction
```

- **3 pts : 1 pt par ligne**

```
    while S <= t
        S = S + X()
        N = N + 1
    end
```

8. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\mathbb{P}([N_t = n]) \;=\; \mathbb{P}([N_t \geqslant n]) - \mathbb{P}([N_t \geqslant n+1])$$

- **1 pt :** $[N_t \geqslant n] = [N_t > n] \cup [N_t = n]$
- **1 pt :** N_t **est à valeurs entières**
- **1 pt :** $[N_t \geqslant n+1]$ **et** $[N_t = n]$ **incompatibles**

b) Pour tout réel $t \geqslant 0$, pour tout entier naturel n, on note : $F_n(t) = \mathbb{P}([S_n \leqslant t])$.

(i) Déterminer F_0 et F_1.

- **1 pt :** $\forall t \geqslant 0,\ F_0(t) = 1$
- **1 pt :** $\forall t \geqslant 0,\ F_1(t) = F(t)$

(ii) Démontrer : $\mathbb{P}([N_t = n]) = F_n(t) - F_{n+1}(t)$.

- **1 pt : d'après la question précédente et *6.b)***

9. Soient U, V, U' et V' quatre variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que U et U' suivent la même loi et que pour tous entiers naturels k et j tels que $\mathbb{P}([U = k]) \neq 0$, on a :

$$\mathbb{P}_{[U=k]}([V = j]) \;=\; \mathbb{P}_{[U'=k]}\big([V' = j]\big)$$

Montrer que V et V' suivent la même loi.

- **1 pt : formule des probabilités totales**
- **1 pt : utilisation de l'hypothèse de l'énoncé**
- **1 pt : utilisation de** U **et** U' **ont même loi**

10. Soit $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.
On note : $W = \min\{k \geqslant 1 \mid Z_k = 1\}$.

a) Démontrer pour tout $i \geqslant 1$: $\mathbb{P}([W = i]) = p\,(1-p)^{i-1}$.

- **1 pt :** $[W = i] \;=\; \left(\bigcap\limits_{k=1}^{i-1} [Z_k = 0]\right) \cap [Z_i = 1]$
- **1 pt : les v.a.r. de la famille** $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ **sont indépendantes**
- **1 pt : les v.a.r. de la famille** $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ **suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre** p

b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $W_n = \min\left\{k \geqslant 1 \mid \sum\limits_{l=1}^{k} Z_l = n\right\}$.

(i) Montrer que pour tout $k \geqslant n$, on a :

$$\mathbb{P}([W_n = k]) \;=\; \binom{k-1}{n-1}\, p^n\, (1-p)^{k-n}$$

- **1 pt :** $[W_n = j] \ = \ \left[\sum\limits_{l=1}^{j-1} Z_l = n-1\right] \cap [Z_j = 1]$
- **1 pt : d'après le lemme des coalitions, les v.a.r.** $\sum\limits_{l=1}^{j-1} Z_l$ **et** Z_j **sont indépendantes**
- **1 pt :** $\sum\limits_{l=1}^{j-1} Z_l \hookrightarrow \mathcal{B}(j-1, p)$ **par stabilité des lois binomiales**
  0 **pt si l'indépendance des v.a.r. de la famille** $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ **n'est pas citée**

(ii) Montrer que pour tout $k \geqslant n$ et $j \geqslant k+1$, on a :

$$\mathbb{P}_{[W_n=k]}([W_{n+1} = j]) \ = \ p\,(1-p)^{j-k-1}$$

- **1 pt :** $[W_n = k] \cap [W_{n+1} = j] \ = \ [W_n = k] \cap \left(\bigcap\limits_{l=k+1}^{j-1} [Z_l = 0]\right) \cap [Z_j = 1]$
- **1 pt : d'après le lemme des coalitions, les événements** $[W_n = k]$**,** $\bigcap\limits_{l=k+1}^{j-1} [Z_l = 0]$ **et** $[Z_j = 1]$ **sont indépendants**
- **1 pt : fin du calcul**

c) On suppose que pour tout entier $i \geqslant 1$: $\mathbb{P}([X_1 = i]) = p\,(1-p)^{i-1}$.

(i) Montrer que pour tous entiers j et k tels que $j \geqslant k+1$, on a :

$$\mathbb{P}_{[S_n=k]}([S_{n+1} = j]) \ = \ p\,(1-p)^{j-k-1}$$

- **1 pt :** $[S_n = k] \cap [S_{n+1} = j] = [S_n = k] \cap [X_{n+1} = j-k]$
- **1 pt : d'après le lemme des coalitions,** S_n **et** X_{n+1} **sont indépendantes**
- **1 pt : fin du calcul**

(ii) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, S_n a même loi que W_n.

- **1 pt : initialisation**
- **3 pts : hérédité (application de la question *9.* à** $U = W_n$**,** $V = W_{n+1}$**,** $U' = S_n$ **et** $V' = S_{n+1}$**)**
  × **2 pts : cas** $j \in [\![0, k]\!]$
  × **1 pt : cas** $j \geqslant k+1$

d) Montrer que pour tout réel $t \geqslant 0$ et tout entier naturel n non nul, on a :

$$\mathbb{P}([N_t = n]) \ = \ \sum_{k=n}^{\lfloor t\rfloor} \binom{k-1}{n-1} p^n\,(1-p)^{k-n} - \sum_{k=n+1}^{\lfloor t\rfloor} \binom{k-1}{n} p^{n+1}(1-p)^{k-n-1}$$

où $\lfloor t \rfloor$ désigne le plus grand entier naturel inférieur ou égal à t (par convention $\sum\limits_{k=r}^{s} = 0$ si $r > s$).

- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([N_t = n]\big) = \mathbb{P}\big([W_n \leqslant t]\big) - \mathbb{P}\big([W_{n+1} \leqslant t]\big)$ **d'après *8.b)(ii)* et car, d'après la question précédente,** S_n **et** W_n **ont même loi et** S_{n+1} **et** W_{n+1} **ont même loi**
- **1 pt :** $[W_m \leqslant t] = \bigcup\limits_{k=m}^{\lfloor t\rfloor} [W_m = k]$ **car** W_m **est à valeurs dans** $[\![m, +\infty[\![$
- **1 pt :** $\forall m \in \mathbb{N}^*$**,** $\mathbb{P}\big([W_m \leqslant t]\big) = \sum\limits_{k=m}^{\lfloor t\rfloor} \binom{k-1}{m-1} p^m\,(1-p)^{k-m}$

Troisième partie : Théorème du renouvellement /76

Le but de cette partie est d'obtenir des propriétés asymptotiques, en moyenne, du processus de renouvellement.

11. ***a)*** Montrer que pour tout réel $t \geqslant 0$: $S_{N_t} \leqslant t \leqslant S_{N_t+1}$.

- **1 pt :** $S_{N_t} \leqslant t$
- **1 pt : démontrer par l'absurde :** $S_{N_t+1} > t$

b) En déduire que pour tout $\omega \in \Omega$, il existe $T_\omega > 0$ tel que pour tout réel $t \geqslant T_\omega$:

$$\frac{S_{N_t}(\omega)}{N_t(\omega)} \leqslant \frac{t}{N_t(\omega)} < \frac{S_{N_t+1}(\omega)}{N_t(\omega)}$$

- **1 pt :** $\lim\limits_{t \to +\infty} N_t(\omega) = +\infty$**. On en déduit qu'il existe** $T_\omega > 0$ **tel que :** $\forall t \geqslant T_\omega, \quad N_t(\omega) > 0$
- **1 pt : utilisation de la question précédente puis division par** $N_t(\omega) > 0$

c) Montrer que l'événement $\left[\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{S_{N_t}}{N_t} = \mu\right]$ a pour probabilité 1.

- **1 pt :** $\left([N_\infty = +\infty] \cap \left[\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{S_n}{n} = \mu\right]\right) \subset \left[\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{S_{N_t}}{N_t} = \mu\right]$
- **1 pt :** $\forall (A, B) \in \mathscr{A}^2, \quad \left.\begin{array}{c} \mathbb{P}(A) = 1 \\ \mathbb{P}(B) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = 1$
- **1 pt : conclusion grâce à la croissance de** $\mathbb{P}$

d) Montrer que l'événement $\left[\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{S_{N_t+1}}{N_t} = \mu\right]$ a pour probabilité 1.

- **1 pt :** $\left(\left[\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{S_{N_t+1}}{N_t+1} = \mu\right] \cap \left[\lim\limits_{t \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{N_t} = 1\right]\right) \subset \left[\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{S_{N_t+1}}{N_t} = \mu\right]$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\left(\left[\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{S_{N_t+1}}{N_t+1} = \mu\right]\right) = 1$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\left(\left[\lim\limits_{t \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{N_t} = 1\right]\right) = 1$

e) En déduire que l'événement $\left[\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{N_t}{t} = \dfrac{1}{\mu}\right]$ a pour probabilité 1.

- **1 pt :** $\left(\left[\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{S_{N_t}}{N_t} = \mu\right] \cap \left[\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{S_{N_t+1}}{N_t} = \mu\right]\right) \subset \left[\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{N_t}{t} = \dfrac{1}{\mu}\right]$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\left(\left[\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{S_{N_t}}{N_t} = \mu\right] \cap \left[\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{S_{N_t+1}}{N_t} = \mu\right]\right) = 1$ **d'après *11.c)* et *11.d)***

On va maintenant cherche à montrer que le résultat précédent s'étend en moyenne, c'est-à-dire :

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbb{E}\left(\frac{N_t}{t}\right) = \frac{1}{\mu}$$

12. On commence par examiner un contre-exemple qui montre que le résultat ne se déduit pas automatiquement de la question précédente. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose :

$$Y_n = \begin{cases} 0 & \text{si } U > \dfrac{1}{n} \\ n & \text{si } U \leqslant \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

avec la convention $Y_n(\omega) = 0$ pour tout $\omega \in \Omega$ tel que : $U(\omega) = 0$.

a) Soit $\omega\Omega$. Montrer qu'il existe $N_\omega \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant N_\omega$, on a : $Y_n(\omega) = 0$.

- **1 pt : cas** $U(\omega) = 0$
- **1 pt : cas** $U(\omega) \in \,]0,1]$

b) En déduire que l'événement $\left[\lim\limits_{n\to+\infty} Y_n = 0\right]$ a pour probabilité 1.

- **1 pt :** $\omega \in \left[\lim\limits_{n\to+\infty} Y_n = 0\right] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ Y_n(\omega) \leqslant \varepsilon$ **(car Y_n est à valeurs positives ($Y_n(\Omega) \subset \{0, n\}$))**
- **1 pt : d'après la question précédente, on obtient :** $\Omega = \left[\lim\limits_{n\to+\infty} Y_n = 0\right]$

c) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$: $\mathbb{E}(Y_n) = 1$. On n'a donc pas : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} Y_n\right)$.

- **1 pt : Par définition de Y_n, on sait : $Y_n(\Omega) \subset \{0, n\}$. La v.a.r. Y_n est donc finie.**
- **2 pts :** $\mathbb{E}(Y_n) = 1$
  - × **1 pt :** $\mathbb{P}\big([Y_n = n]\big) = \mathbb{P}\left(\left[U \leqslant \dfrac{1}{n}\right]\right)$ **par définition de Y_n**
  - × **1 pt :** $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$ **et** $\dfrac{1}{n} \in [0,1]$

13. Soit J une variable alétoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note : $S_J = \sum\limits_{k=1}^{J} X_k$.

a) Démontrer : $S_J = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} X_k \, \mathbb{1}_{[J\geqslant k]}$ où $\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \notin A \\ 1 & \text{si } \omega \in A \end{cases}$

- **1 pt : Comme la famille $\big([J = j]\big)_{j\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements, alors il existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\omega \in [J = j_0]$.**
- **2 pts :** $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} X_k(\omega)\, \mathbb{1}_{[J\geqslant k]}(\omega) = \sum\limits_{k=1}^{j_0} X_k(\omega)\, \mathbb{1}_{[J\geqslant k]}(\omega) + \sum\limits_{k=j_0+1}^{+\infty} X_k(\omega)\, \mathbb{1}_{[J\geqslant k]}(\omega) = \sum\limits_{k=1}^{j_0} X_k(\omega) = S_{J(\omega)}(\omega)$

On suppose désormais que J vérifie la propriété suivante : pour tout entier $n \geqslant 1$, la variable $\mathbb{1}_{[J\leqslant n]}$ est indépendante des variables $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$ On **admettra** que si $(W_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires positives, l'écriture formelle $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}(W_n) = \mathbb{E}\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} W_n\right)$ est toujours valide sous réserve d'existence.

b) Montrer que les variables aléatoires X_k et $\mathbb{1}_{[J\geqslant k]}$ sont indépendantes.

- **1 pt :** $\mathbb{1}_{[J\geqslant k]} = 1 - \mathbb{1}_{\overline{[J\geqslant k]}}$
- **1 pt :** $\mathbb{1}_{[J<k]} = \mathbb{1}_{[J\leqslant k-1]}$ **(car J est à valeurs entières)**
- **1 pt : Par lemme des coalitions, les v.a.r. $\mathbb{1}_{[J\geqslant k]} = 1 - \mathbb{1}_{[J\leqslant k-1]}$ et X_k sont indépendantes.**

c) Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

(i) Démontrer : $U = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{[U\geqslant n]}$.

- **2 pts**

(ii) Démontrer : $\mathbb{E}(U) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([U \geqslant n])$.

- **1 pt : sous réserve d'existence, d'après la propriété de l'énoncé :** $\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{[U \geqslant n]}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{[U \geqslant n]}\right)$
- **1 pt :** $\mathbb{1}_{[U \geqslant n]} \hookrightarrow \mathcal{B}\big(\mathbb{P}\big([U \geqslant n]\big)\big)$**. D'où :** $\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{[U \geqslant n]}\right) = \mathbb{P}\big([U \geqslant n]\big)$

d) Démontrer : $\mathbb{E}(S_J) = \mathbb{E}(X_1)\,\mathbb{E}(J) = \mu\,\mathbb{E}(J)$.

- **1 pt : d'après *13.b)* :** $S_J = \sum_{k=1}^{+\infty} X_k \, \mathbb{1}_{[J \geqslant k]}$**. Ainsi, d'après la propriété admise par l'énoncé, sous réserve d'existence :** $\mathbb{E}(S_j) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} X_k \, \mathbb{1}_{[J \geqslant k]}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}\left(X_k \, \mathbb{1}_{[J \geqslant k]}\right)$
- **1 pt : D'après *13.b)*, les v.a.r.** X_k **et** $\mathbb{1}_{[J \geqslant k]}$ **sont indépendantes. On en déduit :** $\mathbb{E}\left(X_k \, \mathbb{1}_{[J \geqslant k]}\right) = \mathbb{E}(X_k)\,\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{[J \geqslant k]}\right)$
- **1 pt : comme** $\mathbb{1}_{[J \geqslant k]} \hookrightarrow \mathcal{B}\big(\mathbb{P}\big([J \geqslant k]\big)\big)$**, alors :** $\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{[J \geqslant k]}\right) = \mathbb{P}\big([J \geqslant k]\big)$
- **1 pt : fin du calcul en utilisant *13.c)(ii)***

14. *a)* Soient un réel $t > 0$ et un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $J = N_t + 1$. Montrer que la variable aléatoire $\mathbb{1}_{[J \leqslant n]}$ est indépendante de X_{n+1}, X_{n+2}, ...

- **1 pt :** $\mathbb{1}_{[N_t \leqslant n-1]} = \mathbb{1}_{[N_t < n]}$ **(car** N_t **est à valeurs entières)**
- **1 pt :** $1 - \mathbb{1}_{\overline{[N_t < n]}} = 1 - \mathbb{1}_{[N_t \geqslant n]}$
- **1 pt :** $\mathbb{1}_{[N_t \geqslant n]} = \mathbb{1}_{[S_n \leqslant t]}$ **(d'après *6.b)*)**
- **1 pt : par lemme des coalitions, que la v.a.r.** $\mathbb{1}_{[J \leqslant n]} = 1 - \mathbb{1}_{[S_n \leqslant t]}$ **est indépendante de** X_{n+1}**,** X_{n+2}**, ...**

b) En déduire que $\mathbb{E}(S_{N_t+1}) = \mu\,\big(\mathbb{E}(N_t) + 1\big)$ puis que $\mathbb{E}(N_t) = \dfrac{\mathbb{E}(S_{N_t+1})}{\mu} - 1$.

- **1 pt : on est bien dans le cadre d'application de la question *13.***
- **1 pt : sous réserve d'existence, par linéarité de l'espérance :** $\mathbb{E}\left(S_{N_t+1}\right) = \mu\big(\mathbb{E}(N_t)+1\big)$
- **1 pt : comme** $\mu \neq 0$ **d'après *1.a)(iii)* :** $\mathbb{E}(N_t) = \dfrac{\mathbb{E}(S_{N_t+1})}{\mu} - 1$

15. Montrer que pour tout $t > 0$: $\dfrac{\mathbb{E}(N_t)}{t} \geqslant \dfrac{1}{\mu} - \dfrac{1}{t}$.

- **1 pt : d'après *11.a)* :** $S_{N_t+1} > t$
- **1 pt : comme** $\mu > 0$**,** $\mathbb{E}(N_t) > \dfrac{t}{\mu} - 1$
- **1 pt : conclusion car** $t > 0$

16. Soit $b > 0$. On pose : $\tilde{X}_i = \min(b, X_i)$.

a) Montrer que les variables $\tilde{X}_i$ forment une suite de variables aléatoires indépendantes, positives et de même loi.

- **1 pt : indépendance par lemme des coalitions**
- **1 pt : même loi**
- **2 pts :** $\tilde{X}_i(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$

b) On pose $\tilde{S}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{X}_i$ et $\tilde{\mu}_b = \mathbb{E}(\tilde{X}_1)$. On considère le processus de renouvellement $\tilde{N}_t$ associé aux $\tilde{X}_i$.

(i) Démontrer : $\forall n \geqslant 1,\ \tilde{S}_n \leqslant S_n$.

- **1 pt : par définition du minimum, $\tilde{X}_i \leqslant X_i$**
- **1 pt : sommation pour i variant de 1 à n**

(ii) Démontrer : $\forall t \geqslant 0,\ \tilde{N}_t \geqslant N_t$.

- **1 pt :** $\tilde{N}_t(\omega) \geqslant N_t(\omega) \ \Leftrightarrow\ \tilde{S}_{N_t(\omega)}(\omega) \leqslant t$
- **1 pt :** $\tilde{S}_{N_t(\omega)}(\omega) \ \leqslant\ S_{N_t(\omega)}(\omega) \ \leqslant\ t$ **d'après la question précédente et *11.a)***

(iii) Démontrer : $\forall t \geqslant 0,\ \tilde{S}_{\tilde{N}_t+1} \leqslant t + b$.

- **1 pt :** $\tilde{S}_{\tilde{N}_t+1} = \tilde{S}_{\tilde{N}_t} + \tilde{X}_{\tilde{N}_t+1}$
- **1 pt :** $\tilde{X}_{\tilde{N}_t+1} = \min\left(b, X_{\tilde{N}_t}\right) \leqslant b$
- **1 pt : avec le même raisonnement qu'en question *11.a)* :** $\tilde{S}_{\tilde{N}_t} \leqslant t$

c) (i) Montrer que pour tout réel $t \in \mathbb{R}_+^*$: $\dfrac{\mathbb{E}(\tilde{N}_t)}{t} = \dfrac{\mathbb{E}(\tilde{S}\tilde{N}_t + 1)}{t\, \tilde{m}u_b} - \dfrac{1}{t}$.

- **1 pt : la v.a.r. $\tilde{S}_{\tilde{N}_t+1}$ admet une espérance d'après le résultat admis dans le préambule de l'énoncé**
- **1 pt : En raisonnant comme en question *14.*, la v.a.r. $\tilde{N}_t$ admet une espérance et :** $\mathbb{E}\left(\tilde{S}_{\tilde{N}_t+1}\right) \ = \ \tilde{\mu}_b \left(\mathbb{E}\left(\tilde{N}_t\right) + 1\right)$
- **2 pts :** $\tilde{\mu}_b > 0$
  × **1 pt :** $F_{\tilde{X}_1}(0) < 1$
  × **1 pt : $\tilde{X}_1$ admet un moment d'ordre 4**
- **1 pt : en divisant l'égalité du $2^{\text{ème}}$ point par $t\,\tilde{\mu}_b > 0$, on obtient le résultat**

(ii) En déduire que pour tout réel $b > 0$:

$$\frac{\mathbb{E}(N_t)}{t} \ \leqslant\ \frac{\mathbb{E}(\tilde{N}_t)}{t} \ \leqslant\ \frac{t+b}{t\,\tilde{\mu}_b}$$

- **1 pt : D'après le résultat admis dans le préambule de l'énoncé, et *16.b)(ii)*, la v.a.r. N_t admet une espérance.**
- **1 pt : d'après ce même résultat :** $\mathbb{E}(N_t) \leqslant \mathbb{E}\big(\tilde{N}_t\big)$**. Donc, comme $t > 0$:** $\dfrac{\mathbb{E}(N_t)}{t} \ \leqslant\ \dfrac{\mathbb{E}(\tilde{N}_t)}{t}$
- **1 pt : d'après la question précédente,** $\mathbb{E}\left(\tilde{S}_{\tilde{N}_t+1}\right) \leqslant t + b$
- **1 pt : comme $t\,\tilde{\mu}_b > 0$ et d'après la question précédente, on obtient :** $\dfrac{\mathbb{E}(\tilde{N}t)}{t} \ \leqslant\ \dfrac{t+b}{t\,\tilde{\mu}_b} - \dfrac{1}{t} \ \leqslant\ \dfrac{t+b}{t\,\tilde{\mu}_b}$

d) On choisit : $b = \sqrt{t}$.

(i) Démontrer :

$$\dfrac{\mathbb{E}(N_t)}{t} \leqslant \dfrac{t+\sqrt{t}}{t\,\mathbb{E}\big(\min(\sqrt{t}, X_1)\big)}$$

- **1 pt : question *16.c)(iii)* appliquée à $b = \sqrt{t} > 0$**

(ii) Démontrer : $0 \leqslant X_1 - \min(\sqrt{t}, X_1) \leqslant X_1\, \mathbb{1}_{[X_1 > \sqrt{t}]}$.

- **1 pt : on a déjà démontré en question *16.c)(i)* : $\tilde{X}_1 \leqslant X_1$. Donc $0 \leqslant X_1 - \min(\sqrt{t}, X_1)$**
- **3 pts : $X_1 - \min(\sqrt{t}, X_1) \leqslant X_1\, \mathbb{1}_{[X_1 > \sqrt{t}]}$**
  - × **2 pts : cas $X_1(\omega) > \sqrt{t}$**
  - × **1 pt : cas $X_1(\omega) \leqslant \sqrt{t}$**

(iii) En déduire : $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathbb{E}\big(\min(\sqrt{t}, X_1)\big) = \mu$.

- **2 pts : la v.a.r. $X_1\, \mathbb{1}_{[X_1 > \sqrt{t}]}$ admet une espérance**
  - × **1 pt : $X_1\, \mathbb{1}_{[X_1 > \sqrt{t}]} \leqslant X_1$**
  - × **1 pt : utilisation du résultat admis dans le préambule**
- **1 pt : D'après le résultat admis dans le préambule de l'énoncé, la v.a.r. $X_1\, \mathbb{1}_{[X_1 > \sqrt{t}]}$ admet une espérance et : $\mathbb{E}\big(X_1\, \mathbb{1}_{[X_1 > \sqrt{t}]}\big) \leqslant \mathbb{E}(X_1) = \mu$**
- **1 pt : décréter $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathbb{E}\big(X_1\, \mathbb{1}_{[X_1 > \sqrt{t}]}\big) = 0$ car X_1 admet une espérance**
- **1 pt : théorème d'encadrement**

(iv) Conclure : $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\mathbb{E}(N_t)}{t} = \dfrac{1}{\mu}$.

- **1 pt : $\forall t > 0$, $\dfrac{1}{\mu} - \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(N_t)}{t} \leqslant \dfrac{t+\sqrt{t}}{t\ \mathbb{E}\big(\min(\sqrt{t}, X_1)\big)}$ d'après *15.* et *16.d)(i)***
- **1 pt : $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{t+\sqrt{t}}{t\ \mathbb{E}\big(\min(\sqrt{t}, X_1)\big)} = \dfrac{1}{\mu}$**
- **1 pt : $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{1}{\mu} - \dfrac{1}{t} = \dfrac{1}{\mu}$ et théorème d'encadrement**