DS1 (version B)

Exercice 1

1. On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) ; soit t l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice associée T relativement à cette base s'écrit :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer les valeurs propres de t.
Déterminer les sous-espaces propres de t associés, et donner une base de chacun d'entre eux.
L'endomorphisme t est-il diagonalisable ? Est-il bijectif ?

L'objet des questions suivantes est une généralisation des résultats précédents.

2. Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{2n+1}$ muni de sa base canonique $(e_1, e_2, \cdots, e_{2n+1})$.
Soit t l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n+1}$ défini par :

- pour tout entier i de $[\![1, 2n+1]\!]$, avec $i \neq n+1$: $t(e_i) = e_1$;
- $t(e_{n+1}) = e_1 + e_2 + \cdots + e_{2n+1}$.

a) Déterminer la matrice T associée à l'endomorphisme t relativement à la base $(e_1, e_2, \cdots, e_{2n+1})$.

b) Déterminer le rang de t, ainsi que la dimension du noyau de t.

c) Justifier que 0 est valeur propre de t. Déterminer la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0, ainsi qu'une base de ce sous-espace.

3. Montrer que $\mathrm{Im}(t \circ t) \subset \mathrm{Im}(t)$, où $\mathrm{Im}(u)$ désigne l'image d'un endomorphisme u de $\mathbb{R}^{2n+1}$.

4. Soit $\tilde{t}$ l'endomorphisme défini sur $\mathrm{Im}(t)$ par : pour tout x de $\mathrm{Im}(t)$, $\tilde{t}(x) = t(x)$
Établir que $\mathscr{B} = \left(e_1, \sum\limits_{i=1}^{2n+1} e_i\right)$ constitue une base de $\mathrm{Im}(t)$. Écrire la matrice associée à $\tilde{t}$ relativement à la base $\mathscr{B}$.

5. ***a)*** Soit λ une valeur propre non nulle de t, et x un vecteur propre associé à λ. Montrer que x appartient à $\mathrm{Im}(t)$.

b) En déduire toutes les valeurs propres de t. L'endomorphisme t est-il diagonalisable ?

Exercice 2

Partie I : Étude d'une fonction définie par la somme d'une série

On s'intéresse dans cette partie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, à la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

1. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ diverge.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}$.

- ***a)*** Montrer que les suites $(u_{2p})_{p \in \mathbb{N}^*}$ et $(u_{2p-1})_{p \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, puis en déduire qu'elles convergent vers une même limite notée $S(x)$.
- ***b)*** En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a : $|u_n - S(x)| \leqslant \varepsilon$.
- ***c)*** Justifier alors que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ converge et que l'on a : $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.
- ***d)*** Justifier : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $u_{2p} \leqslant S(x) \leqslant u_{2p+1} \leqslant u_{2p-1}$.
- ***e)*** En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|S(x) - u_n| \leqslant \frac{1}{(n+1)^x}$.
  On pourra séparer les cas n pair et n impair.
- ***f)*** En déduire une fonction **Scilab** qui, étant donnés deux réels $x > 0$ et $\varepsilon > 0$, renvoie une valeur approchée de $S(x)$ à ε près.

3. Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer :

$$\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k-1)^x} - \frac{1}{2^x} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x}$$

puis :

$$\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \frac{1}{2^{x-1}} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x}$$

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

- ***a)*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer, en utilisant la question ***3.*** : $v_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$.
- ***b)*** En déduire la convergence et la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, puis la valeur de $S(1)$.

5. On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Déterminer la valeur de $S(2)$.

Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On rappelle que la fonction Γ est définie sur $]0;+\infty[$ par : $\forall x \in]0;+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\, dt$.
On rappelle également l'égalité suivante : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+\mathrm{e}^t}\, dt$ converge si et seulement si $x > -1$.

On pose, pour tout réel x de $]-1;+\infty[$, $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+\mathrm{e}^t}\, dt$.

7. Soit $x \in]-1;+\infty[$. On définit la fonction $g_x :]0;+\infty[$, $t \mapsto \dfrac{t^x}{1+\mathrm{e}^t}$.

a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $g_x(t) = (-1)^n\, g_x(t)\, \mathrm{e}^{-nt} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\, t^x\, \mathrm{e}^{-kt}$.

b) Justifier, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^x\, \mathrm{e}^{-kt}\, dt$ converge et que l'on a :

$$\int_0^{+\infty} t^x\, \mathrm{e}^{-kt}\, dt = \frac{1}{k^{x+1}}\, \Gamma(x+1)$$

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(t)\, \mathrm{e}^{-nt}\, dt$ converge, puis que la limite de $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(t)\, \mathrm{e}^{-nt}\, dt$, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, est égale à 0.

d) En déduire la relation : $I(x) = S(x+1)\,\Gamma(x+1)$, où la fonction S a été définie dans la Partie **I**.

8. En utilisant la Partie **I.**, déterminer la valeur de $I(1)$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $]0,1[$ par :

$$f : x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$$

Partie A : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et que l'on a :

$$\forall x \in \,]0,1[,\ f'(x) = \frac{1}{x\,(1-x)\,\big(\ln(x)\big)^2}\,\big(-x\,\ln(x) - (1-x)\,\ln(1-x)\big)$$

2. ***a)*** Justifier : $\forall t \in \,]0,1[,\ t\,\ln(t) < 0$.

b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0,1[$.

3. ***a)*** Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.
On note encore f la fonction ainsi prolongée en 0. Préciser $f(0)$.

b) Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

4. Calculer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, en faisant figurer la tangente en 0 et les branches infinies éventuelles.

Partie B : Étude d'une suite

On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, (E_n) l'équation : $x^n + x - 1 = 0$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $x \mapsto x^n + x - 1$.
En déduire que l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ que l'on note u_n.

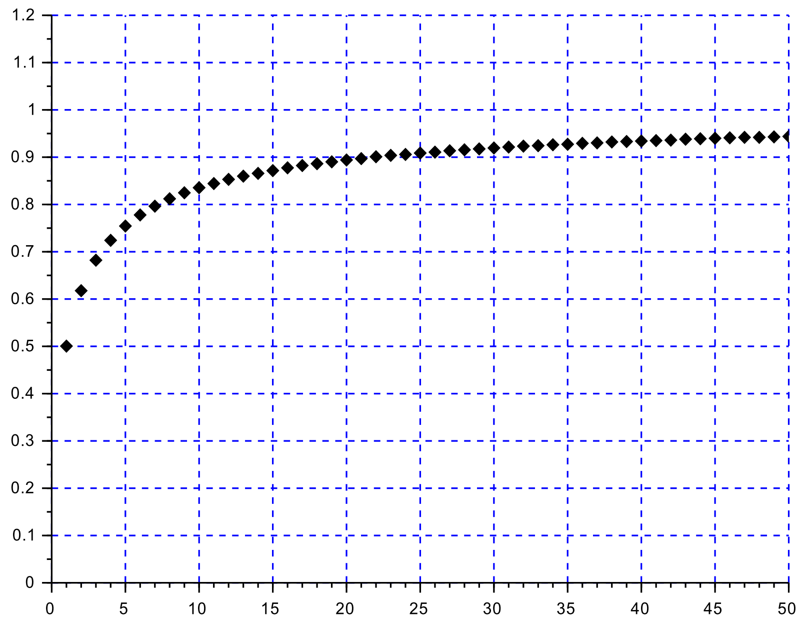
7. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n appartient à l'intervalle $]0,1[$.

8. Déterminer u_1 et u_2.

9. ***a)*** Recopier et compléter la fonction **Scilab** suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie.

```
function u = valeur_approchee(n)
    a = 0
    b = 1
    while ...
        c = (a + b) / 2
        if (c ^ n + c - 1) > 0 then
            ...
        else
            ...
        end
        u = ...
    end
endfunction
```

b) On représente alors les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et on obtient le graphe suivant. Quelles conjectures peut-on faire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ concernant sa monotonie, sa convergence et son éventuelle limite ?



10. ***a)*** Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $f(u_n) = n$.

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.