DS1 (version A) /159

Exercice 1 /35

On désigne par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. *a)* Calculer $(A - 2I)(A - I)^2$.

- 1 pt : $(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $(A - 2I)(A - I)^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

- 1 pt : $(A - 2I)(A - I)^2 \ = \ A^3 - 4A^2 + 5A - 2I$

- 1 pt : $A^{-1} \ = \ \dfrac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I)$

2. On note $E_2(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X\}$.

a) Résoudre le système suivant : $(S_1) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ -3x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & - & 2z & = & 0 \end{array} \right.$.

- 2 pts : résolution du système $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & 0 \end{array} \right.$

b) Déterminer $E_2(A)$

- 1 pt : écriture système

- 1 pt : $E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

c) En déduire que $E_2(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_2(A)$.

- 1 pt : $E_2(A)$ est une sev

- 1 pt : famille génératrice

- 1 pt : famille libre

3. On note $E_1(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$.

a) Résoudre le système suivant : $(S_1) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ -3x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & - & 2z & = & 0 \end{array} \right.$.

- 2 pts : résolution du système $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & y \\ z & = & 0 \end{array} \right.$

b) Déterminer $E_1(A)$.

- 1 pt : écriture système

- 1 pt : $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$

c) En déduire que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_1(A)$.

- 1 pt : $E_1(A)$ **est un sev**

- 1 pt : famille génératrice

- 1 pt : famille libre

4. On note $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & -1\\1 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.

- 3 pts : $P^{-1} = \begin{pmatrix}2 & -2 & -1\\-1 & 2 & 1\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

b) Montrer que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 1 & 3\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

- 1 pt : pour $P^{-1}A = \begin{pmatrix}4 & -4 & -2\\-4 & 5 & 4\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ **ou pour** $AP = \begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\0 & 1 & 2\\2 & 0 & 2\end{pmatrix}$

- 1 pt : pour $P^{-1}AP = T$**.**

c) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P^{-1}A^nP = T^n$.

- 1 pt : initialisation

- 2 pts : hérédité

5. *a)* Exhiber une matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = D + N$, où :

$$D = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

- 1 pt : $N = T - D = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 3\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- 1 pt : $N^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$

- 1 pt : récurrence immédiate

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n en fonction des matrices D et N, à l'aide de la formule du binôme de Newton.

- 1 pt : D **et** N **commutent**

- 1 pt : formule du binôme correcte

- 1 pt : découpage valable car $n \geqslant 1$

- 1 pt : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$

- 1 pt : $T^n \ = \ D^n + n\,D^{n-1}\,N$

- 1 pt : cas $n = 0$

Exercice 2 /53

Partie I : Étude de deux suites

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \dfrac{1}{n}$.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1)$.

a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

- **1 pt :** $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

b) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ et dresser son tableau de variations.

- **1 pt : f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$**
- **1 pt :** $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)^2} > 0$ **car** $x > 0$
- **1 pt : tableau complet**

x	0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	||	$+$	
Variations de f	||	$-\infty \nearrow$	0

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_{n+1} - u_n = f(n)$.

- **1 pt : calcul correct**

d) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

- **1 pt : D'après l'étude en question *1.b)*, la fonction f est croissante sur $]0, +\infty[$ et de limite nulle en $+\infty$. On en déduit :** $\forall x \in]0, +\infty[, f(x) \leqslant 0$
- **1 pt : on applique l'inégalité à** $n \in]0, +\infty[$

e) Écrire une fonction d'en-tête : `function y = u(n)` qui prend en argument un entier naturel n non nul et qui renvoie la valeur de u_n.

- **1 pt : syntaxe fonction et indentation**
- **1 pt : initialisation avant boucle for**
- **1 pt : taille boucle for**
- **1 pt : contenu boucle for**

```
function y = u(n)
    S = 0
    for k = 1:n
        S = S + 1/k
    end
    y = S - log(n)
endfunction
```

2. a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

- 1 pt : calcul correct

b) Montrer que pour tout réel x positif : $\ln(1+x) \leqslant x$.
En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

- 3 pts : argument de concavité ou étude de fonction

- 1 pt : application de l'inégalité en $x = \dfrac{1}{n}$ justifiée (on peut le faire car $\dfrac{1}{n} \geqslant 0$)

- 1 pt : $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$

c) `(CUBES uniquement - admis pour les autres)`
Donner le développement limité d'ordre 2 de $\ln(1+x)$ en 0. En déduire :

$$v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

- 1 pt : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ (DL usuel)

- 1 pt : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{v_{n+1}-v_n}{\frac{1}{2n^2}} = 1$

d) Déterminer la nature de la série de terme général $v_{n+1} - v_n$. On note $\gamma = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n)$.

- 1 pt : $v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$

- 1 pt : les séries sont à termes positifs

- 1 pt : la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$ donc converge

- 1 pt : par critère de comparaison par équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge

e) Pour $n \geqslant 2$, simplifier la somme partielle : $\sum\limits_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$.
En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers γ.

- 1 pt : $\sum\limits_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = v_n - v_1 = v_n$ $(v_1 = 0)$

- 1 pt : la série $\sum v_{n+1} - v_n$ est convergente de somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n) = \gamma$ donc la suite (v_n) converge vers γ

3. a) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

- 1 pt : $u_n = v_n + \frac{1}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \gamma$

b) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n$$

puis :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|u_n - \gamma\right| \leqslant \frac{1}{n}$$

- **2 pts : la suite (v_n) est croissante et $\lim\limits_{n \to \infty} v_n = \gamma$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leqslant \gamma$ en raisonnant par l'absurde**
  - × **1 pt : structure de raisonnement (y compris négation de : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant \gamma$)**
  - × **1 pt : reste de la démonstration**
- **1 pt : la suite (u_n) est décroissante et $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \gamma$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant \gamma$**
- **1 pt : $|u_n - \gamma| = u_n - \gamma$ car $u_n - \gamma \geqslant 0$**
- **1 pt : $u_n - \gamma = v_n + \dfrac{1}{n} - \gamma \leqslant \dfrac{1}{n}$ car $v_n - \gamma \leqslant 0$**

c) On rappelle que l'instruction `floor(x)` renvoie la partie entière d'un réel x et on suppose que la fonction `u` de la question ***1.e)*** a été correctement programmée.
Expliquer l'intérêt et le fonctionnement du script ci-dessous :

```
eps = input('Entrer un réel strictement positif : ')
n = floor(1/eps) + 1
disp(u(n))
```

- **1 pt : intérêt : le programme renvoie une valeur approchée de γ à ϵ près**
- **2 pts : fonctionnement**
  - × **1 pt : on cherche n tel que $\dfrac{1}{n} \leqslant \varepsilon$ car alors, par transitivité : $|u_n - \gamma| \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant \varepsilon$**
  - × **1 pt : résolution $\dfrac{1}{n} \leqslant \varepsilon$ et obtention de $n = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$**

Partie II : Étude d'une série

Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = \dfrac{1}{n(2n-1)}$.

4. Démontrer que la série de terme général a_n converge.

- **1 pt : $a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$**
- **1 pt : les séries sont à termes positifs**
- **1 pt : la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$ donc converge**
- **1 pt : par critère de comparaison par équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum a_n$ converge**

5. a) Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$.

- **1 pt : découpage en termes pairs et impairs de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$ bien écrit**
- **1 pt : changement d'indices corrects**

b) Déterminer deux réels α et β tels : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\beta}{2n-1}$.

- 2 pts : $\alpha = -1$ et $\beta = 2$ (dont 1 pt pour la gestion du $\forall n \in \mathbb{N}^*$ dans les équivalences)

c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 2 \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k}$.

- 2 pts : calcul correct

6. a) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = u_{2n} - u_n + \ln(2)$$

où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite définie dans la partie I.

- 2 pts : calcul correct

b) Calculer alors $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$.

- 1 pt : $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 2(u_{2n} - u_n + \ln(2))$

- 1 pt : passage à la limite $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k = 2\ln(2)$

7. a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+\frac{k}{n}}$.

- 1 pt : calcul correct

b) Retrouver alors le résultat de la question ***6.b)***.

- 1 pt : la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x+1}$ est continue sur $[0, 1]$

- 1 pt : somme de Riemann : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+\frac{k}{n}} = \ln(2)$

- 1 pt : $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 2 \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k} = 2 \times \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+\frac{k}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\ln(2)$

Exercice 3 / 71

On considère la fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]0,+\infty[$, par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}\ln(x).$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7 < \mathrm{e} < 2,8 \qquad 7,3 < \mathrm{e}^2 < 7,4 \qquad 0,6 < \ln(2) < 0,7.$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.

- **1 pt : la fonction f est deux fois dérivables sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$**
- **1 pt :** $\forall x \in\ ]0,+\infty[,\ f'(x) = \mathbf{e}^x - \frac{\mathbf{e}}{x}$
- **1 pt :** $\forall x \in\ ]0,+\infty[,\ f''(x) = \mathbf{e}^x + \frac{\mathbf{e}}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et la limite de f' en $+\infty$ et préciser $f'(1)$.

- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -\infty$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to +\infty} f'(x) = +\infty$
- **1 pt :** $f'(1) = 0$
- **1 pt : tableau complet**

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f''(x)$	‖	$+$		$+$	
Variations de f'	‖ $-\infty$		0		$+\infty$

2. Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$ et préciser $f(1)$.

- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$
- **1 pt :** $f(1) = \mathbf{e}$
- **1 pt : tableau complet**

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	‖ $+\infty$		$\mathbf{e}$		$+\infty$

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

- **1 pt : point remarquable** $(1, e)$
- **1 pt : tangente horizontale en** 1
- **1 pt : respect variations et limites**
- **1 pt : respect de la convexité**

4. *a)* Étudier les variations de la fonction $u : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) - x \end{array}$.

- **1 pt :** u **est dérivable sur** $]0, +\infty[$
- **1 pt :** $\forall x \in \,]0, +\infty[$**,** $u'(x) = \mathbf{e}^x - 1 + \frac{\mathbf{e}}{x^2}$
- **1 pt :** u **est strictement croissante sur** $]0, +\infty[$

b) En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in \,]0, +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et montrer : $1 < \alpha < 2$.

- **1 pt :** $f'(x) = x \;\Leftrightarrow\; u(x) = 0$
- **3 pts : théorème de la bijection**
  - × **1 pt : hypothèses**
  - × **1 pt :** $u(]0, +\infty[) = \,]-\infty, +\infty[$
  - × **1 pt :** $0 \in \,]-\infty, +\infty[$
- **1 pt :** $u(2) = \mathbf{e}^2 - \frac{\mathbf{e}}{2} - 2 > 0$
- **1 pt :** $u(1) < u(\alpha) < u(2)$
- **1 pt : Or, d'après le théorème de la bijection,** $u^{-1} : \,]-\infty, +\infty[\;\to\;]0, +\infty[$ **est strictement croissante sur** $]-\infty, +\infty[$**. En appliquant** u^{-1}**, on obtient alors :** $1 < \alpha < 2$

Partie II : Étude d'une suite, étude d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

5. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 2$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pt : hérédité**

6. *a)* Étudier les variations, puis le signe, de la fonction $g : \begin{array}{ccc} [2,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - x \end{array}$.

- **1 pt :** g **est dérivable sur** $[2, +\infty[$ **comme somme de fonctions dérivables sur** $[2, +\infty[$ **et** $\forall x \in [2, +\infty[$**,** $g'(x) = \mathbf{e}^x - \frac{\mathbf{e}}{x} - 1$
- **1 pt : D'après la question *1.b)*, la fonction** f' **est croissante sur** $[2, +\infty[\;\subset\;]0, +\infty[$**. Ainsi :** $f'(x) \;\geqslant\; f'(2)$
- **1 pt :** $f'(2) > 1$**, et donc** $g'(x) > 0$
- **1 pt :** $g(2) = \mathbf{e}^2 - \mathbf{e}\ln(2) - 2 > 0$
- **1 pt : comme** g **croissante sur** $[2, +\infty[$**, pour tout** $x \geqslant 2$ **:** $g(x) \geqslant g(2) > 0$

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

- **1 pt : d'après la question précédente :** $\forall x \in [2,+\infty[$, $f(x) > x$
- **1 pt : en appliquant cette inégalité à** $x = u_n \geqslant 2$ **(d'après *5.*), alors** $u_{n+1} \geqslant u_n$

7. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite.

- **1 pt :** (u_n) **est croissante donc soit** (u_n) **est majorée et converge, soit** (u_n) **n'est pas majorée et diverge vers** $+\infty$**. On doit donc démontrer que** (u_n) **n'est pas majorée.**
- **1 pt : structure raisonnement par l'absurde (Supposons que** (u_n) **est majorée)**
- **1 pt : comme** (u_n) **est croissante et majorée, alors elle converge vers** ℓ
- **1 pt : d'après *5.* :** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2$. **Donc, par passage à la limite :** $\ell \geqslant 2$
- **1 pt : par unicité de la limite et par continuité de** f **en** ℓ, $\ell = f(\ell)$ **et donc** $g(\ell) = 0$
- **1 pt :** $\ell \geqslant 2$ **donc** $g(\ell) > 0$. **Absurde**

8. Écrire un programme en **Scilab** qui, étant donné un réel A, renvoie un entier naturel N tel que $u_N \geqslant A$.

- **1 pt : définition de** A
- **1 pt : initialisation de** u **et** N
- **2 pts : boucle while**
- **1 pt : disp(**N**)**

```
A = input('Entrez un réel A : ')
N = 0
u = 2
while u < A
    N = N + 1
    u = exp(u) - %e * ln(u)
end
disp(N)
```

9. a) Démontrer : $\forall x \in [2,+\infty[$, $2\ln(x) \leqslant x \leqslant \dfrac{e^x}{3}$.

- **2 pts :** $\forall x \in [2,+\infty[$, $2\ln(x) \leqslant x$ **(concavité ou étude de fonction)**
- **2 pts :** $\forall x \in [2,+\infty[$, $x \leqslant \dfrac{\mathbf{e}^x}{3}$ **(étude de fonction)**

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant \dfrac{6-e}{2}\, u_n$.

- **1 pt :** $u_n \geqslant 2$ **donc** $2\ln(u_n) \leqslant u_n \leqslant \frac{\mathbf{e}^{u_n}}{3}$
- **2 pts : preuve correcte de l'inégalité**

c) Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$.

- **3 pts : on montre par récurrence que pour tout** $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 2\left(\dfrac{6-\mathbf{e}}{2}\right)^n$ **où** $\lambda = \frac{6-\mathbf{e}}{2} > 1$
  - × **1 pt : initialisation**
  - × **2 pts : hérédité**
- **1 pt :** $0 \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant \left(\frac{2}{6-\mathbf{e}}\right)^n$ **par stricte décroissance de la fonction inverse sur** $]0,+\infty[$
- **1 pt : les séries sont à termes positifs**
- **1 pt : la série** $\sum \left(\dfrac{2}{6-\mathbf{e}}\right)^n$ **est une série géométrique de raison** $\dfrac{2}{6-\mathbf{e}} \in\,]-1,1[$ **donc converge**

Partie III : Étude d'intégrales généralisées

10. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx$ converge et calculer cette intégrale.

- **1 pt : f est continue sur $]0,1]$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx$ est impropre en 0.**
- **2 pts : tout parfait (1 pt seulement si calcul mal présenté)**

11. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\ dx$ converge-t-elle ?

- **3 pts :**
  × **1 pt : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathbf{e}^x$**
  × **1 pt : $\forall x \in [1,+\infty[$, $\mathbf{e}^x \geqslant 0$ et $f(x) \geqslant 0$**
  × **1 pt : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathbf{e}^x\ dx$ est divergente.**

12. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{f(x)}\ dx$ converge. On pourra utiliser le résultat de la question ***9.a)***.

- **1 pt : $\frac{1}{f(x)} \leqslant \dfrac{1}{\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{\frac{x}{2}}}$**
- **1 pt : $\dfrac{1}{\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{\frac{x}{2}}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathbf{e}^{-x}$**
- **2 pts : critère d'équivalence des SATP**
  × **1 pt : $\forall x \in [2,+\infty[$, $\dfrac{1}{\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{\frac{x}{2}}} \geqslant 0$ et $\mathbf{e}^{-x} \geqslant 0$**
  × **1 pt : $\displaystyle\int_{2,+\infty}^{\mathbf{e}} {}^{-x}\ dx$ est une intégrale exponentielle de paramètre $1 > 0$. Elle est donc convergente**
- **2 pts : critère de négligeabilité des SATP :**
  × **1 pt : $\forall x \in [2,+\infty[$, $0 \leqslant \frac{1}{f(x)} \leqslant \dfrac{1}{\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{\frac{x}{2}}}$**
  × **1 pt : $\displaystyle\int_2^{+\infty} \dfrac{1}{\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{\frac{x}{2}}}\ dx$ est convergente**