DS2 (version A) /176

Exercice 1 /40

Partie I : Étude d'une suite récurrente

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \ = \ \dfrac{u_n^2}{n+1}$.
On suppose : $u_0 > 0$.
On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

- **3 pts : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$**
  - × **1 pt : initialisation**
  - × **2 pts : hérédité**
- **1 pt : (v_n) bien définie**

2. ***a)*** Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln(n)}{2^n}$ converge. Dans la suite, on note : $\sigma = -\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$.

- **4 pts : critère de négligeabilité**
  - × **1 pt : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\ln(n)}{2^n} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$**
  - × **2 pts : $\dfrac{\ln(n)}{2^n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$**
  - × **1 pt : La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant 2 $(2 > 1)$. Elle est donc convergente.**

b) (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $v_n - v_{n-1}$ en fonction de n.
Puis déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (v_n - v_{n-1})$.

- **1 pt : $v_k - v_{k-1} = -\dfrac{\ln(k)}{2^k}$**
- **1 pt : d'après la question précédente, $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$ convergente, donc $\sum\limits_{k\geqslant 1} (v_k - v_{k-1})$ convergente.**

(ii) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\ell \ = \ \sigma + v_0$$

- **1 pt : $\sum\limits_{k=1}^{n} (v_k - v_{k-1}) = v_n - v_0$**
- **1 pt : (v_n) converge d'après la question précédente**
- **1 pt : par passage à la limite $\ell = -\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k} + v_0 = \sigma + v_0$**

3. On suppose dans cette question que $u_0 \neq e^{-\sigma}$.

a) Déterminer le signe de ℓ.
On pourra distinguer les cas $u_0 > e^{-\sigma}$ et $u_0 < e^{-\sigma}$.

- **2 pts :** $\ell > 0 \ \Leftrightarrow\ u_0 > e^{-\sigma}$ **(dont 1 pt pour la stricte croissance de** exp **sur** $\mathbb{R}$**)**
- **0 pt :** $\ell < 0 \ \Leftrightarrow\ u_0 < e^{-\sigma}$

b) En déduire la limite de $\big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, puis étudier le comportement en $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- **1 pt : si** $u_0 > e^{-\sigma}$**, alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- **1 pt : si** $u_0 < e^{-\sigma}$**, alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

4. On suppose dans cette question : $u_0 = e^{-\sigma}$.

a) (i) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$.

- **1 pt :** $v_0 = \ln(u_0) = -\sigma = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$
- **1 pt :** $v_n = -\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{2^k} + v_0 = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$

(ii) Retrouver dans ce cas la valeur de la limite ℓ de la suite (v_n).

- **1 pt : comme** $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$ **convergente d'après *2.a)* :** $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{2^k} + \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$
- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

b) (i) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(u_n) \geqslant \dfrac{\ln(n+1)}{2}$.

- **1 pt :** $\ln(u_n) = 2^n\, v_n = 2^n \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k} = \dfrac{\ln(n+1)}{2} + 2^n \sum\limits_{k=n+2}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$
- **1 pt :** $\dfrac{\ln(n+1)}{2} + 2^n \sum\limits_{k=n+2}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \geqslant \dfrac{\ln(n+1)}{2}$ **car** $\sum\limits_{k=n+2}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \geqslant 0$ **(en tant que somme de réels positifs)**

(ii) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

- **1 pt : par croissance de** exp **sur** $\mathbb{R}$ **:** $u_n \geqslant \exp\left(\dfrac{\ln(n+1)}{2}\right)$
- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Partie II : Approximation de σ

5. *a)* Montrer : $\forall x \in \,]0,+\infty[,\ \ln(x) \leqslant x - 1$.

- **3 pts :**
  - × **1 pt : la fonction** $g : x \mapsto \ln(x)$ **est concave sur** $]0,+\infty[$
  - × **1 pt : sa courbe représentative** $\mathcal{C}_f$ **se situe donc sous ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse** 1
  - × **1 pt : équation de la tangente :** $y = g(1) + g'(1)\,(x-1) = x - 1$

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \leqslant \frac{n+1}{2^n}$.

- **1 pt :** $\dfrac{\ln(k)}{2^k} \leqslant \dfrac{k-1}{2^k}$ **d'après la question précédente et car** $2^k > 0$
- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} \frac{\ln(k)}{2^k} \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \frac{k-1}{2^k}$
- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} (k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \sum_{k=1}^{m-n} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=1}^{m-n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$
- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ **et** $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ **série géométrique dérivée première et série géométrique de raison** $\dfrac{1}{2} \in \,]-1,1[$**. Elles sont donc convergentes.**
- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} (k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k \to m{+}\infty \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} 4 + (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n+1}{2^n}$

6. Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\left|\sigma - \left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}\right)\right| \leqslant \frac{n+1}{2^n}$.

- **1 pt :** $\displaystyle\left|\sigma - \left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}\right)\right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$
- **1 pt :** $\displaystyle\left|\sigma - \left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}\right)\right| \leqslant \frac{n+1}{2^n}$ **d'après la question précédente**

7. Écrire une fonction **Scilab** d'entête `function sigma = approx(eps)` qui, prenant en argument un réel ε strictement positif, renvoie une valeur approchée de σ à ε près.

- **5 pts**
  - × **1 pt : initialisation** `N` **et** `S`
  - × **1 pt : condition boucle** `while`
  - × **1 pt : mise à jour** `N`
  - × **1 pt : mise à jour** `S`
  - × **1 pt : mise à jour** `sigma`

```
function sigma = approx(eps)
    N = 0
    S = 0
    while (N+1) / 2^N > eps
      N = N + 1
      S = S + log(N) / 2^N
    end
    sigma = -S
endfunction
```

Exercice 2 /38

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. *a)* Calculer $(A - 2\,I)\ (A + 2\,I)\ (A - I)$.

- **1 pt :** $(A - 2\,I)\,(A + 2\,I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **ou** $(A + 2\,I)\,(A + I) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $(A - 2\,I)\,(A + 2\,I)\,(A - I) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

- **1 pt :** $(A - 2\,I)\,(A + 2\,I)\,(A - I) = A^3 - A^2 - 4\,A + 4\,I$
- **1 pt :** A **est inversible et** $A^{-1} = -\dfrac{1}{4}\left(A^2 - A - 4\,I\right)$

2. On note $E_2(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,X = 2 \cdot X\}$.

a) Résoudre le système suivant : $(S_1) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & & & + & 2\,z & = & 0 \\ & - & y & & & = & 0 \\ 2\,x & & & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right.$.

- **2 pts :** $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & 0 \end{array} \right.$

b) Déterminer $E_2(A)$.

- **1 pt : écriture système**
- **1 pt :** $E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

c) En déduire que $E_2(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_2(A)$.

- **1 pt :** $E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$**, c'est donc un sev de** $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$
- **2 pts :** $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ **base de** $E_2(A)$
  - × **1 pt : caractère générateur**
  - × **1 pt : liberté**

3. Déterminer de même une base de $E_1(A)$ et $E_{-2}(A)$, espaces vectoriels définis par :

$$E_1(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,X = X\} \quad \text{et} \quad E_{-2}(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,X = -2 \cdot X\}$$

- **4 pts :** $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ **base de** $E_1(A)$
  - × **1 pt : écriture système** $\left\{\begin{array}{rcrcl} -x & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & z & = & 0 \end{array}\right.$
  - × **1 pt : résolution** $\{\ x = z = 0$
  - × **1 pt :** $E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$
  - × **1 pt :** $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ **libre et génératrice de** $E_1(A)$
- **1 pt :** $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ **base de** $E_{-2}(A)$

4. Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer P^{-1}.

- **3 pts :** P **inversible et** $P^{-1} = \dfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

5. Déterminer la matrice $D = P^{-1}AP$.

- **1 pt :** $AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **ou** $P^{-1}A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

On appelle commutant de A, et on note C_A, l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$AM = MA$$

On appelle commutant de D, et on note C_D, l'ensemble des matrices N de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$DN = ND$$

6. Montrer que C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

- **1 pt :** $C_A \subset \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ **et** $0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \in C_A$
- **2 pts : stabilité par combinaison linéaire**

7. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}MP$. Montrer :

$$M \in C_A \ \Leftrightarrow \ N \in C_D$$

- **1 pt :** $M \in C_A \ \Leftrightarrow \ AM = MA \ \Leftrightarrow \ APNP^{-1} = PNP^{-1}A$
- **1 pt : en multipliant à gauche par P^{-1} et à droite par P :** $APNP^{-1} = PNP^{-1}A \ \Leftrightarrow \ P^{-1}APN = NP^{-1}AP$
- **1 pt :** $P^{-1}APN = NP^{-1}AP \ \Leftrightarrow \ DN = ND \ \Leftrightarrow \ N \in C_D$

8. Déterminer C_D, en utilisant les coefficients des matrices.

- **1 pt :** $DN = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \\ -2g & -2h & -2i \end{pmatrix}$ **et** $ND = \begin{pmatrix} 2a & b & -2c \\ 2d & e & -2f \\ 2g & h & -2i \end{pmatrix}$
- **1 pt : résolution système** $\{b = c = f = g = h = 0$
- **1 pt** $C_D = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \mid (a, e, i) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

9. En déduire :

$$C_A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

- **1 pt :** $M \in C_A \ \Leftrightarrow \ \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3, \ M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} P^{-1}$
- **2 pts : calcul de** $P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} P^{-1}$
  - × **1 pt :** $P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & -\lambda_3 \end{pmatrix}$ **ou** $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} P^{-1} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 2\lambda_2 & 0 \\ \lambda_3 & 0 & -\lambda_3 \end{pmatrix}$
  - × **1 pt :** $P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} P^{-1} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 & 0 & \lambda_1 - \lambda_3 \\ 0 & 2\lambda_2 & 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 & 0 & \lambda_1 + \lambda_3 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $C_A \subset \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$
- **1 pt :** $C_A \supset \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

10. Déterminer une base de C_A et la dimension de C_A.

- **2 pts :** $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ **base**
  - × **1 pt : caractère générateur**
  - × **1 pt : liberté**
- **1 pt :** $\dim(C_A) = \mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 3$

Exercice 3 /45

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On lance n fois une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant pile avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et face également avec la probabilité $\frac{1}{2}$), les lancers étant supposés indépendants.
On note Z la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on n'obtient aucun pile pendant ces n lancers et qui, dans le cas contraire, prend pour valeur le rang du premier pile.

1. a) Déterminer, en argumentant soigneusement, l'ensemble $Z(\Omega)$.

- **3 pts :** $Z(\Omega) = [\![0, n]\!]$ **(1 pt si la réponse est donnée sans argumentation)**

b) Démontrer : $\mathbb{P}\big([Z = 0]\big) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

- **1 pt : introduction des P_i et F_i**
- **1 pt :** $[Z = 0] = \bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Z = 0]) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ **(indépendance des lancers à citer)**

c) Pour tout k de $Z(\Omega) \setminus \{0\}$, démontrer : $\mathbb{P}\big([Z = k]\big) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

- **1 pt :** $[Z = k] = \left(\bigcap\limits_{i=1}^{k-1} F_i\right) \cap P_k$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Z = k]) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$

d) Vérifier : $\sum\limits_{k \in Z(\Omega)} \mathbb{P}([Z = k]) = 1$.

- **2 pts**
  - × **1 pt : utilisation de la question précédente**
  - × **1 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ **est la somme des termes d'une suite géométrique de raison** $\frac{1}{2} \neq 1$

e) On rappelle que l'instruction `grand(1, 1, 'bin ', 1, 0.5)` renvoie un nombre au hasard parmi les nombres 0 et 1. Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience décrite ci-dessus, l'entier n étant entré au clavier par l'utilisateur (pile sera codé par le nombre 1 et face par 0).

```
n = input(' Entrez un entier n : ')
Z = 0
k = 1
lancer = grand(1, 1, 'bin', 1, 0.5)
while (lancer == 0) & (k <= n)
  k = k + 1
  lancer = grand(1, 1, 'bin', 1, 0.5)
end
if k <> (n+1) then
  Z = .......
end
disp(Z)
```

- **2 pts :**

```
10      Z = k
```

- **2 pts supplémentaires si argumentation**

On dispose de $n+1$ urnes U_0, U_1, $\dots$, U_n telles que pour tout k de $\{0, 1, \dots, n\}$ l'urne U_k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires.
On effectue des tirages d'une boule, au hasard et avec remise dans ces urnes de la façon suivante :

× si après les lancers de la pièce décrits dans la première question, la variable Z prend la valeur k (avec $k \geqslant 1$), alors on tire une par une et avec remise, k boules dans l'urne U_k et l'on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à lissue de ces tirages,

× si la variable Z a pris la valeur 0, aucun tirage n'est effectué et X prend la valeur 0.

2. Déterminer $X(\Omega)$.

- **2 pts :** $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$
- **1 pt supplémentaire si argumentation**

3. a) Quelle est la valeur de la probabilité $\mathbb{P}_{[Z=0]}([X=i])$?
On distinguera les cas $i=0$ et $1 \leqslant i \leqslant n$.

- **2 pts :** $\mathbb{P}_{[Z=0]}([X=0]) \ = \ 1$
  × **1 pt :** $[Z=0] \subseteq [X=0]$
  × **1 pt : formule des probabilités conditionnelles**
- **2 pts :** $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}_{[Z=0]}([X=i]) = 0$
  × **1 pt :** $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}_{[Z=0]}([X=i]) \geqslant 0$
  × **1 pt :** $\sum\limits_{i=0}^{n} \mathbb{P}_{[Z=0]}([X=i]) = 1$ **car** $([X=i])_{i \in [\![0,n]\!]}$ **SCE (et** $\mathbb{P}_{[Z=0]}$ **est une application de probabilité)**

b) Quelle est la valeur de la probabilité $\mathbb{P}_{[Z=n]}([X=i])$?
On distinguera les cas $i=n$ et $0 \leqslant i \leqslant n-1$.

- **2 pts :** $\mathbb{P}_{[Z=n]}([X=n]) \ = \ 1$
  × **1 pt : résultat**
  × **1 pt : explication**
- **1 pt : même raisonnement que la question précédente**

c) Démontrer, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ et tout $i \in [\![0, n]\!]$:

$$\mathbb{P}_{[Z=k]}([X=i]) = \begin{cases} \dbinom{k}{i} \left(\dfrac{k}{n}\right)^i \left(\dfrac{n-k}{n}\right)^{k-i} & \text{si } 0 \leqslant i \leqslant k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- **3 pts : si** $0 \leqslant i \leqslant k$ **alors** $\mathbb{P}_{[Z=k]}([X=i]) \ = \ \dbinom{k}{i} \left(\dfrac{k}{n}\right)^i \left(1 - \dfrac{k}{n}\right)^{k-i}$
  × **1 pt : si l'événement** $[Z=k]$ **est réalisé, c'est que...**
  × **1 pt : description de l'expérience**
  × **1 pt : description de la v.a.r.** X
- **1 pt : si** $k < i \leqslant n$ **alors** $\mathbb{P}_{[Z=k]}([X=i]) \ = \ 0$

4. a) Montrer : $\mathbb{P}([X=0]) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(\dfrac{n-k}{2n}\right)^k + \dfrac{1}{2^n}$.

- **1 pt :** $([Z=k])_{k\in[\![0,n]\!]}$ **SCE**
- **1 pt : formule des proba totales**
  $\mathbb{P}([X=0]) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([Z=k]\cap[X=0])$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([Z=k]\cap[X=0]) = \mathbb{P}([Z=0])\,\mathbb{P}_{[Z=0]}([X=0]) + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([Z=k])\,\mathbb{P}_{[Z=k]}([X=0]) + \mathbb{P}([Z=n])\,\mathbb{P}_{[Z=n]}([X=0])$
- **1 pt : calcul** $\mathbb{P}([X=0]) = \dfrac{1}{2^n} + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{n-k}{n}\right)^k$

b) Montrer : $\mathbb{P}([X=n]) = \dfrac{1}{2^n}$.

- **1 pt :** $([Z=k])_{k\in[\![0,n]\!]}$ **SCE et formule des proba totales** $\mathbb{P}([X=n]) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([Z=k]\cap[X=n])$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([Z=k]\cap[X=n]) = \mathbb{P}([Z=0])\,\mathbb{P}_{[Z=0]}([X=n]) + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([Z=k])\,\mathbb{P}_{[Z=k]}([X=n]) + \mathbb{P}([Z=n])\,\mathbb{P}_{[Z=n]}([X=n])$
- **1 pt : calcul** $\mathbb{P}([X=n]) = \dfrac{1}{2^n}$

c) Démontrer, pour tout $i\in[\![1,n-1]\!]$: $\mathbb{P}([X=i]) = \sum\limits_{k=i}^{n-1} \dbinom{k}{i} \left(\dfrac{k}{2n}\right)^i \left(\dfrac{n-k}{2n}\right)^{k-i}$.

- **1 pt :** $([Z=k])_{k\in[\![0,n]\!]}$ **SCE et formule des proba totales** $\mathbb{P}([X=i]) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([Z=k]\cap[X=i])$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{i-1} \mathbb{P}([Z=k])\,\mathbb{P}_{[Z=k]}([X=i]) = 0$
- **1 pt : calcul** $\mathbb{P}([X=i]) = \sum\limits_{k=i}^{n-1} \dbinom{k}{i} \left(\dfrac{k}{2n}\right)^i \left(\dfrac{n-k}{2n}\right)^{k-i}$

5. Vérifier, avec les expressions trouvées à la question précédente, que $\sum\limits_{i=0}^{n} \mathbb{P}([X=i]) = 1$.

- **1 pt :** $\sum\limits_{i=0}^{n} \mathbb{P}([X=i]) = \left(\dfrac{1}{2^n} + \sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(\dfrac{n-k}{2n}\right)^k\right) + \sum\limits_{i=1}^{n-1}\sum\limits_{k=i}^{n-1} \dbinom{k}{i}\left(\dfrac{k}{2n}\right)^i\left(\dfrac{n-k}{2n}\right)^{k-i} + \dfrac{1}{2^n}$
- **1 pt :** $\sum\limits_{i=1}^{n-1}\sum\limits_{k=i}^{n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n-1}\sum\limits_{i=1}^{k}$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sum\limits_{i=1}^{k} \dbinom{k}{i}\left(\dfrac{k}{2n}\right)^i\left(\dfrac{n-k}{2n}\right)^{k-i} = \sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(\sum\limits_{i=0}^{k}\dbinom{k}{i}\left(\dfrac{k}{2n}\right)^i\left(\dfrac{n-k}{2n}\right)^{k-i} - \dbinom{k}{0}\left(\dfrac{k}{2n}\right)^0\left(\dfrac{n-k}{2n}\right)^{k-0}\right)$
- **1 pt :** $= \sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(\left(\dfrac{k}{2n}+\dfrac{n-k}{2n}\right)^k - \left(\dfrac{n-k}{2n}\right)^k\right)$ **(par binôme de Newton)**
- **1 pt :** $= \sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k - \sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(\dfrac{n-k}{2n}\right)^k$

- **1 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(\dfrac{1}{2}\right)^k = 1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$
- **1 pt : fin du calcul pour** $\sum\limits_{i=0}^{n} \mathbb{P}([X = i]) = 1$

Problème /53

Un joueur participe à un jeu se jouant en plusieurs parties.
Ses observations lui permettent d'affirmer que :

× s'il gagne deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$.

× s'il perd une partie et gagne la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$.

× s'il gagne une partie et perd la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$.

× s'il perd deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : « le joueur gagne la $n^{\text{ème}}$ partie ».
De plus, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$E_n = A_{n-1} \cap A_n \qquad F_n = \overline{A_{n-1}} \cap A_n \qquad G_n = A_{n-1} \cap \overline{A_n} \qquad H_n = \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}$$

1. a) Utiliser la formule des probabilités totales pour montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\mathbb{P}(E_{n+1}) \;=\; \frac{2}{3}\,\mathbb{P}(E_n) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}(F_n)$$

- **3 pts :** (E_n, F_n, G_n, H_n) **SCE (1 pt pour l'affirmer, 2 pts explication)**
- **1 pt : formule des proba totales** $\mathbb{P}(E_{n+1}) = \mathbb{P}(E_n \cap E_{n+1}) + \mathbb{P}(F_n \cap E_{n+1}) + \mathbb{P}(G_n \cap E_{n+1}) + \mathbb{P}(H_n \cap E_{n+1})$
- **1 pt :** $E_n \cap E_{n+1} = E_n \cap A_{n+1}$ **et** $F_n \cap E_{n+1} = F_n \cap A_{n+1}$
- **1 pt :** $G_n \cap E_{n+1} = \varnothing$ **et** $H_n \cap E_{n+1} = \varnothing$
- **1 pt : fin calcul** $\mathbb{P}(E_{n+1}) \;=\; \dfrac{2}{3}\,\mathbb{P}(E_n) + \dfrac{1}{2}\,\mathbb{P}(F_n)$

b) Exprimer de la même façon (aucune explication n'est exigée) les probabilités $\mathbb{P}(F_{n+1})$, $\mathbb{P}(G_{n+1})$ et $\mathbb{P}(H_{n+1})$ en fonction de $\mathbb{P}(E_n)$, $\mathbb{P}(F_n)$, $\mathbb{P}(G_n)$ et $\mathbb{P}(H_n)$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}(F_{n+1}) = \dfrac{1}{2}\ \mathbb{P}(G_n) + \dfrac{1}{3}\ \mathbb{P}(H_n)$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(G_{n+1}) = \dfrac{1}{3}\ \mathbb{P}(E_n) + \dfrac{1}{2}\ \mathbb{P}(F_n)$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(H_{n+1}) = \dfrac{1}{2}\ \mathbb{P}(G_n) + \dfrac{2}{3}\ \mathbb{P}(H_n)$

c) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose : $U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(E_n) \\ \mathbb{P}(F_n) \\ \mathbb{P}(G_n) \\ \mathbb{P}(H_n) \end{pmatrix}$.

Vérifier que $U_{n+1} = M\,U_n$, où $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

- **1 pt**

2. a) Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer PQ. En déduire que P est inversible et donner son inverse.

- **1 pt :** $PQ = 10\, I_4$
- **1 pt :** $P^{-1} = \dfrac{1}{10}\, Q$

b) Déterminer la matrice $D = P^{-1}MP$.

- **1 pt :** $QM = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **ou** $MP = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{3}{2} & 3 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $QMP = \begin{pmatrix} -\frac{10}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{10}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dans toute la suite, on suppose que le joueur a gagné les deux premières parties.

3. a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

b) Montrer, également par récurrence, que : $\forall n \geqslant 2$, $U_n = M^{n-2}\, U_2$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

c) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, donner la première colonne de M^n, puis en déduire $\mathbb{P}(E_n)$, $\mathbb{P}(F_n)$, $\mathbb{P}(G_n)$ et $\mathbb{P}(H_n)$.

- **1 pt : première colonne de** $M^n = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $D^n = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{6}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $\begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{6}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ 2\ \left(\frac{1}{6}\right)^n \\ 2\ \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 \end{pmatrix}$

- **1 pt :** $P\begin{pmatrix} -\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ 2\ \left(\frac{1}{6}\right)^n \\ 2\ \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 2\ \left(\frac{1}{6}\right)^n + 6\ \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \\ 2\ \left(-\frac{1}{3}\right)^n - 2\ \left(\frac{1}{6}\right)^n - 2\ \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \\ -2\ \left(-\frac{1}{3}\right)^n - 2\ \left(\frac{1}{6}\right)^n + 2\ \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \\ \left(-\frac{1}{3}\right)^n + 2\ \left(\frac{1}{6}\right)^n - 6\ \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $\begin{pmatrix} \mathbb{P}(E_n) \\ \mathbb{P}(F_n) \\ \mathbb{P}(G_n) \\ \mathbb{P}(H_n) \end{pmatrix} = M^{n-2} \begin{pmatrix} \mathbb{P}(E_2) \\ \mathbb{P}(F_2) \\ \mathbb{P}(G_2) \\ \mathbb{P}(H_2) \end{pmatrix} = M^{n-2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{P}(E_n) & = & \frac{1}{10}\ \left(-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} + 2\ \left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} + 6\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 3\right) \\ \mathbb{P}(F_n) & = & \frac{1}{10}\ \left(2\ \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} - 2\ \left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} - 2\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 2\right) \\ \mathbb{P}(G_n) & = & \frac{1}{10}\ \left(-2\ \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} - 2\ \left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} + 2\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 2\right) \\ \mathbb{P}(H_n) & = & \frac{1}{10}\ \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} + 2\ \left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} - 6\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 3\right) \end{array} \right.$

d) Montrer que l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(E_n) = \frac{3}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(F_n) = \frac{2}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(G_n) = \frac{2}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(H_n) = \frac{3}{10}$$

- **2 pts :** $-\frac{1}{3} \in\ ]-1,1[$, $\frac{1}{6} \in\ ]-1,1[$, $\frac{1}{2} \in\ ]-1,1[$

4. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le joueur gagne la $k^{\text{ème}}$ partie et qui vaut 0 sinon (X_1 et X_2 sont donc deux variables certaines).

a) Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, exprimer A_k en fonction de E_k et F_k.

- **2 pts :** $E_k \cup F_k = A_k$

b) En déduire, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la loi de X_k.

- **1 pt :** $X_k(\Omega) = \{0,1\}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big(\,[X_k = 1]\,\big) = \mathbb{P}\big(A_k\big) = \mathbb{P}\big(E_k \cup F_k\big) = \mathbb{P}\big(E_k\big) + \mathbb{P}\big(F_k\big)$ **dont l'incompatibilité**
- **1 pt : calcul**

5. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note S_n la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur lors des n premières parties.

a) Calculer $\mathbb{P}([S_n = 2])$ en distinguant les cas $n = 2$, $n = 3$ et $n \geqslant 4$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}\big(\,[S_2 = 2]\,\big) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$
- **1 pt :** $[S_3 = 2] \ = \ \overline{A_3}$
- **1 pt : calcul** $\mathbb{P}(\overline{A_3}) = 1 - \mathbb{P}(A_3) = 1 - \dfrac{1}{10}\ \left(-\dfrac{1}{3} + 4 \times \dfrac{1}{2} + 5\right) = \frac{1}{3}$
- **1 pt :** $[S_n = 2] \ = \ \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5} \cap \ldots \cap \overline{A_n}$
- **1 pt : formule des probas composées**
- **1 pt :** $\mathbb{P}_{\overline{A_3}}\big(\overline{A_4}\big) = 1 - \mathbb{P}_{\overline{A_3}}\big(A_4\big) = 1 - \mathbb{P}_{A_2 \cap \overline{A_3}}\big(A_4\big) = 1 - \dfrac{1}{2} \ = \ \dfrac{1}{2}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}_{\overline{A_3} \cap \ldots \cap \overline{A_k}}\big(\overline{A_{k+1}}\big) \ = \ \mathbb{P}_{\overline{A_{k-1}} \cap \overline{A_k}}\big(\overline{A_{k+1}}\big)$ **et calcul**

b) Déterminer $\mathbb{P}([S_n = n])$.

- **1 pt :** $[S_n = n] \ = \ A_3 \cap \ldots \cap A_n$
- **1 pt : FPC** $\mathbb{P}\big([S_n = n]\big) = \mathbb{P}\big(A_3\big) \times \mathbb{P}_{A_3}\big(A_4\big) \times \prod\limits_{k=4}^{n-1} \mathbb{P}_{A_3 \cap \ldots \cap A_{k-1}}\big(A_k\big)$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big(A_3\big) = \dfrac{2}{3}$ **et** $\mathbb{P}_{A_3}\big(A_4\big) = \dfrac{2}{3}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}_{A_3 \cap \ldots \cap A_{k-1}}\big(A_k\big) \ = \ \mathbb{P}_{A_{k-2} \cap A_{k-1}}\big(A_k\big)$ **et calcul**

c) Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, écrire S_n en fonction des variables X_k, puis déterminer $\mathbb{E}(S_n)$ en fonction de n.

- **1 pt :** $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$
- **1 pt : la v.a.r. admet une espérance**
- **1 pt : linéarité de l'espérance**
- **1 pt :** $X_1 = 1 = X_2$
- **1 pt : sommes géométriques (formule connue)**
- **2 pts : calcul et résultat** $\mathbb{E}(S_n) = \dfrac{11}{8} + \dfrac{1}{40} \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-2} - \dfrac{2}{5} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$