

DS1 (version A)

Exercice 1

On désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 et on considère l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base \mathcal{B} est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. a) Calculer $(A - 2I)(A - I)^2$.

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} .

2. On note $E_2(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2 \cdot X\}$.

a) Résoudre le système suivant : $(S_1) \begin{cases} -2x + y + 2z = 0 \\ -3x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$.

b) Déterminer $E_2(A)$.

c) En déduire que $E_2(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_2(A)$.

3. On note $E_1(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$.

a) Résoudre le système : $(S_2) \begin{cases} -x + y + 2z = 0 \\ -3x + 3y + 3z = 0 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{cases}$

b) Déterminer $E_1(A)$.

c) En déduire que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_1(A)$.

4. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.

b) Montrer que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PT^nP^{-1}$.

5. a) Exhiber une matrice $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = D + N$, où :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$.

Déterminer T^n en fonction des matrices D et N , à l'aide de la formule du binôme de Newton.

Exercice 2

Partie I : Étude de deux suites

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1)$.

a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b) Étudier les variations de la fonction f sur \mathbb{R}_+ et dresser son tableau de variations.

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = f(n)$.

d) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

e) Écrire une fonction d'en-tête : **fonction y = u(n)** qui prend en argument un entier naturel n non nul et qui renvoie la valeur de u_n .

2. a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

b) Montrer que pour tout réel x positif : $\ln(1+x) \leq x$.
 En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

c) (CUBES uniquement - admis pour les autres)

Donner le développement limité d'ordre 2 de $\ln(1+x)$ en 0. En déduire :

$$v_{n+1} - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

d) Déterminer la nature de la série de terme général $v_{n+1} - v_n$. On note $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n)$.

e) Pour $n \geq 2$, simplifier la somme partielle : $\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$.
 En déduire que la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ converge vers γ .

3. a) Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

b) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \leq \gamma \leq u_n$$

puis :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - \gamma| \leq \frac{1}{n}$$

c) On rappelle que l'instruction **floor(x)** renvoie la partie entière d'un réel x et on suppose que la fonction **u** de la question 1.e) a été correctement programmée.

Expliquer l'intérêt et le fonctionnement du script ci-dessous :

```

1 eps = input('Entrer un réel strictement positif : ')
2 n = floor(1/eps) + 1
3 disp(u(n))
    
```

Partie II : Étude d'une série

Pour tout entier naturel n , on pose $a_n = \frac{1}{n(2n-1)}$.

4. Démontrer que la série de terme général a_n converge.

5. a) Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}$.

b) Déterminer deux réels α et β tels : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{2n-1}$.

c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n a_k = 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

6. a) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = u_{2n} - u_n + \ln(2)$$

où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la suite définie dans la partie I.

b) Calculer alors $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.

7. a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$.

b) Retrouver alors le résultat de la question 6.b).

Exercice 3

On considère la fonction $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]0, +\infty[$, par :

$$f(x) = e^x - e \ln(x).$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7 < e < 2,8 \quad 7,3 < e^2 < 7,4 \quad 0,6 < \ln(2) < 0,7.$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0, +\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.

b) Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et la limite de f' en $+\infty$ et préciser $f'(1)$.

2. Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$ et préciser $f(1)$.

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f .

4. a) Étudier les variations de la fonction $u :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f'(x) - x$.

b) En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α , et montrer : $1 < \alpha < 2$.

Partie II : Étude d'une suite, étude d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

5. Montrer que, pour tout n de \mathbb{N} , u_n existe et $u_n \geq 2$.
6. a) Étudier les variations, puis le signe, de la fonction $g : [2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.
$$x \mapsto f(x) - x$$

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
7. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite.
8. Écrire un programme en **Scilab** qui, étant donné un réel A , renvoie un entier naturel N tel que $u_N \geq A$.
9. a) Démontrer : $\forall x \in [2, +\infty[, 2 \ln(x) \leq x \leq \frac{e^x}{3}$.
b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq \frac{6-e}{2} u_n$.
c) Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{1}{u_n}$.

Partie III : Étude d'intégrales généralisées

10. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 f(x) dx$ converge et calculer cette intégrale.
11. L'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge-t-elle?
12. Montrer que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{f(x)} dx$ converge. On pourra utiliser le résultat de la question 9.a).