DS2 (version B)

Exercice 1

Partie I : Étude d'une suite récurrente

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \; = \; \dfrac{u_n^2}{n+1}$.
On suppose : $u_0 > 0$.
On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

2. a) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln(n)}{2^n}$ converge. Dans la suite, on note : $\sigma = -\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$.

b) (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $v_n - v_{n-1}$ en fonction de n.
Puis déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (v_n - v_{n-1})$.

(ii) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\ell \; = \; \sigma + v_0$$

3. On suppose dans cette question que $u_0 \neq \mathrm{e}^{-\sigma}$.

a) Déterminer le signe de ℓ.
On pourra distinguer les cas $u_0 > e^{-\sigma}$ et $u_0 < e^{-\sigma}$.

b) En déduire la limite de $\big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, puis étudier le comportement en $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. On suppose dans cette question : $u_0 = \mathrm{e}^{-\sigma}$.

a) (i) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$.

(ii) Retrouver dans ce cas la valeur de la limite ℓ de la suite (v_n).

b) (i) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(u_n) \geqslant \dfrac{\ln(n+1)}{2}$.

(ii) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Partie II : Approximation de σ

5. a) Montrer : $\forall x \in \,]0, +\infty[$, $\ln(x) \leqslant x - 1$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \leqslant \dfrac{n+1}{2^n}$.

6. Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \sigma - \left(-\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| \leqslant \dfrac{n+1}{2^n}$.

7. Écrire une fonction **Scilab** d'entête `function sigma = approx(eps)` qui, prenant en argument un réel ε strictement positif, renvoie une valeur approchée de σ à ε près.

Exercice 2

1. Soit a et b deux réels strictement positifs et A la matrice carré d'ordre 2 définie par : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

- ***a)*** Montrer que si a et b sont égaux, la matrice A n'est pas inversible.
- ***b)*** Calculer la matrice $A^2 - 2a\,A$. En déduire que, si a et b sont distincts, la matrice A est inversible et donner la matrice A^{-1}.
- ***c)*** Montrer que les valeurs propres de A sont $a+b$ et $a-b$.
- ***d)*** On pose $\Delta = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice Q, carrée d'ordre 2 à coefficients réels, inversible et dont les éléments de la première ligne sont égaux à 1, vérifiant $A = Q\Delta Q^{-1}$.
- ***e)*** Calculer la matrice Q^{-1} et, à l'aide de la question précédente, calculer la matrice A^n pour tout entier naturel non nul n.

2. Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$ et q le réel $1-p$. On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre p.
Pour tout ω de Ω, on désigne par $M(\omega)$ la matrice carrée d'ordre 2 : $\begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$ et on note $S(\omega)$ (respectivement $D(\omega)$) la plus grande (respectivement la plus petite) valeur propre de $M(\omega)$ et on définit ainsi deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

- ***a)*** Montrer que la probabilité de l'événement $[X = Y]$ est donnée par : $\mathbb{P}([X = Y]) = \dfrac{p}{2-p}$.
En déduire la probabilité de l'événement $\{\omega \in \Omega \mid M(\omega) \text{ est inversible}\}$.
- ***b)*** Calculer la covariance des variables aléatoires S et D.
- ***c)*** Calculer les probabilités $\mathbb{P}([S = 2] \cap [D = 0])$, $\mathbb{P}([S = 2])$ et $\mathbb{P}([D = 0])$.
Les variables aléatoires S et D sont-elles indépendantes ?
- ***d)*** Établir, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $\mathbb{P}([S = n]) = (n-1)\,p^2\,q^{n-2}$.
- ***e)*** En déduire, lorsque p est égal à $\dfrac{2}{21}$, que la valeur la plus probable de la plus grande valeur propre des matrices $M(\omega)$ possibles est 11.

Problème

Toutes les variables aléatoires de ce problème sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Introduction

On s'intéresse dans ce problème à la détermination de lois de probabilité composées qui interviennent en particulier dans la gestion du risque en assurance et en théorie de la ruine. On étudie le modèle suivant :

- le nombre de sinistres à prendre en charge par une compagnie d'assurances sur une période donnée est une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$;
- les coûts des sinistres successifs sont modélisés par une suite de variables aléatoires $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$. On suppose que les variables U_k sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et identiquement distribuées, et sont indépendantes de N ;
- On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \sum\limits_{k=1}^{n} U_k$ et X_0 est la variable certaine de valeur 0 ;

- la charge sinistrale totale pour la compagnie d'assurance sur une période est donnée par la variable aléatoire X définie par :
$$X = \sum_{k=1}^{N} U_k$$
et l'on précise que $X = X_0 = 0$ si N prend la valeur 0. **On dit que X suit une loi composée.**
- Pour tout entier naturel j, on pose $p_j = \mathbb{P}([N = j])$, $q_j = \mathbb{P}([U_1 = j])$ et $r_j = \mathbb{P}([X = j])$.

Partie I – Des exemples

Dans cette partie I, on suppose que les variables U_k suivent la loi de Bernoulli de paramètre p, où p est un réel de l'intervalle $]0, 1[$.

1. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, quelle est la loi de X_n ?

2. Pour tout entier naturel j, établir : $r_j = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j])\, p_n$.

3. Dans cette question ***3.***, on suppose que N suit la loi binomiale de paramètres m, entier naturel, et π, réel dans $]0, 1[$. Soit j un entier naturel.

a) Justifier que $r_j = 0$ si $j > m$.

b) Établir que pour tout $j \in [\![0, m]\!]$: $r_j = \sum\limits_{n=j}^{m} \binom{n}{j} p^j\, (1-p)^{n-j} \binom{m}{n} \pi^n\, (1-\pi)^{m-n}$.

c) Vérifier que pour tous entiers j, n, m tels que $0 \leqslant j \leqslant n \leqslant m$: $\binom{n}{j}\binom{m}{n} = \binom{m}{j}\binom{m-j}{n-j}$.

d) En déduire, pour tout $j \in [\![0, m]\!]$: $r_j = \binom{m}{j} (p\pi)^j \sum\limits_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} \big((1-p)\pi\big)^{\ell}\, (1-\pi)^{m-j-\ell}$.

e) Montrer finalement que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres en fonction de m, p et π.

4. On suppose dans cette question ***4.*** que N suit la loi de Poisson de paramètre λ, réel strictement positif.

a) Montrer que pour tout entier naturel j, on a :
$$r_j = \mathrm{e}^{-\lambda}\, \frac{(\lambda\, p)^j}{j!} \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{(n-j)!} \big(\lambda(1-p)\big)^{n-j}$$

b) En déduire que X suit une loi de Poisson, et préciser son paramètre en fonction de p et λ.

Partie II – La loi binomiale négative

On généralise la définition des coefficients binomiaux aux nombres réels en posant, pour tout y réel et tout entier $k \in \mathbb{N}^*$: $\binom{y}{k} = \frac{1}{k!} \prod\limits_{i=0}^{k-1} (y - i)$, et $\binom{y}{0} = 1$.

5. Écrire une fonction en **Scilab** d'entête `function c = CoeffBin(y, k)` qui calcule $\binom{y}{k}$.

6. *La formule du binôme négatif.*
Soit c un réel strictement positif, et x un réel de $[0, 1[$.

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{c+n+1}}\, dt$.
On admet le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{(1-x)^c} \; = \sum_{k=0}^{n} \binom{c+k-1}{k} x^k + c\binom{c+n}{n} I_n$$

a) Vérifier que pour tout $t \in [0, x]$: $0 \leqslant \dfrac{x-t}{1-t} \leqslant x$.

En déduire l'encadrement : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}$.

b) (i) Montrer, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $\displaystyle\binom{c+n}{n} = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{c}{k}\right)$.

(ii) Montrer que pour tout réel t positif, $\ln(1+t) \leqslant t$.

(iii) Établir, pour tout entier naturel $k \geqslant 2$: $\dfrac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$.

En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n)$.

(iv) Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $\ln\left(\binom{c+n}{n}\right) \leqslant c\,(1+\ln(n))$.

En déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \binom{c+n}{n} x^{n+1} = 0$.

c) En conclure que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \binom{c+k-1}{k} x^k$ est convergente, et établir la formule du binôme négatif :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{c+k-1}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^c}$$

7. Soit p un réel de $]0,1[$ et r un réel strictement positif. Montrer que la suite de nombres $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $p_k = \displaystyle\binom{r+k-1}{k}(1-p)^k\, p^r$ définit une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On l'appelle *loi binomiale négative* de paramètres r et p.

8. Si Y est une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres 1 et p, reconnaître la loi de $Y+1$.

9. *Espérance et variance.*
Soit Z une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres r réel strictement positif et $p \in]0,1[$.

a) Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$: $k\displaystyle\binom{r+k-1}{k} = r\binom{r+k-1}{k-1}$.

b) Montrer que Z admet une espérance et que l'on a : $\mathbb{E}(Z) = \dfrac{r(1-p)}{p}$.

c) Montrer que Z admet une variance et que l'on a : $\mathbb{V}(Z) = \dfrac{r(1-p)}{p^2}$.

On pourra commencer par calculer l'espérance de $Z(Z-1)$.

Partie III – Les lois de Panjer

On reprend les notations du début du problème : la variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$ a sa loi donnée par $p_k = \mathbb{P}([N = k])$ pour $k \in \mathbb{N}$.
On suppose dans toute la suite du sujet que la loi de N vérifie la relation de Panjer : il existe deux réels a et b, avec $a < 1$ et $a + b > 0$, tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}$$

On dira alors que N suit la loi $\mathcal{P}(a, b)$.

10. *Détermination des lois de Panjer.*

a) Montrer que pour tout entier k strictement positif, on a : $p_k = p_0 \prod_{i=1}^{k} \left(a + \frac{b}{i}\right)$.

b) Dans cette question, on suppose que $a = 0$.
Montrer que N suit une loi de Poisson de paramètre b.

c) Dans cette question, on suppose que $a < 0$.

(i) Montrer qu'il existe un unique entier naturel r, tel que : $\forall k > r$, $p_k = 0$ et $\forall k \leqslant r$, $p_k \neq 0$.
On pourra raisonner par l'absurde, et supposer les p_k tous strictement positifs.

(ii) Montrer : $b = -a(r + 1)$.

(iii) Établir que pour tout $k \in [\![0, r]\!]$, $p_k = (-a)^k \binom{r}{k} p_0$.
En déduire que $p_0 = \dfrac{1}{(1 - a)^r}$.

(iv) En conclure que N suit une loi binomiale et préciser les paramètres en fonction de a et b.

d) Dans cette question, on suppose que $a > 0$.

(i) Montrer que pour tout entier naturel k, on a : $p_k = \binom{\frac{b}{a} + k}{k} a^k p_0$.

(ii) En déduire que N suit une loi binomiale négative et préciser ses paramètres en fonction de a et b.

11. Montrer que, dans tous les cas, N admet une espérance et une variance, et qu'elles sont données par : $\mathbb{E}(N) = \dfrac{a + b}{1 - a}$ et $\mathbb{V}(N) = \dfrac{a + b}{(1 - a)^2}$.