# DS2 (version B) /188

## Exercice 1 /40

### Partie I : Étude d'une suite récurrente

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \ = \ \dfrac{u_n^2}{n+1}$.
On suppose : $u_0 > 0$.
On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$.

*1.* Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

- **3 pts :** $\forall n \in \mathbb{N}$**,** $u_n > 0$
  - × **1 pt : initialisation**
  - × **2 pts : hérédité**
- **1 pt :** $(v_n)$ **bien définie**

*2.* *a)* Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{2^n}$ converge. Dans la suite, on note : $\sigma = -\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$.

- **4 pts : critère de négligeabilité**
  - × **1 pt :** $\forall n \in \mathbb{N}^*$**,** $\dfrac{\ln(n)}{2^n} \geqslant 0$ **et** $\dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$
  - × **2 pts :** $\dfrac{\ln(n)}{2^n} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
  - × **1 pt : La série** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ **est une série de Riemann d'exposant** $2$ $(2 > 1)$**. Elle est donc convergente.**

*b) (i)* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $v_n - v_{n-1}$ en fonction de $n$.
Puis déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (v_n - v_{n-1})$.

- **1 pt :** $v_k - v_{k-1} = -\dfrac{\ln(k)}{2^k}$
- **1 pt : d'après la question précédente,** $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{\ln(k)}{2^k}$ **convergente, donc** $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} (v_k - v_{k-1})$ **convergente.**

*(ii)* En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\ell \ = \ \sigma + v_0$$

- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (v_k - v_{k-1}) = v_n - v_0$
- **1 pt :** $(v_n)$ **converge d'après la question précédente**
- **1 pt : par passage à la limite** $\ell = -\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} + v_0 = \sigma + v_0$

*3.* On suppose dans cette question que $u_0 \neq \mathrm{e}^{-\sigma}$.

*a)* Déterminer le signe de $\ell$.
*On pourra distinguer les cas $u_0 > e^{-\sigma}$ et $u_0 < e^{-\sigma}$.*

- **2 pts :** $\ell > 0 \;\Leftrightarrow\; u_0 > \mathrm{e}^{-\sigma}$ **(dont 1 pt pour la stricte croissance de** $\exp$ **sur** $\mathbb{R}$**)**
- **0 pt :** $\ell < 0 \;\Leftrightarrow\; u_0 < \mathrm{e}^{-\sigma}$

*b)* En déduire la limite de $\big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, puis étudier le comportement en $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- **1 pt : si** $u_0 > \mathrm{e}^{-\sigma}$**, alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- **1 pt : si** $u_0 < \mathrm{e}^{-\sigma}$**, alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

*4.* On suppose dans cette question : $u_0 = \mathrm{e}^{-\sigma}$.

*a) (i)* Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$.

- **1 pt :** $v_0 = \ln(u_0) = -\sigma = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$
- **1 pt :** $v_n = -\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{2^k} + v_0 = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$

*(ii)* Retrouver dans ce cas la valeur de la limite $\ell$ de la suite $(v_n)$.

- **1 pt : comme** $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$ **convergente d'après** ***2.a)*** **:** $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{2^k} + \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$
- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

*b) (i)* Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(u_n) \geqslant \dfrac{\ln(n+1)}{2}$.

- **1 pt :** $\ln(u_n) = 2^n\, v_n = 2^n \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k} = \dfrac{\ln(n+1)}{2} + 2^n \sum\limits_{k=n+2}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$
- **1 pt :** $\dfrac{\ln(n+1)}{2} + 2^n \sum\limits_{k=n+2}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \geqslant \dfrac{\ln(n+1)}{2}$ **car** $\sum\limits_{k=n+2}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \geqslant 0$ **(en tant que somme de réels positifs)**

*(ii)* En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

- **1 pt : par croissance de** $\exp$ **sur** $\mathbb{R}$ **:** $u_n \geqslant \exp\left(\dfrac{\ln(n+1)}{2}\right)$
- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

## Partie II : Approximation de $\sigma$

*5.* *a)* Montrer : $\forall x \in \,]0,+\infty[$, $\ln(x) \leqslant x - 1$.

- **3 pts :**
  - × **1 pt : la fonction** $g : x \mapsto \ln(x)$ **est concave sur** $]0,+\infty[$
  - × **1 pt : sa courbe représentative** $\mathcal{C}_f$ **se situe donc sous ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse** $1$
  - × **1 pt : équation de la tangente :** $y = g(1) + g'(1)\,(x-1) = x - 1$

***b)*** En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \leqslant \frac{n+1}{2^n}$.

- **1 pt :** $\dfrac{\ln(k)}{2^k} \leqslant \dfrac{k-1}{2^k}$ **d'après la question précédente et car** $2^k > 0$
- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} \frac{\ln(k)}{2^k} \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \frac{k-1}{2^k}$
- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} (k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \sum_{k=1}^{m-n} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=1}^{m-n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$
- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ **et** $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ **série géométrique dérivée première et série géométrique de raison** $\dfrac{1}{2} \in \,]-1,1[$**. Elles sont donc convergentes.**
- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} (k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k \to m{+}\infty \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} 4 + (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n+1}{2^n}$

***6.*** Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\sigma - \left(-\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}\right)\right| \leqslant \dfrac{n+1}{2^n}$.

- **1 pt :** $\left|\sigma - \left(-\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}\right)\right| = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$
- **1 pt :** $\left|\sigma - \left(-\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}\right)\right| \leqslant \dfrac{n+1}{2^n}$ **d'après la question précédente**

***7.*** Écrire une fonction **Scilab** d'entête `function sigma = approx(eps)` qui, prenant en argument un réel $\varepsilon$ strictement positif, renvoie une valeur approchée de $\sigma$ à $\varepsilon$ près.

- **5 pts**
  - × **1 pt : initialisation** `N` **et** `S`
  - × **1 pt : condition boucle** `while`
  - × **1 pt : mise à jour** `N`
  - × **1 pt : mise à jour** `S`
  - × **1 pt : mise à jour** `sigma`

```
function sigma = approx(eps)
    N = 0
    S = 0
    while (N+1) / 2^N > eps
      N = N + 1
      S = S + log(N) / 2^N
    end
    sigma = -S
endfunction
```

# Exercice 2 / 42

***1.*** Soit $a$ et $b$ deux réels strictement positifs et $A$ la matrice carré d'ordre 2 définie par : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

***a)*** Montrer que si $a$ et $b$ sont égaux, la matrice $A$ n'est pas inversible.

**- 1 pt : calcul du rang ou du déterminant** $\det(A) = \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\right) = a^2 - b^2$

**- 1 pt : conclusion**

***b)*** Calculer la matrice $A^2 - 2a\,A$. En déduire que, si $a$ et $b$ sont distincts, la matrice $A$ est inversible et donner la matrice $A^{-1}$.

**- 1 pt :** $A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab+ba \\ ba+ab & b^2+a^2 \end{pmatrix}$

**- 1 pt :** $A^2 - 2a\,A = (b^2 - a^2)\ I_2$

**- 1 pt :** $b^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow a = b$

**- 1 pt :** $A^{-1} = \dfrac{1}{b^2 - a^2}\ (A - 2a\,I_2)$

***c)*** Montrer que les valeurs propres de $A$ sont $a + b$ et $a - b$.

**- 1 pt :** $\text{Sp}(A) \subseteq \{a - b, a + b\}$

**- 1 pt :** $a - b$ **est valeur propre de** $A$**, toute méthode acceptée** $(\det(A - (a-b)\,I_2) = 0)$

**- 1 pt :** $a + b$ **est valeur propre de** $A$**, toute méthode acceptée** $(\det(A - (a+b)\,I_2) = 0)$

***d)*** On pose $\Delta = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice $Q$, carrée d'ordre 2 à coefficients réels, inversible et dont les éléments de la première ligne sont égaux à 1, vérifiant $A = Q\Delta Q^{-1}$.

**- 1 pt :** $a - b$ **et** $a + b$ **sont des valeurs propres distinctes**

**- 1 pt :** $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **est un vecteur propre de** $A$ **associé à la valeur propre** $a + b$

**- 1 pt :** $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ **est un vecteur propre de** $A$ **associé à la valeur propre** $a - b$

**- 1 pt : la famille** $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ **est libre car obtenue comme concaténation de deux familles libres de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes (car** $a - b \neq a + b$**).**

**- 1 pt : la famille** $\mathcal{F}$ **est une base de vecteurs propres car de plus** $\text{Card}\big(\mathcal{F}\big) = 2 = \dim\big(\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})\big)$ **et conclusion.**

**Accorder 5 points pour toute autre méthode juste.**

***e)*** Calculer la matrice $Q^{-1}$ et, à l'aide de la question précédente, calculer la matrice $A^n$ pour tout entier naturel non nul $n$.

**- 1 pt :** $Q^{-1} = \dfrac{1}{\det(Q)} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

**- 1 pt :** $\Delta^n = \begin{pmatrix} (a+b)^n & 0 \\ 0 & (a-b)^n \end{pmatrix}$

**- 1 pt :** $A^n = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} (a+b)^n + (a-b)^n & (a+b)^n - (a-b)^n \\ (a-b)^n - (a-b)^n & (a+b)^n + (a-b)^n \end{pmatrix}$

*2.* Soit $p$ un réel vérifiant $0 < p < 1$ et $q$ le réel $1 - p$. On suppose que $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre $p$.

Pour tout $\omega$ de $\Omega$, on désigne par $M(\omega)$ la matrice carrée d'ordre 2 : $\begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$ et on note $S(\omega)$ (respectivement $D(\omega)$) la plus grande (respectivement la plus petite) valeur propre de $M(\omega)$ et on définit ainsi deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

***a)*** Montrer que la probabilité de l'événement $[X = Y]$ est donnée par : $\mathbb{P}([X = Y]) = \dfrac{p}{2-p}$.
En déduire la probabilité de l'événement $\{\omega \in \Omega \mid M(\omega) \text{ est inversible}\}$.

- **1 pt : FPT** $\mathbb{P}\big([X = Y]\big) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y = k] \cap [X = Y]\big)$
- **1 pt : indépendance de $X$ et $Y$ citée**
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \big((1-p)^2\big)^k = \dfrac{1}{1-(1-p)^2}$ **et résultat**
- **1 pt :** $\{\ \omega \in \Omega \mid M(\omega)$ **est inversible** $\} = \{\ \omega \in \Omega \mid X(\omega) \neq Y(\omega)\ \} = [X \neq Y] \ = \ \overline{[X = Y]}$
- **1 pt :résultat** $\mathbb{P}\big(\{\ \omega \in \Omega \mid M(\omega)$ **est inversible** $\}\big) = 2\ \dfrac{1-p}{2-p}$

***b)*** Calculer la covariance des variables aléatoires $S$ et $D$.

- **1 pt :** $D = X - Y$ **et** $S = X + Y$ **car pour tout** $\omega$**,** $M(\omega)$ **admet deux valeurs propres distinctes :** $X(\omega) - Y(\omega)$ **et** $X(\omega) + Y(\omega)$**.**
- **1 pt :** $S$ **et** $D$ **admettent une covariance car chacune admet une variance.**
- **1 pt : bilinéarité :** $\mathrm{Cov}(S, D) = \mathrm{Cov}(X, X) - \mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Cov}(X, Y) - \mathrm{Cov}(Y, Y)$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(X) - \mathbb{V}(Y) = 0$ **car** $X$ **et** $Y$ **suivent la même loi**

***c)*** Calculer les probabilités $\mathbb{P}([S = 2] \cap [D = 0])$, $\mathbb{P}([S = 2])$ et $\mathbb{P}([D = 0])$.
Les variables aléatoires $S$ et $D$ sont-elles indépendantes ?

- **1 pt :** $[S = 2] \cap [D = 0] = [X = 1] \cap [Y = 1]$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([S = 2] \cap [D = 0]\big) = p^2$ **par indépendance**
- **1 pt :** $[S = 2] = [X = 1] \cap [Y = 1]$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([S = 2]\big) = [X = 1] \cap [Y = 1] = p^2$
- **1 pt :** $[D = 0] = [X = Y]$ **et** $\mathbb{P}\big([D = 0]\big) = \dfrac{p}{2-p}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([S = 2] \cap [D = 0]\big) = \mathbb{P}\big([S = 2]\big) \times \mathbb{P}\big([D = 0]\big) \ \Leftrightarrow\ 1 = p$ **et** $S$ **et** $D$ **ne sont pas indépendantes.**

***d)*** Établir, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2 : $\mathbb{P}([S = n]) = (n-1)\, p^2\, q^{n-2}$.

- **1 pt : FPT** $\mathbb{P}\big([X + Y = n]\big) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y = k] \cap [X + Y = n]\big)$
- **2 pts :** $\mathbb{P}\big([X + Y = n]\big) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\big([Y = k] \cap [X = n - k]\big)$ **(1 pt résultat, 1 pt explication)**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X + Y = n]) = (n-1)\ p^2\, (1-p)^{n-2}$

*e)* En déduire, lorsque $p$ est égal à $\dfrac{2}{21}$, que la valeur la plus probable de la plus grande valeur propre des matrices $M(\omega)$ possibles est 11.

**- 1 pt : introduciton de la fonction** $f : x \mapsto (x-1)\, p^2\, (1-p)^{x-2} \;=\; (x-1)\, p^2 \exp\big((x-2)\ \ln(1-p)\big)$

**- 1 pt : la fonction** $f$ **atteint son max en** $x_0 = 1 - \dfrac{1}{\ln(1-p)}$

**- 2 pts :** $1 + \dfrac{1-p}{p} \;\leqslant\; 1 - \dfrac{1}{\ln(1-p)} \;\leqslant\; 1 + \dfrac{1}{p}$ **(1 pt par inégalité)**

**- 1 pt :** $10 < \dfrac{21}{2} \leqslant x_0 \leqslant \dfrac{23}{2} < 12$

**- 1 pt :** $f(10) < f(11)$ **et** $f(11) > f(12)$

**Noter généreusement et valoriser toute prise d'initiative.**

# Problème /106

## Partie I – Des exemples /24

Dans cette partie I, on suppose que les variables $U_k$ suivent la loi de Bernoulli de paramètre $p$, où $p$ est un réel de l'intervalle $]0,1[$.

*1.* Pour $n$ dans $\mathbb{N}^*$, quelle est la loi de $X_n$ ?

**- 1 pt :** $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ **(0 si l'indépendance n'est pas citée)**

*2.* Pour tout entier naturel $j$, établir : $r_j = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j])\, p_n$.

**- 1 pt :** $([N=n])_{n\in\mathbb{N}}$ **SCE**

**- 1 pt : FPT**

**- 1 pt :** $[N=n] \cap [X=j] = [N=n] \cap [X_n = j]$

**- 1 pt :** $N$ **et** $X_n$ **indépendantes par lemme des coalitions**

*3.* Dans cette question *3.*, on suppose que $N$ suit la loi binomiale de paramètres $m$, entier naturel, et $\pi$, réel dans $]0,1[$. Soit $j$ un entier naturel.

*a)* Justifier que $r_j = 0$ si $j > m$.

**- 1 pt :** $X(\Omega) \subset [\![0,m]\!]$

**- 1 pt : si** $j > m$**,** $[X=j] = \varnothing$

*b)* Établir que pour tout $j \in [\![0,m]\!]$ : $r_j = \sum\limits_{n=j}^{m} \dbinom{n}{j} p^j\, (1-p)^{n-j} \dbinom{m}{n} \pi^n\, (1-\pi)^{m-n}$.

**- 1 pt :** $([N=n])_{n\in[\![0,m]\!]}$ **SCE**

**- 1 pt : utilisation qst *2.* + découpage somme**

**- 1 pt :** $r_j = \sum\limits_{n=j}^{m} \mathbb{P}([X_n = j])\, \mathbb{P}([N=n])$

**- 1 pt :** $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ **et** $N \hookrightarrow \mathcal{B}(m,\pi)$

*c)* Vérifier que pour tous entiers $j$, $n$, $m$ tels que $0 \leqslant j \leqslant n \leqslant m$ : $\dbinom{n}{j}\dbinom{m}{n} \;=\; \dbinom{m}{j}\dbinom{m-j}{n-j}$.

**- 2 pts**

*d)* En déduire, pour tout $j \in [\![0, m]\!]$ : $r_j = \dbinom{m}{j} (p\pi)^j \sum\limits_{\ell=0}^{m-j} \dbinom{m-j}{\ell} \left((1-p)\pi\right)^{\ell} (1-\pi)^{m-j-\ell}$.

- **1 pt : utilisation *3.b)* et *3.c)*** $\left(r_j = \dbinom{m}{j} p_j \sum\limits_{n=j}^{m} \dbinom{m-j}{n-j} (1-p)^{n-j} \pi^n (1-\pi)^{m-n}\right)$
- **1 pt : décalage d'indice** $\left(r_j = \dbinom{m}{j} p_j \sum\limits_{\ell=0}^{m-j} \dbinom{m-j}{\ell} (1-p)^{\ell} \pi^{\ell+j} (1-\pi)^{m-(\ell+j)}\right)$
- **1 pt :** $r_j = \dbinom{m}{j} (p\pi)^j \sum\limits_{\ell=0}^{m-j} \dbinom{m-j}{\ell} \left((1-p)\pi\right)^{\ell} (1-\pi)^{m-j-\ell}$

*e)* Montrer finalement que $X$ suit une loi binomiale et préciser ses paramètres en fonction de $m$, $p$ et $\pi$.

- **2 pts (1 pt pour formule du binôme de Newton, 1 pt pour reste du calcul)**

*4.* On suppose dans cette question *4.* que $N$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda$, réel strictement positif.

*a)* Montrer que pour tout entier naturel $j$, on a :

$$r_j = \mathrm{e}^{-j} \frac{(\lambda\, p)^j}{j!} \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{(n-j)!} \big(\lambda(1-p)\big)^{n-j}$$

- **1 pt :** $r_j = \sum\limits_{n=j}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j])\, \mathbb{P}([N = n])$
- **2 pts :** $r_j = \mathbf{e}^{-j} \dfrac{(\lambda\, p)^j}{j!} \sum\limits_{n=j}^{+\infty} \dfrac{1}{(n-j)!} \big(\lambda(1-p)\big)^{n-j}$

*b)* En déduire que $X$ suit une loi de Poisson, et préciser son paramètre en fonction de $p$ et $\lambda$.

- **3 pts (1 pt pour décalage d'indice, 1 pt pour la série exponentielle de paramètre $\lambda(1-p)$, 1 pt pour $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda\, p)$)**

## Partie II – La loi binomiale négative /52

On généralise la définition des coefficients binomiaux aux nombres réels en posant, pour tout $y$ réel et tout entier $k \in \mathbb{N}^*$ : $\dbinom{y}{k} = \dfrac{1}{k!} \prod\limits_{i=0}^{k-1} (y - i)$, et $\dbinom{y}{0} = 1$.

*5.* Écrire une fonction en **Scilab** d'entête `function c = CoeffBin(y, k)` qui calcule $\dbinom{y}{k}$.

- **5 pts (1 pt pour la structure de fonction, 1 pt pour l'initialisation, 1 pt pour la structure conditionnelle, 2 points pour la structure itérative)**

```
function c = CoeffBin(y, k)
  c = 1
  if k >= 1 then
    for i = 0:(k-1)
      c = c * (y - i) / (i + 1)
    end
  end
endfunction
```

***6.*** *La formule du binôme négatif.*
Soit $c$ un réel strictement positif, et $x$ un réel de $[0,1[$.
Pour tout entier naturel $n$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{c+n+1}}\, dt$.
On admet le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{(1-x)^c} \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{c+k-1}{k} x^k + c\binom{c+n}{n} I_n$$

***a)*** Vérifier que pour tout $t \in [0,x]$ : $0 \leqslant \dfrac{x-t}{1-t} \leqslant x$.

En déduire l'encadrement : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}$.

- **1 pt :** $0 \leqslant \dfrac{x-t}{1-t} \leqslant x \;\Leftrightarrow\; x \geqslant t \geqslant xt$
- **1 pt :** $xt \leqslant t$ **car** $x \in [0,1[$
- **1 pt :** $0^n \leqslant \left(\dfrac{x-t}{1-t}\right)^n \leqslant x^n$ **par stricte croissance de la fonction** $t \mapsto t^n$ **sur** $[0,+\infty[$
- **1 pt :** $0 \leqslant \dfrac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+c+1}} \leqslant \dfrac{x^n}{(1-t)^{c+1}}$ **car** $\dfrac{1}{(1-t)^{c+1}} > 0$
- **1 pt :** $0 \leqslant \dfrac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+c+1}} \leqslant \dfrac{x^n}{(1-x)^{c+1}}$ **par stricte croissance de la fonction** $t \mapsto t^{c+1}$ **sur** $[0,+\infty[$
- **1 pt : croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant** $(0 \leqslant x)$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^x \frac{x^n}{(1-x)^{c+1}}\, dt = \frac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}$
- **2 pts : cas** $n = 0$

***b) (i)*** Montrer, pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$ : $\dbinom{c+n}{n} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{c}{k}\right)$.

- **2 pts (1 pt pour changement d'indice** $k = n - i$**, 1 pt pour reste)**

***(ii)*** Montrer que pour tout réel $t$ positif, $\ln(1+t) \leqslant t$.

- **2 pts (1 pt pour concavité de** $t \mapsto \ln(1+t)$ **sur** $[0,+\infty[$**, 1 pt pour équation de tangente en** $0$**)**

***(iii)*** Établir, pour tout entier naturel $k \geqslant 2$ : $\dfrac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$.

En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n)$.

- **2 pts : (1 pt pour** $\dfrac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1) \;\Leftrightarrow\; \dfrac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$**, 1 pt pour** $k \geqslant 2 \;\Rightarrow\; -\dfrac{1}{k} \in\, ]-1,+\infty[$**)** `OU` **(comparaison série-intégrale)** `OU` **(IAF)**
- **2 pts :** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n)$ **(1 pt pour sommation de** $2$ **à** $n$**, 1 pt pour ajouter** $1$**)**

***(iv)*** Montrer que pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$ : $\ln\left(\binom{c+n}{n}\right) \leqslant c\,(1+\ln(n))$.

En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} \binom{c+n}{n} x^{n+1} = 0$.

**- 1 pt :** $\ln\left(\binom{c+n}{n}\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1+\dfrac{c}{k}\right)$ ***(6.b)(i))***

**- 1 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1+\dfrac{c}{k}\right) \leqslant c \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ ***(6.b)(ii))***

**- 1 pt :** $c \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \leqslant c(1+\ln(n))$ ***(6.b)(iii))***

**- 1 pt :** $\binom{c+n}{n} \leqslant \exp\big(c(1+\ln(n))\big)$ **(croissance de** $\exp$ **sur** $\mathbb{R}$**)**

**- 1 pt :** $\exp(c+c\,\ln(n))\,x^{n+1} = \exp\left(n\,\ln(x)\left(\dfrac{c+\ln(x)}{n\,\ln(x)} + \dfrac{c\,\ln(n)}{n\,\ln(x)} + 1\right)\right)$

**- 1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp\left(n\,\ln(x)\left(\dfrac{c+\ln(x)}{n\,\ln(x)} + \dfrac{c\,\ln(n)}{n\,\ln(x)} + 1\right)\right) = 0$

**- 1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \binom{c+n}{n} x^{n+1} = 0$ **par théorème d'encadrement**

***c)*** En conclure que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \binom{c+k-1}{k} x^k$ est convergente, et établir la formule du binôme négatif :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{c+k-1}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^c}$$

**- 1 pt :** $0 \leqslant c\binom{c+n}{n} I_n \leqslant \dfrac{c}{(1-x)^{c+1}} \binom{c+n}{n} x^{n+1}$ ***(6.a))***

**- 1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} c\binom{c+n}{n} I_n = 0$ **par théorème d'encadrement** ***(6.b))***

**- 1 pt :** $\sum\limits_{k\geqslant 0} \binom{c+k-1}{k} x^k$ **converge et :** $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \binom{c+k-1}{k} x^k = \dfrac{1}{(1-x)^c}$ **(avec égalité de l'énoncé)**

***7.*** Soit $p$ un réel de $]0,1[$ et $r$ un réel strictement positif. Montrer que la suite de nombres $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $p_k = \binom{r+k-1}{k} (1-p)^k\, p^r$ définit une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On l'appelle *loi binomiale négative* de paramètres $r$ et $p$.

**- 1 pt :** $\forall k \in \mathbb{N}$**,** $p_k \geqslant 0$

**- 2 pts :** $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$ **(1 pt pour application de la question précédente à** $c=r$ **et** $x = 1-p$**, 1 pt pour le reste)**

***8.*** Si $Y$ est une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres 1 et $p$, reconnaître la loi de $Y+1$.

**- 1 pt :** $(Y+1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$

**- 1 pt :** $\mathbb{P}([Y+1=k]) = p_{k-1} = (1-p)^{k-1}\,p$

**- 1 pt :** $Y \hookrightarrow \mathcal{G}\,(p)$

***9.*** *Espérance et variance.*
Soit $Z$ une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres $r$ réel strictement positif et $p \in ]0,1[$.

***a)*** Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$ : $k \binom{r+k-1}{k} = r \binom{r+k-1}{k-1}$.

**- 2 pts**

***b)*** Montrer que $Z$ admet une espérance et que l'on a : $\mathbb{E}(Z) = \dfrac{r(1-p)}{p}$.

**- 1 pt : $Z$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} n\,\mathbb{P}([Z=n])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente**

**- 1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}([Z=k]) = r\ \dfrac{1-p}{p} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \binom{(r+1)+k-1}{k} (1-p)^k\, p^{r+1}$

**- 2 pts :** $r\ \dfrac{1-p}{p} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \binom{(r+1)+k-1}{k} (1-p)^k\, p^{r+1} = r\ \dfrac{1-p}{p} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([W=k])$ **(où $W$ suit la loi binomiale négative de paramètres $r+1$ et $p$)**

**- 1 pt :** $([W=k])_{k\in\mathbb{N}}$ **SCE, donc** $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathbb{P}([W=n])$ **converge et sa somme vaut** $1$

**- 1 pt : $Z$ admet une espérance et** $\mathbb{E}(Z) \ = \ r\ \dfrac{1-p}{p}$

***c)*** Montrer que $Z$ admet une variance et que l'on a : $\mathbb{V}(Z) = \dfrac{r(1-p)}{p^2}$.
On pourra commencer par calculer l'espérance de $Z(Z-1)$.

**- 1 pt : $Z(Z-1)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n(n-1)\,\mathbb{P}([Z=n])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.**

**- 3 pts :** $\sum\limits_{k=0}^{n} k(k-1)\,\mathbb{P}([Z=k]) = r\ \dfrac{1-p}{p} \sum\limits_{k=0}^{n-1} k\,\mathbb{P}([W=k])$ **(où $W$ suit la loi binomiale négative de paramètres $r+1$ et $p$)**

**- 1 pt : $W$ admet une espérance et** $\mathbb{E}(W) = (r+1)\ \dfrac{1-p}{p}$

**- 1 pt : $Z(Z-1)$ admet une espérance et** $\mathbb{E}\big(Z(Z-1)\big) \ = \ (r+1)r\ \left(\dfrac{1-p}{p}\right)^2$

**- 1 pt :** $Z^2 \ = \ Z(Z-1)+Z$ **donc $Z^2$ admet une espérance**

**- 1 pt :** $\mathbb{E}(Z^2) = (r+1)r\ \left(\dfrac{1-p}{p}\right)^2 + r\ \dfrac{1-p}{p}$

**- 1 pt : formule de Koenig-Huygens**

**- 1 pt :** $\mathbb{V}(Z) \ = \ r\ \dfrac{1-p}{p^2}$

## Partie III – Les lois de Panjer /30

On reprend les notations du début du problème : la variable aléatoire $N$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ a sa loi donnée par $p_k = \mathbb{P}([N=k])$ pour $k \in \mathbb{N}$.
On suppose dans toute la suite du sujet que la loi de $N$ vérifie la relation de Panjer : il existe deux réels $a$ et $b$, avec $a < 1$ et $a + b > 0$, tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}$$

On dira alors que $N$ suit la loi $\mathcal{P}(a, b)$.

***10.*** *Détermination des lois de Panjer.*

***a)*** Montrer que pour tout entier $k$ strictement positif, on a : $p_k = p_0 \prod\limits_{i=1}^{k} \left(a + \dfrac{b}{i}\right)$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

***b)*** Dans cette question, on suppose que $a = 0$.
Montrer que $N$ suit une loi de Poisson de paramètre $b$.

- **1 pt :** $p_k \ = \ p_0 \ \dfrac{b^k}{k!}$
- **1 pt : FPT :** $1 = p_0 + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} p_k$
- **1 pt : série exponentielle** $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} p_k = p_0 \left(\mathrm{e}^b - 1\right)$
- **1 pt :** $p_0 = \mathrm{e}^{-b}$ **et** $N \hookrightarrow \mathcal{P}(b)$

***c)*** Dans cette question, on suppose que $a < 0$.

***(i)*** Montrer qu'il existe un unique entier naturel $r$, tel que : $\forall k > r$, $p_k = 0$ et $\forall k \leqslant r$, $p_k \neq 0$.
On pourra raisonner par l'absurde, et supposer les $p_k$ tous strictement positifs.

- **2 pts : le choix de** $k_0 = \left\lceil -\dfrac{b}{a} - 1 \right\rceil$ **permet d'obtenir** $p_{k_0} < 0$
- **2 pts :** $r = s - 1$ **où** $s = \min \ (\{i \in \mathbb{N} \mid p_i = 0\})$

**Noter généreusement et valoriser toute prise d'initiative.**

***(ii)*** Montrer : $b = -a(r+1)$.

- **1 pt :** $p_{r+1} \ = \ \left(a + \dfrac{b}{r+1}\right) p_r = 0$
- **1 pt : conclusion** $b = -a(r+1)$

***(iii)*** Établir que pour tout $k \in [\![0, r]\!]$, $p_k = (-a)^k \dbinom{r}{k} p_0$.
En déduire que $p_0 = \dfrac{1}{(1-a)^r}$.

- **1 pt : pour tout** $k \in [\![1, r]\!]$**,** $p_k = p_0 \ (-a)^k \ \binom{r}{k}$ **par calcul**
- **1 pt : cas** $k = 0$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N=k]) = 1$
- **1 pt : reste du calcul et conclusion** $p_0 = \dfrac{1}{(1-a)^r}$

***(iv)*** En conclure que $N$ suit une loi binomiale et préciser les paramètres en fonction de $a$ et $b$.

**- 1 pt : pour tout** $k \in [\![0, r]\!]$**,** $\mathbb{P}([N = k]) = \binom{r}{k} \left(-\dfrac{a}{1-a}\right)^k \left(\dfrac{1}{1-a}\right)^{r-k}$

**- 1 pt : si** $k \geqslant r+1$**,** $\mathbb{P}([N = k]) = 0$

**- 1 pt : finalement :** $N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(-\dfrac{b}{a} - 1, -\dfrac{a}{1-a}\right)$

***d)*** Dans cette question, on suppose que $a > 0$.

***(i)*** Montrer que pour tout entier naturel $k$, on a : $p_k = \binom{\frac{b}{a} + k}{k} a^k \, p_0$.

**- 2 pts : calcul**

***(ii)*** En déduire que $N$ suit une loi binomiale négative et préciser ses paramètres en fonction de $a$ et $b$.

**- 1 pt :** $1 = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = k]) \;=\; \sum\limits_{k=0}^{+\infty} p_k$

**- 1 pt :** $p_0 = (1-a)^{\frac{b}{a}+1}$

**- 1 pt :** $N$ **suit la loi binomiale négative de paramètres** $\dfrac{b}{a} + 1$ **et** $1 - a$ **(car** $p_k = \binom{(\frac{b}{a}+1)+k-1}{k} a^k$**)**

***11.*** Montrer que, dans tous les cas, $N$ admet une espérance et une variance, et qu'elles sont données par : $\mathbb{E}(N) = \dfrac{a+b}{1-a}$ et $\mathbb{V}(N) = \dfrac{a+b}{(1-a)^2}$.

**- 1 pt : cas** $a = 0$ **:** $N \hookrightarrow \mathcal{P}(b)$ **et** $\mathbb{E}(N) = b = \dfrac{0+b}{1-0}$ **et** $\mathbb{V}(N) = b = \dfrac{0+b}{(1-0)^2}$

**- 1 pt : cas** $a < 0$ **:** $N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(-\dfrac{b}{a} - 1, -\dfrac{a}{1-a}\right)$ **donc la v.a.r.** $N$ **admet donc une espérance et une variance**

**- 1 pt : cas** $a < 0$ **:** $\mathbb{E}(N) = \dfrac{a+b}{1-a}$ **et** $\mathbb{V}(N) = \dfrac{a+b}{(1-a)^2}$

**- 1 pt : cas** $a > 0$ **:** $N$ **suit une loi binomiale négative de paramètres** $\dfrac{b}{a} + 1$ **et** $1 - a$ **donc admet une espérance et une variance**

**- 1 pt :** $\mathbb{E}(N) = \dfrac{a+b}{1-a}$ **et** $\mathbb{V}(N) = \dfrac{a+b}{(1-a)^2}$