

---

## DS1 (version B) / 156

---

### Exercice 1 / 36

1. On considère  $\mathbb{R}^3$  muni de sa base canonique  $(e_1, e_2, e_3)$ ; soit  $t$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ , dont la matrice associée  $T$  relativement à cette base s'écrit :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer les valeurs propres de  $t$ .

Déterminer les sous-espaces propres de  $t$  associés, et donner une base de chacun d'entre eux.

L'endomorphisme  $t$  est-il diagonalisable? Est-il bijectif?

L'objet des questions suivantes est une généralisation des résultats précédents.

- 2 pts : calcul du rang de  $T$
  - 1 pt : en déduire  $\text{Sp}(t)$
  - 3 pts :  $E_0(t)$  (1 pt pour l'écriture du système / 1 pt pour la résolution / 1 pt pour  $\text{Ker}(t)$ )
  - 1 pt :  $\dim(E_0(t)) = 1$
  - 2 pts :  $E_1(t)$  et  $\dim(E_0(t)) = 1$  (on accepte « comme précédemment »)
  - 1 pt :  $t$  non diagonalisable
  - 1 pt :  $t$  non bijectif
2. Soit  $n$  un entier de  $\mathbb{N}^*$ . On considère l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^{2n+1}$  muni de sa base canonique  $(e_1, e_2, \dots, e_{2n+1})$ . Soit  $t$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^{2n+1}$  défini par :
- pour tout entier  $i$  de  $\llbracket 1, 2n+1 \rrbracket$ , avec  $i \neq n+1$  :  $t(e_i) = e_i$  ;
  - $t(e_{n+1}) = e_1 + e_2 + \dots + e_{2n+1}$ .
- a) Déterminer la matrice  $T$  associée à l'endomorphisme  $t$  relativement à la base  $(e_1, e_2, \dots, e_{2n+1})$ .
- 2 pts
- b) Déterminer le rang de  $t$ , ainsi que la dimension du noyau de  $t$ .
- 2 pts :  $\text{rg}(t) = 2$
  - 1 pt : expression théorème du rang
  - 1 pt :  $\dim(\text{Ker}(t)) = 2n - 1$
- c) Justifier que 0 est valeur propre de  $t$ . Déterminer la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0, ainsi qu'une base de ce sous-espace.
- 1 pt : 0 est valeur propre de  $t$  et  $\dim(\text{Ker}(t)) = 2n - 1$
  - 1 pt : introduction d'une famille  $\mathcal{E}$
  - 2 pts :  $\mathcal{E}$  est libre
  - 1 pt :  $\mathcal{E}$  est une base de  $\text{Ker}(t)$  ( $\text{Card}(\mathcal{E}) = 2n - 1 = \dim(\text{Ker}(t))$ )
-

3. Montrer que  $\text{Im}(t \circ t) \subset \text{Im}(t)$ , où  $\text{Im}(u)$  désigne l'image d'un endomorphisme  $u$  de  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .

- 2 pts

4. Soit  $\tilde{t}$  l'endomorphisme défini sur  $\text{Im}(t)$  par : pour tout  $x$  de  $\text{Im}(t)$ ,  $\tilde{t}(x) = t(x)$

Établir que  $\mathcal{B} = \left( e_1, \sum_{i=1}^{2n+1} e_i \right)$  constitue une base de  $\text{Im}(t)$ . Écrire la matrice associée à  $\tilde{t}$  relativement à la base  $\mathcal{B}$ .

- 1 pt :  $e_1$  et  $\sum_{i=1}^{2n+1} e_i$  sont des éléments de  $\text{Im}(t)$

- 1 pt :  $\mathcal{B}$  est libre

- 1 pt :  $\mathcal{B}$  est une base de  $\text{Im}(t)$  ( $\text{Card}(\mathcal{B}) = 2 = \dim(\text{Im}(t))$ )

- 2 pts :  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\tilde{t}) = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  (1 pt pour chaque colonne)

5. a) Soit  $\lambda$  une valeur propre non nulle de  $t$ , et  $x$  un vecteur propre associé à  $\lambda$ . Montrer que  $x$  appartient à  $\text{Im}(t)$ .

- 2 pts

b) En déduire toutes les valeurs propres de  $t$ . L'endomorphisme  $t$  est-il diagonalisable ?

- 0 pt : 0 est valeur propre de  $t$

- 1 pt : toute valeur propre non nulle de  $t$  est valeur propre de  $\tilde{t}$

- 1 pt : 1 est la seule valeur propre non nulle possible de  $t$  (car seule valeur propre de  $\tilde{t}$ )

- 1 pt :  $E_1(\tilde{t}) = E_1(t)$

- 1 pt :  $\dim(E_1(\tilde{t})) = 1$  (car sinon  $N$  serait scalaire)

- 1 pt :  $t$  n'est pas diagonalisable

## Exercice 2 /70

### Partie I : Étude d'une fonction définie par la somme d'une série /43

On s'intéresse dans cette partie, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , à la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ .

1. Justifier que, pour tout  $x \in \mathbb{R}^-$ , la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$  diverge.

- 1 pt : pour penser à la disjonction de cas (bonus)
- 1 pt : cas  $x = 0$
- 1 pt : cas  $x < 0$  ( $\sum u_n$  (grossièrement) divergente)

2. Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . On note, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}$ .

a) Montrer que les suites  $(u_{2p})_{p \in \mathbb{N}^*}$  et  $(u_{2p-1})_{p \in \mathbb{N}^*}$  sont adjacentes, puis en déduire qu'elles convergent vers une même limite notée  $S(x)$ .

- 1 pt :  $u_{2(p+1)} - u_{2p} = \frac{1}{(2p+1)^x} - \frac{1}{(2p+2)^x}$

- 1 pt :  $u_{2(p+1)} - u_{2p} \geq 0$

- 1 pt :  $u_{2(p+1)-1} - u_{2p-1} = -\frac{1}{(2p)^x} + \frac{1}{(2p+1)^x}$

- 1 pt :  $u_{2(p+1)-1} - u_{2p-1} \leq 0$

- 1 pt :  $u_{2p} - u_{2p-1} = -\frac{1}{(2p)^x} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$

- 1 pt : conclusion

b) En déduire que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ , on a :  $|u_n - S(x)| \leq \varepsilon$ .

- 3 pts : théorème de recouvrement

c) Justifier alors que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$  converge et que l'on a :  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ .

- 1 pt : la suite  $(u_n)$  est la suite des sommes partielles de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{1+n}}{n^x}$ .

d) Justifier :  $\forall p \in \mathbb{N}^*, u_{2p} \leq S(x) \leq u_{2p+1} \leq u_{2p-1}$ .

- 1 pt :  $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, u_{2p} \leq u_{2(p+n)}$  car  $(u_{2p})$  est croissante

- 1 pt : par passage à la limite  $\forall p \in \mathbb{N}^*, u_{2p} \leq S(x)$

- 1 pt : de même  $\forall p \in \mathbb{N}^*, S(x) \leq u_{2p+1}$

- 1 pt :  $u_{2p+1} = u_{2(p+1)-1} \leq u_{2p-1}$  car  $(u_{2p-1})$  est décroissante

e) En déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, |S(x) - u_n| \leq \frac{1}{(n+1)^x}$ .

On pourra séparer les cas  $n$  pair et  $n$  impair.

- 1 pt : écriture  $n = 2p$

- 1 pt :  $0 \leq S(x) - u_{2p} \leq u_{2p+1} - u_{2p}$

- 1 pt :  $u_{2p+1} - u_{2p} = \frac{(-1)^{(2p+1)+1}}{(2p+1)^x} = \frac{1}{(2p+1)^x} = \frac{1}{(n+1)^x}$

- 0 pt : écriture  $n = 2p - 1$

- 1 pt :  $u_{2p} - u_{2p-1} \leq S(x) - u_{2p-1} \leq 0$

- 1 pt :  $u_{2p} - u_{2p-1} = \frac{(-1)^{(2p)+1}}{(2p)^x} = -\frac{1}{(2p)^x} = -\frac{1}{(n+1)^x}$

f) En déduire une fonction **Scilab** qui, étant donnés deux réels  $x > 0$  et  $\varepsilon > 0$ , renvoie une valeur approchée de  $S(x)$  à  $\varepsilon$  près.

- 1 pt :  $u_{n_0}$  valeur approchée de  $S(x)$  à  $\varepsilon$  signifie :  $|S(x) - u_{n_0}| \leq \varepsilon$

- 1 pt :  $|S(x) - u_{n_0}| \leq \frac{1}{(n_0 + 1)^x} \leq \varepsilon$

- 1 pt : raisonnement par équivalence  $n_0 = \left\lceil \left( \frac{1}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{x}} - 1 \right\rceil$

- 4 pts : 1 pt structure function, 1 pt  $n = \text{ceil}((1 / \text{epsilon}) ^ (1 / x) - 1)$ , 2 pts boucle for

3. Soient  $x \in \mathbb{R}_+^*$  et  $p \in \mathbb{N}^*$ . Montrer :  $\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^p \frac{1}{(2k-1)^x} - \frac{1}{2^x} \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^x}$  puis :

$$\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \frac{1}{2^{x-1}} \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^x}$$

- 1 pt :  $\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{\substack{k \in \llbracket 1, 2p \rrbracket \\ k \text{ pair}}} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} + \sum_{\substack{k \in \llbracket 1, 2p \rrbracket \\ k \text{ impair}}} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}$

- 1 pt :  $\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = -\frac{1}{2^x} \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^x} + \sum_{k=1}^p \frac{1}{(2k-1)^x}$

- 1 pt :  $\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1} - 1}{k^x} = \sum_{\substack{k \in \llbracket 1, 2p \rrbracket \\ k \text{ pair}}} \frac{(-1)^{k+1} - 1}{k^x} + \sum_{\substack{k \in \llbracket 1, 2p \rrbracket \\ k \text{ impair}}} \frac{(-1)^{k+1} - 1}{k^x}$

- 1 pt :  $\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1} - 1}{k^x} = -\frac{1}{2^{x-1}} \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^x}$

- 1 pt : pour toute tentative de séparation pair / impair même infructueuse (bonus pour ceux qui ont réussi)

4. On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ .

a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer, en utilisant la question 3. :  $v_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$ .

- 1 pt : en appliquant l'égalité de la question précédente pour  $x = 1$  et  $p = n$ ,

$$v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

- 1 pt :  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n + k}$

- 1 pt :  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n + k} = \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j}$

b) En déduire la convergence et la limite de la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , puis la valeur de  $S(1)$ .

- 1 pt : reconnaître une somme de Riemann  $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$

- 1 pt : convergence de la somme  $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) dx$

- 1 pt : calcul  $\int_0^1 f(x) dx = \ln(2)$

- 1 pt :  $S(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ln(2)$

5. On admet que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ . Déterminer la valeur de  $S(2)$ .

- 1 pt : on applique l'égalité de la question 3. avec les paramètres  $x = 2$  et  $p = n$

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{2^{2-1}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

- 1 pt : passage à la limite

## Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale /27

On rappelle que la fonction  $\Gamma$  est définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $\forall x \in ]0; +\infty[, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ .

On rappelle également l'égalité suivante :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!$ .

6. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+e^t} dt$  converge si et seulement si  $x > -1$ .

On pose, pour tout réel  $x$  de  $] -1; +\infty[, I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+e^t} dt$ .

- 1 pt :  $f : t \mapsto \frac{t^x}{1+e^t}$  est continue sur  $]0, +\infty[$

- 1 pt : découpage en deux intégrales (convergence si et seulement si il y a convergence des deux intégrales)

- 3 pts : convergence sur  $]0, 1]$  ( $\geq 0$ ,  $\sim$ , intégrale de Riemann d'exposant  $-1$ )

- 3 pts : convergence sur  $[1, +\infty[$  ( $\geq 0$ ,  $\frac{0}{\infty}$ , intégrale de Riemann d'exposant 2)

7. Soit  $x \in ] -1; +\infty[$ . On définit la fonction  $g_x : ]0; +\infty[, t \mapsto \frac{t^x}{1+e^t}$ .

a) Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}_+, g_x(t) = (-1)^n g_x(t) e^{-nt} + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} t^x e^{-kt}$ .

- 1 pt : somme géométrique

- 1 pt : formule valable car  $-e^{-t} \neq 1$

- 1 pt : calcul

b) Justifier, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} t^x e^{-kt} dt$  converge et que l'on a :

$$\int_0^{+\infty} t^x e^{-kt} dt = \frac{1}{k^{x+1}} \Gamma(x+1)$$

- 3 pts : changement de variable (poser  $u = kt$  / changement de variable valide car  $\varphi$  de classe  $\mathcal{C}^1$  / calcul)

- 1 pt : conclusion

c) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'intégrale  $\int_0^{+\infty} g_x(t) e^{-nt} dt$  converge, puis que la limite de

$\int_0^{+\infty} g_x(t) e^{-nt} dt$ , lorsque l'entier  $n$  tend vers  $+\infty$ , est égale à 0.

- 3 pts : critère de comparaison (inégalité)

- 2 pts : encadrement / croissance de l'intégration

- 1 pt : conclusion (limite nulle)

**d)** En déduire la relation :  $I(x) = S(x+1)\Gamma(x+1)$ , où la fonction  $S$  a été définie dans la Partie I.

- 1 pt : intégration de part et d'autre de l'égalité

- 1 pt :  $(-1)^n \int_0^{+\infty} g_x(t) e^{-nt} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

- 1 pt : série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{x+1}}$  converge car  $x+1 > 0$

- 1 pt : passage à la limite

**8.** En utilisant la Partie I., déterminer la valeur de  $I(1)$ .

- 1 pt : utilisation possible du résultat précédent car  $x = 1 \in ]-1, +\infty[$

- 1 pt : conclusion  $I(1) = \frac{\pi^2}{12}$

### Exercice 3 /43

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0, 1[$  par :

$$f : x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$$

#### Partie A : Étude de la fonction $f$ /...

1. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]0, 1[$  et que l'on a :

$$\forall x \in ]0, 1[, f'(x) = \frac{1}{x(1-x)(\ln(x))^2} (-x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x))$$

- 1 pt : la fonction  $f$  est dérivable sur  $]0, 1[$  car elle est le quotient  $f = \frac{f_1}{f_2}$  où ...
- 1 pt :  $f_1$  dérivable sur  $]0, 1[$  comme composée ...
- 1 pt : calcul

2. a) Justifier :  $\forall t \in ]0, 1[, t \ln(t) < 0$ .

- 1 pt :  $\forall t \in ]0, 1[, \ln(t) < 0$  et multiplication par  $t > 0$

b) En déduire que la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $]0, 1[$ .

- 1 pt :  $x(1-x)(\ln(x))^2 > 0$  donc le signe de  $f'(x)$  est celui de la quantité  $-x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x)$
- 1 pt :  $x \ln(x) < 0$
- 1 pt :  $(1-x) \ln(1-x) < 0$  en utilisant la propriété précédente en  $t = 1-x \in ]0, 1[$

3. a) Montrer que la fonction  $f$  est prolongeable par continuité en 0.

On note encore  $f$  la fonction ainsi prolongée en 0. Préciser  $f(0)$ .

- 1 pt :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$
- 1 pt : on prolonge  $f$  en posant  $f(0) = 0$

b) Montrer que  $f$  est dérivable en 0 et préciser  $f'(0)$ .

- 1 pt : écriture de  $\tau_0(f)(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\ln(1-x)}{x \ln(x)}$
- 1 pt :  $\ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x$

4. Calculer la limite de  $f$  en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de  $f$  ?

- 1 pt :  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)} = +\infty$
- 1 pt : ainsi la droite  $x = 1$  est une asymptote verticale de la courbe représentative de  $f$

5. Tracer l'allure de la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé, en faisant figurer la tangente en 0 et les branches infinies éventuelles.

- 1 pt : la droite d'équation  $x = 1$  apparaît
- 1 pt : tangente horizontale en  $(0, 0)$
- 1 pt : respect des variations et limites
- 1 pt : propriété générale

**Partie B : Étude d'une suite**

On note, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $(E_n)$  l'équation :  $x^n + x - 1 = 0$ .

6. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Étudier les variations sur  $\mathbb{R}_+$  de la fonction  $x \mapsto x^n + x - 1$ .

En déduire que l'équation  $(E_n)$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}_+$  que l'on note  $u_n$ .

- 1 pt :  $h_n : x \mapsto x^n + x - 1$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  car est une fonction polynomiale (de degré  $n$ ) et  $h'_n(x) = n x^{n-1} + 1$

- 1 pt : tableau complet

$x$	0	$+\infty$
Signe de $h'_n(x)$	+	
$h_n$	-1	$+\infty$

- 2 pts : théorème de la bijection

× 1 pt :  $h_n$  continue et strictement croissante sur  $[0, +\infty[$

× 1 pt : comme  $0 \in [-1, +\infty[$ , l'équation  $h_n(x) = 0$  admet une unique solution  $u_n \in [0, +\infty[$

7. Montrer que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $u_n$  appartient à l'intervalle  $]0, 1[$ .

- 1 pt :  $-1 = h_n(0) < h_n(u_n) < h_n(1) = 1$

- 1 pt : en appliquant  $h_n^{-1} : [-1, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  qui, d'après le théorème de la bijection, est strictement croissante sur  $[-1, +\infty[$

8. Déterminer  $u_1$  et  $u_2$ .

- 1 pt :  $h_1(x) = 0 \Leftrightarrow x^1 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$  donc  $u_1 = \frac{1}{2}$

- 1 pt :  $h_2(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$

- 1 pt :  $P(X) = X^2 + X - 1$  admet pour racines  $x_- = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0$  et  $x_+ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \geq 0$  donc  $u_2 = x_+$

9. a) Recopier et compléter la fonction **Scilab** suivante afin que, prenant en argument un entier  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , elle renvoie une valeur approchée de  $u_n$  à  $10^{-3}$  près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie.

- 1 pt : `4 while (b-a) > 10^(-3)`

- 1 pt : `7 if (c^n + c - 1) > 0 then`

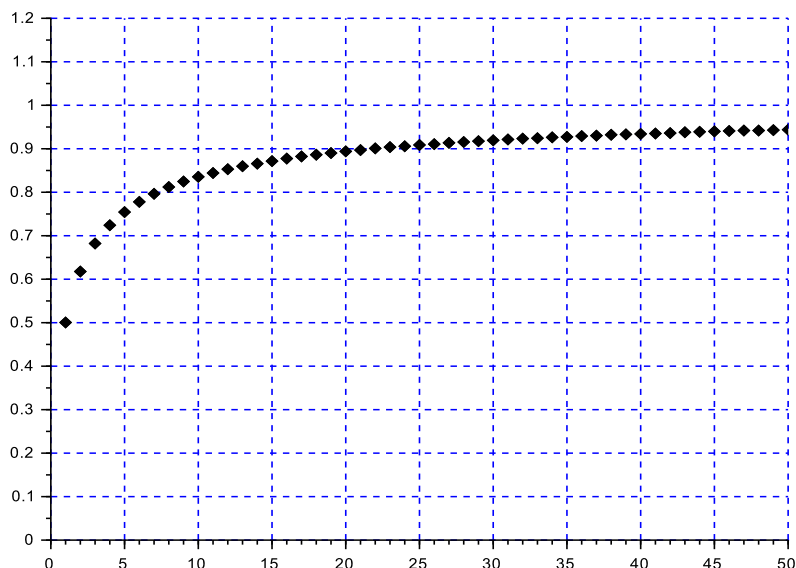
- 1 pt : `9 a = c`

- 1 pt : `12 u = a`

- 1 pt : point bonus si l'affectation  $u$  est sortie de la boucle



- b) On représente alors les premiers termes de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et on obtient le graphe suivant. Quelles conjectures peut-on faire sur la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  concernant sa monotonie, sa convergence et son éventuelle limite ?



- 2 pts : si au moins 3 items parmi :  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est strictement croissante, minorée par  $\frac{1}{2}$ , majorée par 1, convergente de limite 1  
 (1 pt si seulement 2 items, 0 pt si seulement 1 item)

10. a) Montrer, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  :  $f(u_n) = n$ .

- 1 pt :  $u_n^n = 1 - u_n$  par définition de  $u_n$   
 - 1 pt :  $f(u_n) = \frac{\ln(1 - u_n)}{\ln(u_n)} = \frac{\ln(u_n^n)}{\ln(u_n)} = \frac{n \ln(u_n)}{\ln(u_n)}$

b) En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante.

- 1 pt : d'après la question précédente :  $f(u_n) = n \leq n + 1 = f(u_{n+1})$   
 - 1 pt : en appliquant la fonction  $f^{-1} : ]0, +\infty[ \rightarrow ]0, 1[$  qui d'après le théorème de la bijection,  $f^{-1}$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$

c) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge et préciser sa limite.

- 1 pt :  $(u_n)$  croissante et majorée par 1 donc convergente de limite  $\ell \in [0, 1]$   
 - 1 pt : comme la suite  $(u_n)$  est croissante :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq u_1 = \frac{1}{2}$   
 - 1 pt : démontrons  $\ell = 1$ . On procède par l'absurde.  
 - 1 pt : on suppose  $\ell \neq 1$  et donc  $\ell \in [\frac{1}{2}, 1[$   
 - 1 pt :  $(f(u_n))$  est convergente de limite  $f(\ell) \in \mathbb{R}$  car  $f$  est continue en  $\ell \in [\frac{1}{2}, 1[ \subseteq ]0, 1[$   
 - 1 pt :  $f(u_n) = n$  avec  $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell)$  mais  $n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$